This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

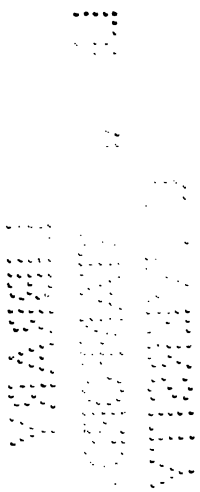
Aus dem Jahre 1885.

Nro. 1—13.

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1885.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.



Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1885.

Baeyer, Johann Jacob, gestorben. 388.
de Bary, Anton, Wahl zum a. M. 389.
*Bechtel, F., Ueber die urgermanische Verschärfung von *j* und *w*. 235.
*Bezzenberger, A., Die indogermanische Endung des Locativs Sing. der *u*-Declination. 160.
Boissier, Edmond, gestorben. 389.
Bornet, Edouard, Wahl zum Correspondenten. 389.
*Bürkner, K., Siebenter Bericht über die Königl. Universitäts-poliklinik für Ohrenkrankheiten. 63.

Claussen, Thomas, gestorben. 389.
Curtius, Georg, gestorben. 389.

*Dedekind, R., Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. 141.
Duncker, Wilhelm, gestorben. 389.

*Ehlers, E., Nebendarm und Chorda dorsalis. 390.
*Enneper, A., Ueber ein Euler'sches Integral. 163.
— — gestorben. 388.

(Die mit * bezeichneten Aufsätze sind in dem vorliegenden Bande gedruckt enthalten).

88074

*Falk, M., Beweis des Multiplicationstheorems für die Determinanten. 181.
Fleet, J. F., Wahl zum Correspondenten. 389.
*Frensdorff, F., Jacob Grimm in Göttingen. 1.
— — Bemerkungen über die Stellung des Deutschenspiegels in der Geschichte der Rechtsbücher. 141.

Hall, James, Wahl zum Correspondenten. 389.
Henle, Jacob, gestorben. 388.
*Hoppe, E., Das Spectrum des Büschellichtes. 305.
Hultsch, Friedrich, Wahl zum Correspondenten. 389.
*Huth, F., Beitrag zur Kenntnis der sympathischen Nerven. 183.

Jolly, Philipp Gustav, gestorben. 389.

*Kielhorn, F., Der Grammatiker Pāṇini. 185.
*Kiepert, L., Ueber eine Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung, von welcher in der Theorie der elliptischen Functionen die Teilung der Perioden abhängt. 257.
von Koenen, A., Ueber die Krinoiden. 285.
*Kohlrausch, F., Die elektrische Leitungsfähigkeit wässeriger Lösungen im Zustande äußerster Verdünnung. 72.

de Lagarde, P., Asadis persisches Glossar. 185.
— — P., Ungedruckte kappadokisch-griechische Texte. 313.
— — P., Arabische Evangelienharmonie des Vaticans. 385.
Lange, Ludwig, gestorben. 389.
Ludwig, Carl, Wahl zum a. M. 389.

*von Mangoldt, H., Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte. (Vorläufige Mittheilung). 313. Vorlegung der Abhandlung. 385.
Merkel, Friedrich, Wahl zum ordentlichen Mitgliede. 389.
Meyer, Victor, Wahl zum ordentlichen Mitgliede. 389.
Milne-Edwards, H., gestorben. 388.
Morf, H., Ueber drei bergellische Volkslieder. 385.

Pfeffer, Wilhelm, Wahl zum Correspondenten. 389.

Preisstiftungen.
Beneke'sche Preisstiftung. 208.
Preisaufgaben der K. Gesellschaft der Wissenschaften. 385.

Reincke, Johannes, wird auswärtiges Mitglied. 389.
Riecke, E., Zur Pyroelektricität des Turmalins. 405.

Sauppe, Hermann, Zum beständigen Secretair ernannt. 388.
*Schering, E., Mittheilungen über einen Briefwechsel zwischen Dirichlet und Kronecker. 200. *361.
— — zur Erinnerung an Generallieutenant J. J. Baeyer. 385.
Schwarz, H. A., Ueber ein auf künstlichem Wege hergestelltes Relief, dessen Gestalt mit einem Teile der Mondoberfläche große Aehnlichkeit hat. 185.
von Siebold, Carl Theodor, gestorben. 388.

Vahlen, Johannes, Wahl zum Correspondenten. 389.
Verzeichnisse der bei der K. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften. 123. 184. 239. 282. 310. 358. 383. 440.
— der an der K. Universität in Göttingen gehaltenen Vorlesungen. 125. 241.
*Voigt, W., Die optischen Eigenschaften sehr dünner Metallschichten. 44.
*— — Ueber die Erwärmung eines Gases durch Compression nach der kinetischen Gastheorie. 228.
*— — Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. 285.
*Volkmann, P., Ueber Mac Cullagh's Theorie der Totalreflexion für isotrope und unisotrope Medien. 336.

*Wachsmuth, C., Einige antiquarische Bemerkungen zu dem »Codex des Privatrechts« von Gortyn. 199.
*Wagner, H., Patrokles am Kara Bugas? 209.
*Weiland, L., zur Papstgeschichte des 10. Jahrhunderts. 69.
*Wieseler, F., über Eris, namentlich ihre äußere Erscheinung und Darstellung nach Schrift und Bild. 87.
*— — Kritische Bemerkungen zu Pausanias' Beschreibung der Akropolis von Athen, nebst zwei Exkursen archäologischen Inhalts. 319.
Williamson, William Crawford, Wahl zum Correspondenten. 389.
Wüstenfeld, F., Ueber die Scheriffe von Mekka im XI. Jahrhundert. 285.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. Januar. **№ 1.** 1885.

ROYAL COLLEGE OF ENGLAND LIBRARY

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 6. December 1884.

Jacob Grimm in Göttingen.

Von

F. Frensdorff.

Die Universität Göttingen hat acht Jahre das Glück gehabt, Jacob Grimm zu ihren Mitgliedern zu zählen. Die Biographien behandeln diese Zeit unverhältnißmäßig kurz; die schönste unter ihnen, die von Jacob und Wilhelm Grimm für die Strieder-Justische Gelehrtengeschichte von Hessen verfaßte Selbstbiographie bricht mit dem Beginn der Göttinger Periode ab. Es sind aber sonst Quellen zu deren Darstellung reichlich vorhanden. Namentlich gewähren die Briefe, deren in den beiden letzten Jahrzehnten allmählig eine stattliche Zahl veröffentlicht worden ist, ein werthvolles Material; nur sind die Mittheilungen, wie es die Natur der Quelle mit sich bringt, zerstreut, vereinzelt und bieten nicht auf alles Wissenswürdige die gewünschte Antwort. Die kärgliche Behandlung der Göttinger Zeit muß demnach andere Ursachen haben. Man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß der berechtigte Unwille über das Ende der hiesigen Wirksamkeit auf die Betrachtung dieser Wirksamkeit selbst Einfluß geübt; und daß der Weggang der Brüder von Göttingen die litterarische Aufmerksamkeit dermaßen beschäftigt hat, daß für ihr Kommen nach Göttingen und ihr Wirken in Göttingen wenig Raum übrig geblieben ist. Von dem Wunsche geleitet, zu der Feier des 4. Januar 1885, des hundertjährigen Geburtstages von Jacob Grimm, ein Scherflein beizusteuern, unternehmen es die fol-

Feb 24

genden Blätter, einen Beitrag zu der Geschichte der Jahre 1830—37 nach den beiden bezeichneten Richtungen zu liefern: die Berufung der Brüder nach Göttingen und ihre Wirksamkeit in Göttingen zu beleuchten. Für die letztere Aufgabe müssen sie sich der Hauptsache nach auf eine Zusammenfassung dessen beschränken, was in Briefen, biographischen Mittheilungen[1]), amtlichen Veröffentlichungen zerstreut vorliegt; für die erstere haben sie dagegen bisher ungedrucktes Material benutzt, das dem Archive des Königlichen Universitätscuratoriums Dank der oft bewährten Liberalität des Herrn Curators Geh. Regierungsraths von Warnstedt entnommen werden konnte.

I.

Zu Ende des Jahres 1829 siedelte Jacob Grimm von Cassel nach Göttingen über und wurde, nachdem er von dem Universitätsgerichte in Eid und Pflicht genommen, am 6. Januar 1830 in sein Amt auf der Bibliothek eingeführt. Die Verhandlungen über seine Berufung hatten im Anfang des J. 1829 begonnen und waren, weil zunächst im Interesse der Bibliothek angeknüpft, durch Heeren und Benecke geführt worden. Da bekanntlich den Göttinger Facultäten früher das Vorschlagsrecht bei Vacanzen mangelte, so bediente sich das Curatorium einzelner hervorragender Persönlichkeiten aus der Professorenschaft nicht nur als Vertrauensmänner und Rathgeber, sondern ließ auch wohl durch sie Neuzuberufenden die ersten Anträge machen. Einer solchen Stellung erfreute sich auch längere Zeit Heeren. Die Verhandlungen mit Creuzer, mit Thiersch, die der Minister von Arnswaldt in den J. 1815 und 1816 für Göttingen zu gewinnen strebte, waren durch seine Hand gegangen; Welcker und Otfried Müller durch ihn wirklich gewonnen worden. In dem vorliegenden Falle kam hinzu, daß Heeren zu der Bibliothek in naher Beziehung stand. Er war mit seinem Beirathe dem Minister behülflich gewesen, als es sich um eine Neuordnung der Verhältnisse nach

1) Neben dem was die Kleineren Schriften von J. Grimm (bis jetzt 7 Bde.) und von W. Grimm (bis jetzt 3 Bde.) gewähren, sind die von A. Reifferscheid herausgegebenen Freundesbriefe an die Glieder der Familie von Haxthausen (1878), der Briefwechsel des Frhrn. v. Meusebach mit J. und W. Grimm hg. v. Wendeler (1880), der in den Anmerkungen so werthvolle Mittheilungen aus der Correspondenz der Brüder mit Lachmann birgt, dann die in Pfeiffers Germania veröffentlichten Briefe an Hoffmann von Fallersleben, von Laßberg, Pfeiffer, die Mittheilungen in Zachers Ztschr. Bd. 1, benutzt worden. Daß ich die Artikel der Allg. D. Biogr. über Benecke (von Scherer), v. Arnswaldt und Hoppenstedt (von Waitz), den Aufsatz über Aug. v. Arnswaldt (von Umbreit in den Studien und Kritiken) zu Rathe gezogen, sei hier mit Dank angeführt. Die Einzelcitate jedesmal beizufügen, habe ich nicht für nöthig erachtet.

dem Tode Heynes, seines Schwiegervaters, des langjährigen Hauptes der Göttinger Bibliothek, handelte, und gehörte der Bibliothekscommission seit ihrer Begründung im Jahre 1814 an. Ihre Obliegenheit bestand in der Besorgung der allgemeinen Angelegenheiten und der Auswahl der anzuschaffenden Bücher, und ihre Mitglieder bildeten außer den drei ersten Beamten der Bibliothek zwei von den Professoren: Heeren und Blumenbach. Benecke bekleidete die nächste Stelle an der Bibliothek nach ihrem Chef, dem Hofrath Reuß, übersah am besten, was der Anstalt Noth that und, da er seit mehr denn zwanzig Jahren mit Jacob Grimm durch Gemeinschaft der Studien und durch Freundschaft verbunden war, ist von ihm sicherlich der Gedanke angeregt, die Gunst des Augenblicks zu benutzen und Jacob Grimm für Göttingen zu gewinnen. Der Bibliotheksverwaltung frisches Blut zuzuführen, erwies sich schon länger als Bedürfniß. Reuß gehörte seit 1782, wo er eine Tübinger Bibliothekarstelle mit einer Göttinger vertauschte, der Anstalt an; in der Reihe jener Würtemberger, die in dem letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts von einer schwäbischen Colonie zu sprechen Veranlassung gab, der Gmelin Spittler Planck Stäudlin Osiander, war er nach Göttingen gekommen und nach dem Tode Heynes, seines Schwiegervaters, im J. 1814 zu dessen Nachfolger in dem Directorium der Bibliothek ernannt worden. Eine ganz in das Bibliotheksfach aufgehende Natur, war er mit der Sammlung aufs innigste verwachsen; und so werthvoll auch immer in solcher Stellung der Träger einer langjährigen Tradition wirken mag, er war 1750 geboren, jetzt mithin nahezu achtzig Jahr alt. Dem ihm nächst stehenden Beamten Benecke fehlten an siebzig noch drei Jahre. Wenn er in voller Selbstlosigkeit jetzt die Aufmerksamkeit auf Grimm lenkte, so boten die Verhältnisse, die soeben in Cassel eingetreten waren, gegründete Aussicht auf Verwirklichung seines Vorschlages.

Am 31. Januar 1829 war Ludwig Völkel, bisher Vorstand des Museums und der Bibliothek zu Cassel, gestorben. 13 Jahre lang hatten Jacob und Wilhelm Grimm unter und mit ihm gearbeitet. Dem Namen nach ihr Vorgesetzter, war er durch Museum, Antiken und Münzen so vollständig in Anspruch genommen, daß den Brüdern die Besorgung der Bibliotheksgeschäfte allein zufiel. Ein bleibendes Denkmal des freundschaftlichen Verhältnisses bildet der schöne Nekrolog, den Jacob dem Verstorbenen in der Casseler Zeitung stiftete und die Herausgeber der Kleinern Schriften (VI S. 405) jetzt allgemein zugänglich gemacht haben. Seit 23 Jahren im Dienst seines Heimatlandes, davon 16 Jahre an der Bibliothek thätig, stand Jacob Grimm damals in seinen 44. Lebensjahre und bezog einen Gehalt

von 600 Thalern, sein Bruder die Hälfte. Andere Beamte als sie gab es an der Bibliothek nicht. Dem Dienst mit Liebe ergeben, in seiner Ausübung geschult wie kein anderer, bewarb sich Jacob um die durch Völkels Tod erledigte Stelle. Sie wurde ihm nicht zu Theil, sondern einem bisher der Anstalt ganz fremden, der schon das Amt eines Historiographen und Archivdirectors in sich vereinigte, Christoph von Rommel. Mit so inniger Liebe die Grimms an ihrer Heimat hingen, so nahe ihre Beziehungen zu verschiedenen Gliedern des Fürstenhauses waren, mit den einflußreichsten Persönlichkeiten jener Tage hatten sie nie Fühlung gewonnen noch gewinnen mögen. Ihr Gegner hatte die dorthin führenden Wege nicht verschmäht und sich mit Erfolg bemüht, die Bedeutung der Brüder und ihre Verdienste herabzusetzen. Hatte schon Kurfürst Wilhelm I. nach Ueberreichung des ersten Bandes der deutschen Grammatik dem Verfasser sagen lassen, er hoffe, daß über solchen Nebengeschäften sein Dienst nicht versäumt werde, so dachte der Sohn und Nachfolger genau ebenso, vielleicht noch ungünstiger von wissenschaftlichen Arbeiten. Die Bibliothek erschien ihm als eine sehr überflüssige Anstalt, und während alle anderen Staatsbeamten nach seinem Regierungsantritte Gehaltserhöhungen erhielten, wurde den Bibliothekaren die Anschaffung kostspieliger Uniformen auferlegt und binnen kurzer Zeit die Anfertigung einer Abschrift des in 80 Foliobänden vorhandenen Katalogs zu Handen des Oberhofmarschallamtes anbefohlen, das von nun ab die die Bibliothek controllierende Behörde bilden sollte. Dazu kam, daß der Kurfürst den Brüdern persönlich wegen ihrer treuen Anhänglichkeit an seine Gemahlin, die durch die Gräfin Reichenbach verdrängte Kurfürstin Auguste, grollte. Statt aller Beförderung ward den Brüdern daher nichts als eine Zulage von je 100 Thalern gewährt.

In diese Lage der Dinge greift der nachstehende Brief Heerens ein[1]). Er ist an den Geh. Cabinetsrath Hoppenstedt gerichtet, der seit 1826 unter den beiden das Curatorium bildenden Ministern von Arnswaldt und Strahlenheim die Universitätsangelegenheiten leitete und die Verwaltung mit soviel Hingebung und Einsicht führte, daß er sich das dauerndste Andenken gesichert hat. Daß seine Anstrengungen auch von Erfolg begleitet waren, dafür genüge statt aller der

1) Die im Folgenden mitgetheilten Briefe behalten Schreibung und Interpunktion der Originale bei, nur ist das Datum allemal an die Spitze der Briefe gesetzt. Bezüglich der Briefe von Jacob Grimm ist zu bemerken, daß sie alle mit lateinischer Schrift geschrieben sind, dagegen große und kleine Anfangsbuchstaben noch ganz in Uebereinstimmung mit der herrschenden Unterscheidungsweise verwenden.

eine Beweis, daß unter seiner Verwaltung die Sieben in Göttingen angestellt worden sind.

Heeren an G. E. F. Hoppenstedt.

[Göttingen] 15. Feb. (18)29.

Schon früher wollte ich über einen wichtigen Gegenstand schreiben; und will es wegen eintretender Umstände nicht länger anstehen lassen. Es betrift unsere Bibliothek; und deren künftige Verwaltung. Ich halte es für durchaus nothwendig bey Zeiten darauf zu denken; da sonst demnächst große Verlegenheit entstehen könnte. Reuß versieht zwar noch seine Stelle; aber in seinem 80ten Jahre dürfen wir nicht lange mehr auf ihn rechnen. Auch spricht er wohl selbst davon um seine Dimission zu bitten; wiewohl ich nicht glaube daß er es thun wird. Geht er aber ab, was soll werden? Man kann den Hofrath Benecke freylich zum ersten Bibliothekar machen; aber wie wichtig er auch für die Verwaltung der Bibliothek im Innern ist, so kann er doch nicht zugleich die Geschäfte von Reuß besorgen. Er selber sprach mit mir darüber; und was ich schreibe geschieht mit seinem Vorwissen. Einen guten Bibliothekar zu finden, ist noch schwerer als einen guten Professor. Ich weiß nur Einen Mann dazu vorzuschlagen, der ganz für uns passen würde; dieß ist der Bibliothekar Jacob Grimm in Cassel. Er ist der genaue Freund von Benecke, der nichts mehr wünscht als ihn zum Collegen zu haben. Er ist ganz das was ein Bibliothekar seyn muß; in Fleiß, Ordnungsliebe und Pünktlichkeit; und würde zugleich als Gelehrter der Universität die größte Ehre machen. Er ist nicht blos anerkannt der tiefste Forscher unserer Muttersprache, sondern auch der umfassende Kenner der slavischen Sprachen. Meine Meinung ist nicht, daß man ihn jetzt gleich rufen sollte; sondern nur daß man suchen sollte sich seiner auf den Fall des Abgangs von Reuß zu versichern. Der Zeitpunct scheint dazu günstig. Soeben ist in Cassel der Director des Musei Völkel gestorben; und Rommel ist zum Director des Musei und der Bibliothek ernannt; Grimm aber nur eine Zulage von 100 Thalern bewilligt. Mein Antrag gienge also vorerst nur dahin, daß ich in meinem Nahmen vertraulich bey ihm anfrüge, jedoch mit dem Beysatz ich wüßte daß man auch bey dem Curatorium gleiche Wünsche hätte, ob er in dem Fall des Abgangs von Reuß nicht der unsere werden wolle? Benecke würde dieß auch durch einen Privatbrief unterstützen. Aufschieben darf man es aber nicht; denn ich weiß daß man auch in Berlin auf ihn denkt; und nur den Tod des durch den Schlagfluß gelähmten Buttmann erwartet, um ihm Anträge zu machen. Gienge er nach Berlin, so wäre er für uns verloren. Er hat in Cassel ge-

wiß nur ein sehr mäßiges Gehalt. Er selber ist ein einzelner Mann, der mit seinem jüngern Bruder, der auch bey der Bibliothek angestellt und verheyrathet ist, zusammenlebt. Sein Alter ist 44 oder 45 Jahre. Auf lange Zeit wäre dann für die Bibliothek gesorgt. (Nur müßte ich bitten mir doch den Gehalt von Reuß zu melden, den ich nicht weiß, um einen Maaßstab zu haben.) Er war gern gesehen bey der Churfürstin; und deshalb steht er bey dem Churfürsten schlecht. Also von dieser Seite wäre auch kein Hinderniß zu besorgen.

Ich muß wohl um Verzeihung bitten, daß ich so weitläuftig über diesen Punkt schreibe. Aber ich berufe mich auf Ew. Hochwohlgeb. Liebe für die Universität. Es gilt ihrem ersten Institut, wo auch eine bloße Unterbrechung höchst nachtheilig werden könnte. Hinzusetzen muß ich, daß auch Benecke bereits 67 Jahre zählt. Auf die persönlichen Verhältnisse kommt bey der Bibliothek sehr viel an. Die Stellung würde hier keine Schwierigkeit machen. Von einem ersten und zweyten Bibliothekar wäre nicht die Rede; es wären zwey Bibliothekare, von denen der Eine das Innere, der Andere das Aeußere besorgte, über ihre weitern Verhältnisse müßten sie sich als zwey Freunde mit einander verständigen. Und der Casse braucht wahrscheinlich dadurch nichts aufgebürdet zu werden, oder doch nichts bedeutendes; statt daß man sonst vielleicht einen Bibliothekar sehr theuer würde kaufen müssen.

Von Hausmann haben wir aus London die besten Nachrichten[1]). Er ist dort über sein eignes Erwarten aufgenommen worden. Auch von Ewald[2]) habe ich aus Paris Brief gehabt. Er kam dort schon am 30. December an; und hat gleichfalls einer so guten Aufnahme sich zu erfreuen gehabt, daß man ihm die Orientalischen Manuscripte von der Bibliothek ins Haus giebt. Seine Gesundheit wahr sehr gut.

Ein Studiosus Schomburg hat mich um ein Vorwort für einen Freytisch gebeten, die Eltern haben 8 Kinder, sind ohne Vermögen; und er scheint durch Fleiß desselben würdig zu seyn.

Ich bitte um meine Empfehlung an S. E. den Herrn Curator; und um Entschuldigung wegen dieses langen Briefes. Mit innigster Hochachtung

Ew. Hochwohlgeboren
gehorsamster Diener
Heeren.

---

1) Der bekannte Mineraloge Hausmann befand sich von October 1828 bis Juli 1829 auf einer wissenschaftlichen, im Auftrage des Ministeriums unternommenen Reise.

2) Heinrich Ewald, seit 1827 außerordtl. Prof. in der philos. Facultät.

Das Schreiben Heerens fand in Hannover eine sehr entgegenkommende Aufnahme. Schon am 20. Februar erfolgte die Erwiederung, nicht ein bloßer Privatbrief Hoppenstedts, sondern, wie aus dem von vier Ministern signirten Concept hervorgeht, eine mit voller amtlicher Autorisation ertheilte Antwort, die sich gleichwohl völlig freihält von büreaukratischer Ueberlegenheit und in Form und Inhalt das wärmste Interesse für die angeregte Angelegenheit verräth. Hoppenstedt bemerkt, daß man auch in Hannover, insbesondere Seitens des Ministers von Arnswaldt schon länger daran gedacht habe, Jacob Grimm für Göttingen zu gewinnen. K. F. Alex. von Arnswaldt, der 1828 zwar das Ministerium niedergelegt, aber die Stelle des ersten Curators beibehalten hatte, war der Universität und den Wissenschaften aus voller Seele zugethan, und es war nicht bloße Courtoisie, wenn ihn die Societät der Wissenschaften 1815 zu ihrem Mitgliede erwählte. Den germanistischen Studien und persönlich den Brüdern Grimm stand er schon durch seinen ihnen befreundeten Sohn August, den nachherigen Legationsrath, nahe, der einst als Student Benecke nach Heidelberg zu den von Paris und Rom heimgekehrten Handschriften begleitet hatte, und jetzt gerade mit Anna von Haxthausen, die schon seit länger durch ihre Brüder mit den Grimms bekannt geworden und mit ihnen in Correspondenz stand, sich verlobte. Da das bisherige Bedenken des Curatoriums, durch die Berufung Grimms Benecke zu verletzen, durch den Brief Heerens gänzlich gehoben war, so wurde letzterer ermächtigt, in der vorgeschlagenen Weise mit J. Grimm in eine vertrauliche Communication zu treten. Die Geschäftsvertheilung zwischen Grimm und Benecke wünschte man von vornherein geregelt zu sehen, da auch unter Freunden einige Bestimmung solcher Art räthlich, um Zwiespalt zu vermeiden. »Was den Hofrath Reuß anbetrift, so kann nicht die Rede davon sein, etwas zu thun, wodurch dieser verdiente Mann gekränkt werden könnte. — Aber wer 80 Jahre gewirkt hat, hat gerechten Anspruch auf Ruhe. Sollte daher H. Reuß den Wunsch äußern, seine Dimission zu erhalten, so können Sie ihm mit Bestimmtheit erwiedern, daß das Curatorium gern geneigt seyn würde, seine Entlassung mit Beybehaltung seines ganzen Gehalts bey des Königs Majestät in Vorschlag zu bringen. Es bliebe ihm ja dennoch unbenommen, die Bibliothek täglich zu besuchen, da ich mir es wohl denken kann, daß es ihm ein peinliches Gefühl seyn würde, den gewohnten Aufenthalt auf der Bibliothek aufgeben zu müssen. Für die Sache selbst wäre es aber unstreitig sehr vortheilhaft, wenn er dem neuen Bibliothekar seine Erfahrungen noch mittheilen könnte und wenn zugleich die eigentliche Verwaltung, die doch ihm in seinem hohen Alter oft sehr lästig sein muß, in

eine kräftigere Hand übergienge. Es entstehet hiedurch allerdings für eine Zeitlang ein vermehrter Kostenaufwand, allein so sehr wir auch verpflichtet sind, möglichst zu sparen, so darf jedoch eine solche Ausgabe nicht gescheut werden. — Uebrigens würde es wahrscheinlich auch die Unterhandlung mit H. Grimm schneller zum Ziele führen, wenn ihm die Aussicht zu einer bald eintretenden Anstellung eröffnet werden könnte.«

Der Antrag wurde rasch nach Cassel befördert[1]) und stieß auf so geringe Schwierigkeiten, daß schon am 13. März eine Rückantwort von Hannover erfolgte. Diese Briefe liegen allerdings nicht vor, aber ihr Inhalt wird aus dem nachfolgenden Schreiben Heerens ersichtlich, das nur zum Theil hierher gehört, zum andern sich mit der Berufung des Philosophen Wendt, den Abgüssen der Elginschen Sammlung, von denen der König eine Auswahl der Universität geschenkt hatte, u. a. m. beschäftigt. Der Brief zeigt, daß Jacob Grimm, der im März selbst in Göttingen bei Benecke gewesen war (Germ. 13 S. 367), seine Bereitschaft auf den ihn gemachten Antrag einzugehen nur an die Bedingung geknüpft hatte, sich nicht von seinem Bruder Wilhelm trennen zu müssen, eine Bedingung, die in Hannover ohne Bedenken acceptirt wurde.

Heeren an Hoppenstedt.

Göttingen den 22. März 29.

Auf Ew. Hochwohlgebohren Schreiben vom 13. d. M. erwiedere ich, daß ich in Ansehung der Angelegenheit in Cassel ganz damit einverstanden bin, daß vor jetzt nichts weiter geschehen kann, als daß ich H. Grimm melde, daß man sein Versprechen annehme, daß ohne Rücksprache mit mir, er keinen auswärtigen Ruf annehmen wolle; jedoch mit dem Zusatz, daß die Bedingung sich von seinem Bruder nicht zu trennen, kein Hinderniß seyn solle. Mehr kann er selbst noch nicht erwarten, da der ganze Antrag ihm nur eventuel gemacht ist; und nach den hiesigen Verhältnissen auch nicht anders gemacht werden konnte. Dieß werde ich ihm daher schreiben. In den bevorstehenden Ferien will H. Benecke auf Einen Tag nach Cassel hinübergehen; wo dann über die Stundenzahl auf der Bibliothek, und manches Andere, sich mündlich am besten wird verhandeln lassen. Was nun das Gehalt betrift, so scheint mir das Natürliche, daß er

1) Die Aeußerung J. Grimms in einem Briefe an seinen Bruder Ferdinand vom 26. Februar (Kl. Schr. 1 S. 24) von bevorstehenden Veränderungen wird deshalb nicht auf Cassel zu beziehen sein, wo die Entscheidung bereits vor dem 15. Februar erfolgt war (ob. S. 5), sondern auf diesen Vorgang.

auf gleichen Fuß mit H. Benecke gesetzt würde. Ob ihm nun dieses durch mich, oder H. Benecke sogleich soll gesagt werden; darüber müßte ich mir Antwort erbitten. Ueber das Gehalt und die Stellung seines Bruders wird sich das Weitere noch nicht sogleich fest setzen lassen. Auch scheint mir dieß nicht nöthig, so bald die obige Zusicherung gegeben ist. . . . Die Verhandlung mit H. Dahlmann wird sich in die Länge ziehen. Indeß drängt es weniger, da Saalfeld hier aushilft. Vom Hofe bekommt er wohl seine Entlassung; aber ich bin begierig, ob die Stände ihn werden fahren lassen [1]). . . .

Da die Berufungsangelegenheit zunächst nur als eine eventuelle betrieben war, so trat nun mehrere Monate Pause ein. Die Brüder beobachteten völliges Stillschweigen. Erst im August empfangen die Freunde wie Lachmann, Freiherr von Meusebach leise Andeutungen. Wenige Wochen zuvor war die Sache aufs neue in Anregung gebracht; denn durch den am 21. Juni erfolgten Tod Buttmanns rückte die schon früher ins Auge gefaßte Gefahr nahe, daß man in Berlin Jacob Grimm zu gewinnen suchen würde. Jetzt ergriff das Curatorium in Hannover die Initiative, und war bisher die Berufung nur auf den Fall des Abganges von Reuß geplant, so erhielt nun Heeren den Auftrag, sofort mit Jacob Grimm die nöthige Verhandlung einzuleiten und sich eine recht baldige Entschließung auf seine Vorschläge auszubitten. Diese giengen dahin: das Dienstverhältniß von Reuß bleibt unberührt; Jacob G. wird als Bibliothekar mit einem Gehalt von 1000 Thlr. berufen und erhält in der Bibliothekscommission den Platz hinter Benecke, beim Abgange von Reuß eine Benecke coordinirte, nicht subordinirte Stellung; Wilhelm Grimm wird mit 500 Thlr. Gehalt als Bibliothekssecretair berufen.

Zur Beleuchtung des Folgenden theile ich eine bei den Acten befindliche Zusammenstellung der zu jener Zeit für die Bibliothek geleisteten persönlichen Ausgaben mit:

Bibliothekar Reuß	855	Thlr. 14	Ggr.
Unterbibliothekar Benecke	1111	» 2	» [2])

1) Die Verhandlung mit Dahlmann war von Seiten Hannovers schon im Februar 1829 zu Ende geführt; die dänische Regierung, die schon vorher seine Beförderung zum Ordinarius davon abhängig gemacht, daß er sich von der schleswig-holsteinschen Ritterschaft lossage und seine Stelle als Deputationssecretair freiwillig niederlege, verzögerte die Erledigung seines Abschiedsgesuches bis zum 6. August. (Springer, Dahlmann 1. S. 257, 261.)

2) Bis 1820 betrug sein Gehalt 700 Thlr. Cassenmünze; wegen Ablehnung eines Rufes nach Edinburg erhielt er eine Zulage von 300 Thlr. Cassenmünze. Das Plus der Textesangabe erklärt sich aus der Umrechnung in die seit 1817 in Hannover eingeführte Conventionsmünze.

Custos Bunsen	666 Thlr. 16 Ggr. [1])
Custos Dornedden	600 »
Bibliothekssecretair Hoeck	600 »
Böhmer	440 » [2])

Die Summe der persönlichen Ausgaben betrug demnach rund 4300 Thlr. Der sachliche Aufwand für Bibliothekszwecke, also vorzugsweise für Bücheranschaffungen belief sich, soweit er durch die von der Bibliothek damals selbst verwaltete Casse bestritten wurde, in den Jahren 1828—32 nach gütiger Mittheilung des Herrn Oberbibliothekars Wilmans auf 4600—5600 Thlr. ($18^{28}/_{29}$: 5223 Thlr., $^{29}/_{30}$: 4606 Thlr., $^{30}/_{31}$: 5654 Thlr., $^{31}/_{32}$: 4613 Thlr). Wenn in dem Staatshaushaltsetat $18^{35}/_{36}$ für die Bibliothek nur 7848 Thlr. ausgeworfen sind, so mag sich das daraus erklären, daß ein Theil der Besoldungen auf dem Etat der Universität stand. Später bis 1850 war das Verhältniß zwischen persönlichen und sachlichen Ausgaben dahin festgestellt, daß für jene rund 4000, für diese 5200 Thlr. verwandt wurden (Lehzen, Hannovers Staatshaushalt 2. S. 273, 276). Wenn sich im J. 1829 der schon verhältnißmäßig hohe Personaletat durch die Berufung der Brüder Grimm um 1500 Thlr. steigerte, so rechtfertigte man das mit der durchschlagenden Betrachtung: die Bibliothek ist Göttingens wichtigstes Institut.

Heeren an Hoppenstedt.

Göttingen, den 8. Julius 1829.

Ew. Hochwohlgeb. heute erhaltenem Auftrage gemäß, werde ich nicht verfehlen die Verhandlung mit den HH. Grimm in Cassel fortzusetzen. Doch muß ich, ehe ich dahin schreibe, mir noch eine genauere Instruction in Betreff des jüngeren Herrn Grimm erbitten.

Er kann nicht als Bibliotheks-Secretair berufen werden, diese Stelle hat der Professor Hoeck [3]). Es ist eine äußerst wichtige Stelle; indem davon die Erhaltung der Ordnung bey dem Ausleihen; und also die Erhaltung der innern Ordnung der Bibliothek in einem so hohen Grade abhängt. Es ist zugleich der mühsamste Posten auf der Bibliothek; wegen der damit verbundenen Haltung der Verzeich-

---

1) Für die Inspection der Freitische bezog er außerdem 111 Thlr. 2 Ggr.

2) Der bekannte G. W. Böhmer, der Schwager Carolinens, der von 1816 ab fortwährend als mit Umarbeitung des juristischen Realkatalogs beschäftigt angeführt wird. Der Art. der Allg. D. Biogr. ist aus Pütter-Oesterley, Gesch. der Univ. Göttingen 4. S. 498 zu vervollständigen. — Ueber Dornedden s. Pütter-Saalfeld 3. S. 415.

3) Wurde 1835 Unterbibliothekar, 1845 nach Beneckes Tode Bibliothekar, 1858 mit dem Titel Oberbibliothekar.

nisse über die täglichen Verleihungen von Büchern. Ich bin daher der Meinung, daß Wilhelm Grimm nicht anders als Custos der Bibliothek berufen werden könnte; da ich nicht weiß, ob er zu dem Posten des Secretairs paßte, oder ihn nur annehmen würde. Auch muß ich es bezweifeln, ob er, ohne außerordentlicher Professor zu werden, kommen würde. Bekanntlich ist damit der Eintritt in die Professoren-Wittwen-Casse verbunden; und er hat Familie. Ueber diese Punkte muß ich mir daher noch weitere Instruction erbitten.

Was den H. Jacob Grimm betrift, so war bekanntlich der bisher ihm gemachte Antrag eventuel; auf den Fall daß Reuß abgehen würde. Wenn er jetzt neben ihm stehen soll, wird seine erste Frage seyn, wie seine Stellung gegen ihn seyn soll? Die nähere Bestimmung über die Vertheilung der Geschäfte wird freylich der Zukunft überlassen bleiben müssen; doch aber wird es wohl sofort bemerklich zu machen seyn, daß Reuß den Character des Oberbibliothekars erhalten werde.

Ich habe es bereits in meinem frühern Briefe erwähnt, wie wichtig es sey, ein gutes Vernehmen unter den Angestellten zu erhalten. Wenn Reuß zum Oberbibliothekar, und Benecke und Grimm zu Bibliothekaren ernannt werden, so wird es keine Schwierigkeit haben Bunsen (bisherigen Custos) zum Unterbibliothekar zu ernennen. Er hat 39 Jahre bereits der Bibliothek gedient[1]); und Zurücksetzung würde ihn sehr schmerzen. Könnte man ihm und Hoeck, der Bibliothekssecretair bleibt, eine kleine Zulage, wenn auch nur von 100 Thalern bewilligen, (beyde bedürfen es;) so hätten sie keine Ursache zu klagen. Dornedden würde erster, und W. Grimm zweiter Custos. Dies scheint mir die zweckmäßigste Einrichtung zu seyn.

Nach Ihrem Briefe soll Reuß nicht eher von der Sache benachrichtigt werden, bis ihm seine Beförderung und die Anstellung von Grimm zugleich angezeigt werden kann. Allerdings wird man mit Grimm erst allein verhandeln müssen. Wenn er aber acceptirt, so wird die Sache bis zu der förmlichen Ernennung kein Geheimniß bleiben können; zumal da sie erst nach London muß. Ich stelle daher anheim, ob in diesem Falle nicht eine vorläufige Benachrichtigung in einem Schreiben von dort den dabey Betheiligten gegeben

---

1) Christian Bunsen war 1791 Accessist, 1795 Secretair, 1797 Custos der Bibliothek geworden. Daneben bekleidete er seit 1805 eine außerordentliche, seit 1814 eine ordentliche Professur in der philosophischen Facultät. Seine Vorlesungen betrafen die italienische und die spanische Sprache. Sein Sohn ist der berühmte Heidelberger Chemiker Robert Bunsen, der 1811 zu Göttingen geboren wurde und von 1834—36 hier als Privatdocent habilitirt war.

werden könnte? Die demnächstige Vertheilung der Geschäfte, über welche man ihr Gutachten zugleich einforderte, könnte dazu den Vorwand geben. Ein solcher Beweis des Vertrauens und der Zufriedenheit des Curatoriums könnte keine andere als gute Folgen haben.

Die Ernennung des Professor Dahlmann habe ich noch nicht in der Zeitung anzeigen können, da sie noch nicht an die Universität gekommen ist. Vieleicht ist sie noch nicht von England zurück. Es wäre sehr zu wünschen daß sie bald erfolgte; da es doch von Wichtigkeit ist, daß er bereits in den Lateinischen Lections-Catalog kommt.

Als das passendste Haus in Münden, an welches die Antiken von Bremen[1]) adressirt werden könnten, hat man mir das von Johann Christian Hildebrand genannt. Wenn dieß damit beauftragt wird, ersuche ich also das Haus in Bremen davon zu benachrichtigen. Ich glaube von H. von Strahlenheim gehört zu haben, daß die Sachen bereits in London gepackt waren.

Verzeihen Sie, wenn ich in der Casseler Sache vieleicht vorsichtiger bin, als nöthig scheinen möchte. Die Kenntniß der Verhältnisse auf der Bibiothek, und das Wohl derselben bewegen mich dazu. Mit der innigsten Hochachtung

Ew. Hochwohlgeb.
gehorsamster Diener
Heeren.

Hoppenstedt anwortete im Auftrag des Curatoriums am 12. Juli, die Absicht sei, Wilhelm G. zum zweiten Bibliothekssecretair zu machen; ihn als Custos zu berufen, hieße Hoeck zurücksetzen und empfindlich kränken. Gegen seine Ernennung zum außerordentlichen Professor trug man kein Bedenken, falls er selbst wünschen sollte, zugleich als Docent aufzutreten und zu erwarten wäre, daß er solches mit Erfolg thun könne, »sonst aber ist es nicht ohne Bedenken, da es nothwendig und rathsam ist, mit dem Professortitel möglichst zu geizen«. Heeren wird deshalb angewiesen, in der Verhandlung Jacob G. den Wunsch des Curatoriums zu erkennen zu geben, seinem Bruder eine Anstellung an der Bibliothek mit dem bezeichneten Gehalt zu ertheilen, daß in dessen keine bestimmte Stelle vakant sei, um ihm angetragen zu werden. Unter Darlegung der bestehenden Personalverhältnisse solle er über die Zweckmäßigkeit des gedachten Arrangements befragt werden.

---

1) Siehe ob. S. 8.

Heeren an Hoppenstedt.

Göttingen den 22. Julius 1829.

Ew. Hochwohlgeb. Auftrage gemäß, habe ich nicht verfehlt die Anträge an die HH. Grimm zu machen. Und bereits habe ich in dem beyliegenden Briefe die Antwort erhalten. Sie haben auf die vorgeschlagenen Bedingungen den Ruf acceptirt. Sie wünschen nur daß man ihnen ein billiges Umzugsgeld, und zollfreye Einfuhr ihrer Sachen bewillige (dieß in einem Briefe an Benecke).

Ich hielt es in meinem Schreiben für das Beste, blos das Wesentliche anzugeben: »daß H. Jacob Grimm mit einem Gehalt von 1000 Rth. C. G. als ordentlicher Professor der Philosophie und Bibliothekar werde berufen, und seinem Bruder Wilhelm eine passende Anstellung an der Bibliothek mit einem Gehalte von 500 Rth. werde gegeben werden; man es auch bey beyden gern sehen werde, wenn sie Vorlesungen halten wollten, wiewohl dieß keine Verpflichtung seyn solle, da die Bibliothek ihre eigentliche Bestimmung seyn solle.« Von einer Professur für den zweyten Grimm habe ich nichts erwähnt.

Noch mehr über ihre Stellung und Vertheilung der Arbeiten zu sagen, hielt ich für zu voreilig, da dieß doch einer weitern Uebereinkunft bedarf; und es besser schien hier freye Hände zu behalten.

Indeß wird nun die erste Frage seyn, wie Wilhelm Grimm, der Doctor, zu berufen ist. Daß eine Theilung der Secretariatsgeschäfte, wenn die innere Ordnung der Bibliothek erhalten werden soll, nicht zuläßig ist, habe ich schon bemerklich gemacht; und wird Hofrath Benecke bestätigen. Ich denke also das passendste wird seyn ihn als Custos zu berufen, zumal wenn der bisherige Custos Professor Bunsen zum Unterbibliothekar ernannt wird. Sollte jetzt, wie ich vermuthe, eine directe Communication mit den HH. Grimm von dem Curatorio beliebt werden, so wird durch diese sich die Sache am leichtesten ausmachen lassen.

Dem gegebenen Auftrage gemäß erfolgt von Hofrath Benecke hier angeschlossen ein Aufsatz über die Geschäfte der Bibliothek und ihre Vertheilung, welcher alle darüber nöthigen Aufschlüsse geben wird.

Es wird daher jetzt wohl Zeit seyn, Ew. Hochwohlgeb. Vorsatz gemäß, den Hofrath Reuß in einem nicht officiellen, sondern vertraulichen Schreiben, mit der Sache bekannt zu machen. Gewiß bedarf es nicht erst meiner Bitte einer sorgfältigen Behandlung des alten Mannes, der seit fast einem halben Jahrhundert mit der Bibliothek gleichsam zusammengewachsen ist. Da ich indeß seine große Empfindlichkeit kenne, so hat Hofrath Benecke in dem beygefügten kleinen Aufsatz die Art und Weise anzudeuten gesucht, wie nach unser beyder

Meinung das Schreiben an ihn am passendsten einzurichten wäre. Sollte der Hofrath Reuß nach einiger Zeit dann seinen Abschied fordern, so wäre dieß kein Uebel; es ist nur zu wünschen daß es nicht sogleich geschehe, um kein Aufsehen zu erregen.

Daß der Professor Dahlmann noch seinen Abschied nicht erhalten hat, ist schlimm. Man sagt mir, es sey in Copenhagen nicht ungewöhnlich dergleichen absichtlich zu verzögern, oder die Gesuche wohl ganz unbeantwortet zu lassen.

Der Hofrath Benecke, der auf die Herbstferien um einen Urlaub zu einer Reise anhalten wird, hat mich beauftragt zu fragen ob es hinreiche dieß in einem Privatschreiben an Ew. Hochwohlgeb. zu thun; oder ob ein förmliches Gesuch bei dem Minister erforderlich sey?

Mit der innigsten Hochachtung und dem Wunsche eines glücklichen Ausganges der Angelegenheit

Ew. Hochwohlgeb.
gehorsamster Diener
Heeren.

P. S. Sollte der jüngere Grimm auf dem Titel eines Bibliothekars bestehen, so wird es wohl keine Schwierigkeit haben ihn mit Bunsen zum Unterbibliothekar zu ernennen.

Jacob Grimm an Heeren.

Cassel 19. Juli 1829.

Hochverehrter Herr Hofrath,

auf Ihre gütige Zuschrift vom 16 d. habe ich die Ehre zu erwiedern, daß wir entschlossen sind, die uns vorläufig angetragnen Bedingungen anzunehmen und dem Rufe nach Göttingen zu folgen. Nur wünscht mein Bruder, der seit funfzehn Jahren unter dem Titel eines Secretars, ohne daß seine gerechtesten Ansprüche auf Beförderung erfüllt worden sind, der Bibliothek mitvorgestanden hat, jetzt auch den Character eines wirklichen Bibliothecars.

Mit Vorlesungen, wozu er übrigens auch nicht abgeneigt ist, müssen Versuche gemacht werden, da wir beide in dieser Absicht ungeübt und unvorbereitet sind. Von einem Brustübel, das mich vorletzten Winter befallen hatte, finde ich mich noch nicht vollkommen hergestellt, vielleicht könnte mir anhaltendes Reden schaden. Diese Vorlesungen würden altdeutsche Grammatik und Geschichte der deutschen Sprache und Poesie zum Gegenstand haben. Als unsern hauptsächlichen Beruf betrachten auch wir die Bibliothek. Nähere Bestimmungen des Bibliothekgeschäfts wollen wir erwarten.

Bis zum Eingang der förmlichen Vocation soll hier nicht das

geringste von der Sache verlauten. Alsdann werden wir um unsere Dienstentlassung einkommen.

Schenken Sie meinem Bruder und mir Ihr ferneres freundschaftliches Wohlwollen. Mit aufrichtiger Verehrung

Ihr
gehorsamer
Jacob Grimm.

»Ew. . . . gefällige Zuschrift vom 22. d. M.« — beginnt die Antwort Hoppenstedts an Heeren vom 30. Juli — hat mir große Freude gemacht, weil ich nach dem Inhalt derselben es als gewiß glaube annehmen zu dürfen, daß die Brüder Grimm nach Göttingen kommen werden«. Die Wilhelm Grimm anzuweisende Stellung wird, da er als Bibliothekssecretair nicht kommen will, dahin bestimmt, daß er als Unterbibliothekar hinter Bunsen eintritt, Mitglied der Bibliothekscommission wird und als solcher Antheil an der Direction der Anstalt nimmt. Die Bewilligung von Umzugsgeld findet keine Schwierigkeit; zollfreie Einfuhr ihrer Effecten versteht sich nach den Landesgesetzen von selbst. Da die förmliche Vocation erst nach der an den König geschehenen Berichterstattung erfolgen kann, so werden die Brüder zur vorläufigen Geheimhaltung und Verschiebung ihres Entlassungsgesuchs aufgefordert.

Das diesen Weisungen entsprechende Schreiben Heerens vom 3. August wurde, wie nachstehend, beantwortet.

Jacob Grimm an Heeren.

Cassel 4. August 1829.

Hochverehrter Herr Hofrath,

Wir finden, mein Bruder und ich, an den in Ihrem gestrigen Schreiben näher eröffneten Bedingungen, unter welchen wir an die dortige Bibliothek berufen werden sollen, nicht das geringste auszusetzen, ertheilen hiermit unsere ausdrückliche Zustimmung dazu und sehen der förmlichen Vocation von Hannover aus entgegen. Bis zu deren Eingang bleibt verabredetermaßen alles hier geheim gehalten. Mögen wir dereinst dem in uns gesetzten Vertrauen entsprechen!

Für die viele Mühe, welche Sie besonders in dieser Angelegenheit gehabt haben, versichere ich meine aufrichtigste Dankbarkeit. Die zugesandte Correctur folgt hierbei zurück[1]). Mit der größten Hochachtung und Ergebenheit

gehorsamst der Ihrige
Jac. Grimm.

1) Heeren war nach J. G. Eichhorns Tode im J. 1827 im Verein mit Benecke Redacteur der Gött. gel. Anzeigen geworden. Die eingesandte Correctur

Am 7. August übersandte Heeren das vorstehende Schreiben nach Hannover. Der am 18. August nach London expedirte Bericht ist bei aller Knappheit seiner Form zu lang und wiederholt zu viel aus dem Vorstehenden Bekanntes, als daß er hier vollständig mitgetheilt werden könnte; aber einzelne Stellen verdienen hervorgehoben zu werden. »Das wichtigste Institut, welches die Universität Göttingen besitzt«, beginnt er, »von dessen fortdauernd zweckmäßiger Einrichtung und Verwaltung der Flor der Universität wesentlich abhängig ist, ist die Bibliothek«.

Nach Darlegung der an der Bibliothek bestehenden persönlichen Verhältnisse fährt der Bericht fort: »das Universitäts-Curatorium hat seine Aufmerksamkeit darauf richten zu müssen geglaubt, bey Zeiten dafür zu sorgen, daß die Verwaltung der Bibliothek fortdauernd gesichert bleibe, und wir freuen uns, Ew. Majestät gegenwärtig anzeigen zu können, daß es gelungen ist, einen Mann aufzufinden, durch dessen Berufung nach Göttingen nicht nur die Bibliothek daselbst, sondern die ganze Universität eine ausgezeichnete Acquisition machen würde. Es ist dieses der bey der Bibliothek zu Cassel dermahlen angestellte Bibliothekar Jacob Grimm, welcher nicht nur durch seinen bisherigen Beruf sich eine vollkommene Kunde der Bibliotheksgeschäfte erworben hat, sondern auch als Gelehrter wegen seiner vorzüglich im Fache der deutschen Sprache, deutschen Poesie, deutschen Geschichte und deutschen Rechtsalterthümer herausgegebenen classischen Schriften in allgemeiner hoher Achtung stehet und daher auch in dieser Beziehung der Universität große Ehre machen würde. Wie nun schon vor einiger Zeit es hier bekannt ward, daß dieser Gelehrte mit seiner Lage in Cassel nicht ganz zufrieden sey und zu einer Veränderung derselben wohl geneigt seyn werde, so wurde mit demselben eine vorläufige Communication eingeleitet, welche jedoch mehr dahin gieng, seine Berufung nach Göttingen für die Zukunft vorzubereiten, als dieselbe schon jetzt sofort eintreten zu lassen. — Gegenwärtig sind nun aber Umstände eingetreten, welche es wünschenswerth, ja nothwendig gemacht haben, diesen Zweck ohne Aufenthalt bestimmter zu verfolgen, wenn man nicht Gefahr laufen wollte, ihn ganz aufgeben zu müssen. Es ist nämlich der Bibliothekar, Professor Buttmann in Berlin gestorben und uns bekannt geworden, daß man dort ebenfalls auf den Bibliothekar Jacob Grimm sein Augenmerk richte; nothwendig schien es daher, ohne allen Verzug

---

wird die der Recension von des Grafen Castiglioni Ausgabe der Mailänder Ulfilasstücke v. 1829 sein (Gött. gel. Anz. 1829 Aug. 13, St. 130 = Kl. Schr. 6 S. 409).

mit ihm Unterhandlungen einzuleiten, um dem Preußischen Gouvernement zuvorzukommen und sich nicht in die Lage zu setzen, zu ungleich größern pecuniären Opfern sich entschließen oder aber auf die Acquisition dieses Gelehrten ganz verzichten zu müssen. Diese Unterhandlungen haben nun auch jetzt zu dem Ziele geführt, daß der Bibliothekar Grimm sich bereit erklärt hat, als ordentlicher Professor in der philosophischen Facultät, — wozu er nach seiner vorhin erwähnten gründlichen Gelehrsamkeit umsomehr vollkommen geeignet ist, als er auch als Docent aufzutreten die Absicht hat — und als Bibliothekar gegen Bewilligung eines Jahrgehalts von 1000 Thlr. nach Göttingen zu kommen, dergestalt daß er in der Bibliothekscommission seinen Platz hinter dem Hofrath Benecke erhalten würde. — Inzwischen ist von demselben noch eine Bedingung hinzugefügt, welche zwar auf den ersten Blick auffallend scheint, doch aber nach unserm ehrerbietigen Dafürhalten kein Grund seyn dürfte, um von seiner Berufung zu abstrahiren. Der Bibliothekar Grimm ist nämlich unverheyrathet und lebt bey seinem jüngern verheyratheten Bruder, dem ebenfalls bey der Bibliothek zu Cassel als Secretair angestellten Dr. Wilhelm Grimm. Er hat nun erklärt, von diesem seinem Bruder sich auf keinen Fall trennen zu wollen, letzterer ist aber bereit, als Unterbibliothekar für einen Gehalt von 500 Thlr. nach Göttingen zu kommen. Da derselbe nun ebenfalls nicht nur ein in den Bibliotheksgeschäften geschickter und erfahrener Mann ist, sondern auch als Gelehrter einen geachteten Namen und an mehreren litterarischen Arbeiten seines Bruders selbstthätigen Antheil genommen hat; so glauben wir ohne alles Bedenken auch dessen Berufung unterthänigst anheim geben zu dürfen, indem es in der That nur mehreren zusammentreffenden glücklichen Umständen zuzuschreiben ist, wenn sich gegenwärtig die Möglichkeit zeigt, für einen jährlichen Aufwand von 1500 Thlr. zwey geschickte und qualificirte Männer nach Göttingen zu ziehen, wohingegen, wenn man diese Gelegenheit wollte unbenutzt vorübergehen lassen, vielleicht in sehr kurzer Zeit diese Summe nicht zureichen würde, um nur einen tüchtigen Bibliothekar zu erhalten und keiner in ganz Deutschland vorhanden seyn möchte, der für die Direktion der wichtigen Universitäts-Bibliothek zu Göttingen so sehr sich eignet, als gerade Jacob Grimm, indem derselbe, außer seiner vorhin schon gerühmten Qualification, außerdem auch mit dem Hofrath Benecke innig befreundet und daher um so mehr zu erwarten ist, daß sie in collegialischer Einigkeit für das Beste der Bibliothek zu sorgen beflissen seyn werden«.

Den Vorschlägen des Berichts entsprechend wurde das königliche

Rescript ausgefertigt. Es ist datirt von Windsor-Castle am 12. October 1829, an das Ministerium zu Hannover gerichtet und trägt die Unterschrift: George Rex, die Gegenzeichnung: E. Graf von Münster. Die Hauptstelle lautet:

> Sodann genehmigen Wir die Berufung des Bibliothekars Jacob Grimm zu Cassel zum ordentlichen Professor der Philosophie und zum zweiten Bibliothekar zu Göttingen, in welcher Qualität Wir demselben einen Gehalt von Eintausend Thaler Conventions-Münze beilegen wollen.
>
> Wie Wir denn auch gestatten, daß der Dr. Wilhelm Grimm als Unter-Bibliothekar mit einem Gehalte von Fünfhundert Thaler nach Göttingen berufen werde.

Hofrath Reuß wurde unter Beilegung des Ranges von Geheimen Justizrath zum Oberbibliothekar, Benecke zum ersten Bibliothekar ernannt und den beiden Custoden Bunsen und Dornedden der Character von Unterbibliothekaren verliehen.

Am 20. October machte das Universitätscuratorium Jacob Grimm von der vollzogenen königlichen Ernennung Mittheilung, bewilligte 100 Thlr. zur Bestreitung der Umzugskosten und forderte ihn auf, nunmehr seine Entlassung aus dem bisherigen Dienstverhältniß zu nehmen, um das neue Amt in Göttingen spätestens zu Ostern 1830, womöglich noch früher antreten zu können.

Die Antwort enthält folgendes Schreiben.

Jacob Grimm an das Königl. Universitätscuratorium

Cassel 1 Nov. 1829.

Königliches Universitäts Curatorium!

Alsbald nach Eingang des verehrlichen Erlasses vom 20 v. M. habe ich bei dem Kurfürsten um meine Verabschiedung nachgesucht und sie unterm 31., mit Einziehung meines hiesigen Gehalts vom 1 November an, erlangt, welches ich befohlenermaßen zu berichten nicht ermangele.

Die mir von Sr. Majestät dem König allergnädigst übertragnen Stellen eines Professors und Bibliothecars zu Göttingen werde ich, sobald es die nothwendig zu treffenden häuslichen Einrichtungen gestatten, welches schwerlich vor Jahres Ende der Fall sein dürfte, antreten und mich stets bestreben, meine Pflicht treu und gewissenhaft zu erfüllen.

Mit schuldigem Respect
Königl. Curatorii
unterthäniger
Jac. Grimm.

Erläutert wird der Inhalt des vorstehenden Schreibens durch den Meusebachschen Briefwechsel und die Mittheilungen bei Albert Duncker, die Brüder Grimm (Kassel 1884) S. 68 ff.

Die kurfürstliche Regierung machte nicht nur keinen Versuch, die Brüder zu halten, sondern ertheilte den Abschied obendrein in der verletzendsten Form. Das am 30. October Mittags eingereichte Gesuch war bereits am andern Morgen gewährt, schon um ihnen nicht noch einen Gehaltsanspruch für den Monat November zuzugestehen. Der Kurfürst wies das Oberhofmarschallamt an, den Brüdern die flachen Abschiede — der Ausdruck erinnert fast an die noch bei der Entlassung von Offizieren vorkommenden »schlichten Abschiede«, nur daß hier immer eine Verletzung der Standesehre die Voraussetzung bildet (Laband, Staatsrecht 3ª S. 238) — auszufertigen, nachdem der Museums- und Archivdirector Rommel bescheinigt haben werde, daß die genannten Grimms alles wohl abgeliefert. Zugleich wurde Rommel aufgegeben, »zweckmäßigere und für den Dienst vortheilhaftere Vorschläge wegen Wiederbesetzung eines Bibliothekars nebst eines Scribenten zu thun und die Instruction vorschläglich dahin abzuändern, daß gedachte bei der Bibliothek angestellt Werdende mehr für die Bibliothek selbst als für sich selbst arbeiten«. Ob der als Nachfolger berufene Bernhardi, der in den hessischen Verfassungskämpfen eine so hervorragende Rolle spielte, dem Ideal des Kurfürsten oder seines Sohnes entsprochen haben wird? — Unterm 10. November erließ das Curatorium die nöthigen Benachrichtigungen an die Bibliothekscommission, die Universität und die philosophische Facultät. Nachdem dann beide Brüder in Göttingen eingetroffen waren, wurde die Universitätscasse zur Zahlung der Umzugskosten und des Gehaltes angewiesen, und zwar des letztern von dem Tage an, von wo ab die Diensteinnahmen in Cassel aufgehört hatten. Machte so die hannoversche Regierung das Unrecht der hessischen gut, so versuchte die letztere selbst, das Geschehene zu sühnen, als es zu spät war. Durch eine gelegentliche Aeußerung des sächsischen Geschäftsträgers Majors von Lützerode erfuhren der Kurfürst und die Gräfin Reichenbach, welch berühmte Männer aus Hessen zu scheiden im Begriff seien. Der Leibarzt der Gräfin, Dr. Heräus, ein Hanauer Landsmann der Grimm, erhielt nun den Auftrag, ihnen alles anzubieten, was für sie wünschenswerth war: völlige Unabhängigkeit der Bibliothek von dem Museum und Herrn von Rommel, höhere Stellung und für beide zusammen 1600 Thlr. Gehalt, also mehr als in Göttingen. Die zweimalige Wiederholung des Anerbietens zeigte, daß es dem Kurfürsten ernst war. Die Brüder konnten nur antworten: so willkommen diese Anträge vor dem Abschiede gewesen seien, jetzt könnten sie ihr der

hannoverschen Regierung soeben gegebenes Wort nicht zurückfordern. —

Mit gerechter Genugthuung konnte das Curatorium in Hannover auf seine Erfolge zurücksehen: im Laufe des J. 1829 hatte es Albrecht, Dahlmann, Jacob und Wilhelm Grimm für Göttingen gewonnen.

Zu Weihnachten erfolgte die Uebersiedlung der Brüder. Sie waren keine Neulinge in Göttingen. Persönliche und wissenschaftliche Beziehungen bestanden schon seit Jahren. Die litterarischen Hülfsmittel des nahen Göttingen, die Gemeinschaft der Studien mit Benecke mochten die ersten Anknüpfungen vermittelt haben. Durch Benecke wird auch der Dieterichsche Verlag gewonnen sein, in dem das erste Buch von Jacob Grimm: über den altdeutschen Meistergesang 1811 erschien und nachher alle Hauptwerke wie die Grammatik, die Rechtsalterthümer, die Mythologie, die Weisthümer. Welch warmes Interesse Jacob an den Geschicken Göttingens, seiner Universität und Bibliothek, in der gefahrvollen westfälischen Zeit nahm, zeigen die Briefe an Tydeman. Nirgends ist Jacob Grimms Hauptwerk, die deutsche Grammatik, bei ihrem Erscheinen so begeistert begrüßt worden als von Benecke, einem sonst sehr förmlichen Manne, in den Göttinger Gel. Anzeigen. W. Scherer hat in seinem schönen Buche über Jacob Grimm (S. 173) die Eingangsworte erst jüngst wieder abdrucken lassen. Aber Benecke gesteht in der auch jetzt noch nachlesenswerthen Anzeige der zweiten Ausgabe (1822 St. 201), er habe neben seiner Freude eine heimliche Angst gehegt, das Buch möchte zu gut sein für diese Welt, und ist nun freudig überrascht wie jeder, dem geist- und kenntnißreiche Erforschung der vaterländischen Sprache etwas gilt, daß Grimms Grammatik kaum erschienen auch schon vergriffen und in der zweiten Ausgabe zur Hälfte verkauft war, ehe sie noch gedruckt vorlag. Seit 1818 waren beide Brüder Mitarbeiter an den Gel. Anzeigen und wurden 1825 zu Correspondenten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften erwählt. Auch das darf man, da die enge Verbindung Jacobs mit Göttingen dazu den Anlaß gab, als Zeugniss des alten Zusammenhanges anführen, daß sein Bruder Ludwig in den zwanziger Jahren die Bildnisse einer Reihe berühmter Göttinger Professoren nach dem Leben zeichnete, eine Arbeit, die der zarten und zierlichen Radirnadel des Künstlers die lebhafte Anerkennung Goethes eintrug. Bei so historisch gerichteten Naturen wie die Brüder waren, fehlte auch der Blick in die Vergangenheit nicht: Wilhelm Grimm, seit 1825 mit Dorothea Wild aus Cassel verheiratet, erinnerte sich gern daran, daß seine Frau eine Urenkelin von Johann Mathias Gesner, dem ersten großen Philologen der Georgia Augusta, war, und schloß

seine Selbstbiographie mit den Worten: möge etwas von dem Geiste Gesners auf meine Kinder übergehen!

II.

Am 11. December 1829 schrieb Otfried Müller an Böckh: unserer Universität gereicht es recht zum Vortheil, daß der äußere Glanz derselben etwas abgenommen; man thut in Hannover alles Mögliche für sie (Briefwechsel zwischen Boeckh und Müller S. 266). Die erwähnte Abnahme kann sich kaum auf etwas anderes als die allmähliche Verringerung der Frequenz beziehen, die in den letzten Jahren eingetreten war. Von der Höhe, auf der sie Mitte der zwanziger Jahre gestanden, war sie von Semester zu Semester herabgestiegen, so daß die Gesammtzahl der Studirenden statt der 1550 von 1825 im J. 1829 nur 1260 betrug. An dieser Abnahme hatte die juristische Facultät den größten Antheil. Während sie in der ersten Hälfte der zwanziger Jahre mehr als die Hälfte der Gesammtziffer in sich faßte, war sie gegen Ende des Jahrzehents von 870 auf 520 gesunken. So mancherlei äußere und innere Gründe diesen Rückgang bewirkt haben mögen, man wird nicht fehlgreifen, wenn man einen wichtigen Factor in Karl Friedrich Eichhorns zunehmender Kränklichkeit und endlichem Rücktritt von der akademischen Thätigkeit zu Ostern 1829 erblickt. Als sein eigentlicher Nachfolger wurde Albrecht berufen. Aber auch Dahlmann, der in die durch Sartorius' Tod erledigte Professur der Staatswissenschaften einzurücken bestimmt war, sollte einen Theil von Eichhorns Verlassenschaft, die deutsche Geschichte, übernehmen (Springer 1 S. 260). Und endlich, obschon nicht der Absicht, so doch dem Erfolge nach gieng auch auf Jacob Grimm ein Theil seiner Wirksamkeit über. Als Jacob Grimm nach Göttingen kam, stand er im frischen Glanze der das Jahr zuvor erschienenen »deutschen Rechtsalterthümer«. Eichhorn und Benecke hatten in einer gemeinsamen Recension der Gött. gel. Anzeigen (1829 Jan. 22, St. 14) das Buch begrüßt. »Alterthümer des deutschen Rechts« bildeten das erste Colleg, das Grimm in Göttingen las, und wie jedesmal, wo er es wiederholte, wurde es unter der Rubrik: Rechtswissenschaft im Lectionsverzeichnisse angezeigt und traten die Germanisten Albrecht und Kraut mit ihrer Vorlesung über deutsche Rechtsgeschichte davor zurück. —

Der Ruf, den die Brüder erhalten hatten, war selbst nach den bescheidenern Verhältnissen der damaligen Zeit kein glänzender zu nennen. Das Glänzendste daran ist, meinte Wilhelm Grimm, daß wir uns nicht zu trennen brauchen, an einer Bibliothek bleiben und eigentlich keine Vacanz da ist. Wird dadurch ihre Berufung

zu einem um so schönern Zeugniß des freien wissenschaftlichen Sinnes, der die Regierung leitete, so haben die Brüder es auch an sich nicht fehlen lassen und der Anstalt nicht blos ihre glänzenden Namen geliehen, sondern neben der Fortführung ihrer litterarischen Pläne an den Arbeiten der Bibliothek und der Universität ihren vollen Antheil genommen.

Der damals noch bestehenden Verpflichtung des ordentlichen Professors eine Antrittsrede zu halten und dazu mittels eines Programmes einzuladen genügte Jacob Grimm am 13. November 1830. Er sprach de desiderio patriae, über das Heimweh; einen kurzen deutschen Auszug gab er in den Gött. Gel. Anz. 1830 St. 201, wiederabgedr. in den Kl. Schr. 5 S. 480; die Rede selbst ebenda 6 S. 411. Am Schlusse dankte er den Collegen »quod me, qui humili degebam loco, in gremium vestrum splendidissimum receperitis«. So bescheiden die Casseler Stellung gewesen sein mochte, er gesteht selbst in einem Briefe an Lachmann: »unter dem desiderium patriae meinte ich heimlich auch Hessen mit, führte es aber hauptsächlich auf Deutschland und die deutsche Sprache aus«. Das Einladungsprogramm hatte zum Gegenstande: Hymnorum veteris ecclesiae XXVI interpretatio Theotisca nunc primum edita (Gott. 1830 in 4.), die später als Murbacher Hymnen bezeichnete Interlinearversion lateinischer Kirchengesänge aus dem 9. Jahrh., die Jacob Grimm aus einer einst von Franciscus Junius genommenen Abschrift veröffentlichte, die nachdem sie lange verschollen, auf das Betreiben Beneckes, »qui fervore plane Juniano has fovet literas et cui ut ultra metam Junianam eis prodesse incolumis pergat ex imo corde optamus«, in Oxford wieder aufgefunden worden war.

Die Bibliothek, der die Berufung der Brüder in erster Linie galt, nahm sie in ganz anderer Weise in Anspruch als der Dienst in Cassel. War das Personal in Göttingen auch durch ihren Zutritt dreimal so groß als das der Casseler Bibliothek, so stand eine Zahl von 240000 Bänden[1]) einer von 60000, die lebhafteste Benutzung in einer blühenden Universitätsstadt der in einer bescheidenen Residenz gegenüber, wo man sich so wenig um die Bücher und ihre Verwalter kümmerte, daß Jacob gegen Lachmann, der über amtliche Belästigung klagte, 1823 einmal in die Worte ausbrach: wenn uns nur.... unsere Ministerien mit ... Arbeiten plackten; es ist doch ein Zeichen

1) So schätzte man 1820 die Zahl; 1837 auf etwa 300000 (Pütter 3 S. 401; 4 S. 83); 1845 über 350000 (Hoeck in d. Nachr. 1845 S. 48). Eine 1877 veranstaltete Zählung ergab 361,500 Bände, die bis Ende 1879 auf 380,830 gewachsen waren (Mitthlgn. über die Univ.-Bibliothek von Prof. Wilmans 1879.)

von Aufmerken; hier nehmen sie gar keine Kundschaft von einem. Von den drei Stunden täglichen Bibliotheksdienstes in Cassel konnten die Brüder deshalb hinreichend für ihre eigenen Zwecke nutzen. In Göttingen dagegen wurde das Doppelte an Arbeitszeit von ihnen verlangt. Sechs lange geschlagene Stunden mitten im besten Tag; nicht hinter einander, sondern in zwei Sätzen; darunter wöchentlich acht öffentliche Stunden. Während dieser Zeit beständige Langeweile und unendliche Beschäftigung, ohne einen Funken innerer Freude. So viele schöne und seltene Bücher da sind, »was helfen sie mir, ich kann sie nicht lesen, kaum nachschlagen, ich habe sie nur einzutragen, zu holen und aufzusetzen«. Diese und ähnliche Stoßseufzer durchziehen alle Briefe Jacobs aus dieser Zeit und kehren gelegentlich noch später in der Erinnerung an diese Tage wieder. Er äußerte deshalb auch wohl seine Freude, nicht früher nach Göttingen gekommen zu sein; denn sonst wären Grammatik und anderes nicht geschrieben worden. Grade das lag ihm schwer am Herzen, daß die nöthige Muße für das Ausarbeiten der Grammatik, für inneres Fortstudiren und das unablässige Lesen der Quellen fehlte. Er hätte aber kein altgedienter Bibliothekar sein müssen, wenn ihm nicht aller Last ungeachtet die Büchersammlung ans Herz gewachsen wäre. Beim Abschied von Göttingen war ihm besonders leid, daß er sie missen mußte. Und wie sie ihm vieles war, so hat er auch ihr manch wichtigen Dienst geleistet. Nicht wenige werthvolle Geschenke sind der Bibliothek um seinetwillen gemacht worden. Ein besonders originelles ist der seltene Druck der Traditiones monasterii sancti Galli, den Joseph von Laßberg mittels einer die alten Formen nachahmenden Urkunde Grimm und auf dessen Todesfall der Bibliothek schenkte, Grimm aber sofort der letztern übergab [1]).

Zu dem Bibliotheksdienst kamen die Vorlesungen, die nur

1) Die auf dem ersten Vorsetzblatt des Buches stehende Urkunde v. 1830 lautet in ihrem Haupttheile: ego Josephus de Lassberg miles hospitalis s. Johannis in Jerusalem perpendens quod siquid locis sanctorum, substancie pauperum aut ad augmentum bonarum scienciarum conferimus, hoc nos procul dubio ad eternam beatitudinem conducere confidimus, dono atque trado ad librariam universitatis, que extructa est in oppido Gottingen, ubi in schola exteriori innumerabiles tyrones Deo et musis militare videntur et cui venerabilis Grimmo decretorum doctor preesse dignoscitur, presentem librum qui vocatur codex traditionum sangallensium, ita quidem ut predictus Jacobus Grimmo et post illum prenominata libraria istum in eternum possideant et eo jure proprietatis perfruantur. Am Schluß: hujus rei testes per aurem tracti sunt, de familia: Barbara magistra culine .... gewiß zum nicht geringen Leidwesen Grimms, der in dem Ohrzupfen ein eigenthümlich bairisches Rechtssymbol erblicken wollte (RA. S. 144).

Nachmittags nach Erledigung der Bibliotheksgeschäfte oder Mittags zwischen den Dienststunden gehalten werden konnten. Nach den Lectionsverzeichnissen, die als Ankündigungen nur ein annähernd sicheres Zeugniß der gehaltenen Collegen darbieten, ergiebt sich eine den Gegenständen nach sehr reiche Vorlesungsthätigkeit. Jacob G. begann, wie schon bemerkt, im Sommer 1830 mit einem vierstündigen Colleg über deutsche Rechtsalterthümer, denen er eine Geschichte der Quellen voranschickte. Im Sommer 1831 und Winter 1836/37 wurde diese Vorlesung wiederholt. Für das zweite Göttinger Semester, den Winter 1830/31 kündigte er die Erklärung Otfrids nach der von Graff unternommenen Ausgabe an. Im nächstfolgenden Winter las er zum erstenmal: die Grammatik der alten deutschen Sprache mit Hinsicht auf die heutige, eine Vorlesung, die zur ständigen in allen folgenden Wintern wurde, 1836/37 mit der Hinzufügung angekündigt, daß er diesmal den etymologischen Theil kürzer, die Syntax dagegen ausführlicher abhandeln werde, wohl mit Rücksicht auf den damals dem Erscheinen nahen vierten Theil seines Werkes. Für die Vorlesung über Grammatik interessirte sich das Curatorium besonders. Es forderte Jacob Grimm auf eine kleine deutsche Grammatik zu bearbeiten, die den Vorlesungen zu Grunde gelegt werden könne, und entband ihn zur Erleichterung seiner Arbeitslast durch Rescript vom 3. April für den Sommer 1832 von den nachmittägigen Bibliotheksstunden. Während er in den Sommersemestern 1832 und 1833 keine Vorlesungen ankündigte, nahm er im Sommer 1834 einen neuen Gegenstand auf: die Geschichte der deutschen Litteratur von der ältesten bis zur neuesten Zeit mit Berücksichtigung aller Wissenschaften. »58 Zuhörer kommen viermal wöchentlich« — schreibt er an Meusebach — »und ich weiß von der Geschichte der Medicin, Theologie u. s. w. oft nicht das genauste (geringste?), muß also, was mir die leidigen sechs Sommerbibliotheksstunden übrig lassen, auf meine Vorbereitung verwenden«. Im Sommer 1837 kündigte der Katalog dieselbe Vorlesung an. Nach dem Tode Tychsens († 1834), der bis dahin neben seinen sonstigen Fächern Paläographie und Diplomatik vertreten hatte, erbot sich J. Grimm dem Wunsche des Curatoriums entsprechend für den Sommer 1835 zu einem Vortrage über Paläographie, in welchem nach vorausgeschickter Untersuchung über den Ursprung der Schrift die Kunst sowohl alte Handschriften überhaupt als auch Diplome zu lesen und deren Echtheit zu prüfen gelehrt werden sollte. Denselben Gegenstand behandelte er in den beiden nächstfolgenden Sommern. Seit dem Winter 1835/36 trat endlich noch ein viertes Thema in den Kreis seiner Vorlesungen: Tacitus Germania, die er nach seiner damals erscheinenden Ausgabe

erklärte unter ausführlicher Erörterung der altdeutschen Mythologie und der Rechtsalterthümer. Eine Wiederholung dieses Collegs war für den Winter 1837/38 in Aussicht genommen. Außer diesen Privatvorlesungen hat er einmal für den Winter 1837/38 eine öffentliche angekündigt, in welcher er für Zuhörer, die mit den ersten Anfangsgründen bekannt waren, einzelne Stücke aus Wackernagels eben zu Basel erschienenem altdeutschen Lesebuche zu erklären vorhatte. Wiederholt hat er zwei ordentliche Vorlesungen neben einander gehalten: neben der deutschen Grammatik 1835/36 Tacitus Germania, 1836/37 Rechtsalterthümer, im Sommer 1837 neben Paläographie deutsche Litteraturgeschichte. Da diese Vorlesungen alle neu ausgearbeitet werden mußten und er sich, wie er gesteht, schlecht auf den halben Absud, der dem Durchschnitt der Studenten zusagte, verstand, so hat ihn die Vorlesungsthätigkeit in Göttingen erheblicher in Anspruch genommen, als man es sich gewöhnlich vorstellt und als bei seiner Berufung eigentlich im Plane lag. Ueber den Erfolg, den Jacob G. bei den Studenten hatte, spricht sich eine der bereits mitgetheilten Briefstellen aus. In einer andern vom November 1831 an Mensebach heißt es: ich hoffte diesen Winter sollte die angeschlagne Grammatik nicht zu Stand kommen, und hatte gar keine Vorbereitung getroffen, allein es haben sich 24 Zuhörer gemeldet, obgleich die Studentenzahl wieder abgenommen hat; und unterm 24. März 1833 an Hoffmann: erst vor einigen Tagen habe ich meine Vorlesung über Grammatik geschlossen; ich hatte 25 Zuhörer, aber nur $^2/_3$ waren fleißige. Auch Wilhelm G. berichtet im Sommer 1832, daß er 22 rechtmäßige Zuhörer in seinem Colleg über die Nibelungen habe. Ueber den Eindruck, den Jacobs Vortrag machte, ist mir nur ein Bericht bekannt geworden, der von Professor K. Gödeke in dem Sammelband von Göttinger Vorträgen (Göttinger Professoren [Gotha 1872] S. 187). Er wird bestätigt durch das, was Jacob G. von sich selbst sagt. Er war keine lehrhafte Natur und weder das Abfassen von Lehrbüchern noch das eigentliche Heranziehen von Schülern seine Sache. Wer wie er eine unüberwindliche Neigung hatte, immer lieber fort zu untersuchen als das Untersuchte darzustellen, wird sich und andern schwerlich auf dem Katheder genug zu thun vermögen.

Die Fächer, die J. Grimm als Lehrer vertrat, waren noch verhältnißmäßig jung in dem Kreise der Universitätsvorlesungen, und es mochte ihrer Benutzung durch die Studirenden nicht unerheblich nachhelfen, daß die hannoversche Regierung 1831 eine Verfügung erließ, wonach alle, welche Gymnasiallehrer werden wollten, sich einer Prüfung im Altdeutschen unterziehen mußten. Das Examen der

Schulamtscandidaten wurde vor einer in Göttingen eingerichteten Commission abgehalten, der J. Grimm seit ihrer Begründung im Sommer 1831 angehört, eine Zeitlang auch als Dirigent vorgestanden hat. — Höher, als sich in solchen Daten, die immer nur das Aeußere berühren können, ausprägt, wird man den wissenschaftlichen Einfluß anzuschlagen haben, der von dem Göttingen dieser Jahre ausgieng, in dem ein Kleeblatt wie Benecke, Jacob und Wilhelm Grimm zusammenwirkend die germanistischen Studien vertrat. Benecke war der erste gewesen, der sie in Göttingen eingebürgert hatte, der erste überhaupt, der nach J. Grimms Bezeichnung (Rede auf Lachmann Kl. Schr. 1 S. 149) auf den deutschen Universitäten eine grammatische Kenntniß altdeutscher Sprache weckte. Eine echt Göttinger Persönlichkeit, soviel ich erkenne; und da seine Jünglingsjahre und ein guter Teil seines Mannesalters noch in das vorige Jahrhundert fielen, ein Repräsentant des Göttingens jener Zeit mit seiner Vorliebe für englisches Wesen, für englische Sprache und Litteratur. Jacob Grimm spricht von seiner halbenglischen stolzen Sprödigkeit. Uebersetzungen aus dem Englischen waren seine ersten Arbeiten, Unterricht im Englischen seine ständige Thätigkeit von seinen jungen Jahren bis in sein hohes Alter hinauf; seinen Vornamen schrieb er gern George, und auch die Abneigung gegen Berlin fehlte nicht: als Wackernagel in jungen Jahren zu Besuch in Göttingen gewesen war, meinte Wilhelm G. »auch Benecke scheint er gefallen zu haben und da kann einer, der aus Berlin ist, von Glück sagen.« Von dem Englischen scheint Benecke auf die deutschen Studien geführt zu sein die er im Gegensatz zu dem Dilettantismus der Romantiker und den Willkürlichkeiten angeblicher Sprachphilosophen streng methodisch, kritisch und mit exacter Beobachtung der Worte und Sachen betreibt, Eigenschaften, die seine Ausgaben mittelhochdeutscher Dichter auch denen so werthvoll machen, die zum Zweck historischer Belehrung zu diesen Denkmälern greifen. Schon seit 1806 las er über ausgewählte Stücke der ältern deutschen Dichtkunst, regelmäßig des 13. Jahrh., des schwäbischen Zeitalters. Anfangs offenbar unter geringer Theilnahme, wie die unbestimmten mit den Zuhörern zu vereinbarenden Stunden vermuthen lassen. Noch als Heinrich Heine hier 1820 studirte, wunderte er sich nur neun unter den 1300 Studenten Beneckes Vorlesung besuchen zu sehen. Aber der eine Lachmann, den er für die deutschen Studien gewonnen hat, wiegt hunderte von Zuhörern auf. Später sind dann seine Vorlesungen beliebter geworden, die Litteraturgeschichte wechselt mit dem interpretatorischen Colleg, im Sommer 1828 kündigt er den antiquitatis patriae studiosis . . . . suavissimum saec. XII poema Iwein dictum nach der von ihm und

Lachmann eben veranstalteten Ausgabe an. Zu seiner Lehrwirksamkeit gesellte sich eine bis ins hohe Alter bei vollster Rüstigkeit fortgesetzte allseitige Thätigkeit für die Bibliothek, als deren premier grenadier W. Grimm einmal den Siebzigjährigen bezeichnet. In Wort und Schrift ein Apostel der strengen altdeutschen Schule, darf er neben seinen andern Verdiensten auch das in Anspruch nehmen, Jacob Grimm für Göttingen gewonnen zu haben. In einer Erinnerung an Jacob Grimm gebührt diesem Manne ein hervorragender Platz. — An Beneckes Vorlesungsthätigkeit knüpft die von Wilhelm Grimm an, der am häufigsten über das Nibelungenlied nach Lachmanns Ausgabe vortrug, außerdem in den ersten Wintern den Iwein und Freidank, nachher Walther von der Vogelweide, Wolframs Willehalm und die Gudrun erklärte. Ein reiches Bild altdeutscher Studien, mit dem sich schwerlich eine andere Universität jener Zeit messen konnte! Es wird vervollständigt, wenn man sich die litterarischen Arbeiten vergegenwärtigt, die in der Göttinger Zeit von den Brüdern ausgiengen.

Zur Zeit der Uebersiedelung von Cassel nach Göttingen war Jacob Grimm eben mit der Drucklegung des 3. Bandes der deutschen Grammatik beschäftigt; der Umzug machte eine längere Unterbrechung nöthig, so daß der Abschluß erst im Sommer 1831 erfolgen konnte. Das Vorwort, welches das Buch dem Bruder Wilhelm in der Erinnerung an dessen schwere Krankheit während des letzten Winters widmet, ist vom 29. Juli 1831 datirt. Der vierte und letzte überhaupt erschienene Band der Grammatik ist den siebenten Tag vor dem Göttinger Jubiläum (17. Septbr. 1837) abgeschlossen worden. Zwischen diesen beiden den Anfang und das Ende der Göttinger Thätigkeit bezeichnenden Büchern liegen die beiden hier neu unternommenen und zu Ende geführten Arbeiten: Reinhart Fuchs (Berlin 1834) und die deutsche Mythologie (Gött. 1835). An jenem Buche war Jacob seit 1832 thätig, nachdem er bereits in jungen Jahren den Plan dazu gefaßt hatte; schon 1811 spricht er von einer vorhabenden Ausgabe des Reineke Vos. Durch Mones Veröffentlichung des Reinardus vulpes veranlaßt, ist es dann rasch niedergeschrieben worden, gleichwohl aber immer eins seiner liebsten Bücher geblieben. In der ganzen Geschichte der Poesie giebt es keine anziehendere Untersuchung als die der Thierfabel, äußerte er gegen Hoffmann. Gern wäre er zu dem Gegenstande später noch zurückgekehrt; aber das Publicum verlangte nicht danach. Umsomehr nach der Mythologie, die noch zweimal aufgelegt wurde und in unseren Tagen in einer vierten um vielfache Zusätze bereicherten Ausgabe edirt worden ist. Zahlreiche kleinere Arbeiten giengen neben den großen her. Zum

Zweck seiner Vorlesungen veranstaltete er eine Textausgabe der Germania des Tacitus, der alle sonstigen Nachrichten aus des Tacitus Werken, die für deutsche Geschichte Bedeutung haben, angehängt sind (Gött. 1835). Die erste in Göttingen fertiggestellte Arbeit war der selbstbiographische Artikel für die Hessische Gelehrtengeschichte. Wie schon vor der Uebersiedelung nach Göttingen Jacob G. zu den fleißigsten Mitarbeitern der Gel. Anzeigen gehörte, so auch während seiner hiesigen Wirksamkeit. Ich zähle aus den Jahren 1830—37 etwa 40 Recensionen aus seiner Feder; jetzt in den Kl. Schriften Bd. 5 mit einem Nachtrage in Bd. 6 S. 418 ff. abgedruckt. Ueberwiegend gelten sie neuen philologischen Erscheinungen; aber auch rechtshistorische wie Gaupp lex Frisionum, historische wie Böhmers Kaiserregesten, litterarische und litterarhistorische wie Goethes Briefwechsel mit einem Kinde, Gervinus Geschichte der Nationallitteratur, Schriften allgemeinern Inhalts wie Savignys Wesen und Werth der deutschen Universitäten sind von ihm, zum größern Theil in ausführlichen Aufsätzen, die in selbständig angefügte Erörterungen auslaufen, besprochen. Auch andere litterarisch-kritische Organe, wie die Wiener Jahrbücher der Litteratur (Kl. Schr. 5 S. 203; 223), haben von ihm in der Göttinger Zeit wie zuvor Beiträge erhalten. — Von den Arbeiten Wilhelm Grimms sind während der Göttinger Wirksamkeit erschienen: das Hildebrandslied, mit dem er sich von der Casseler Bibliothek verabschiedete, indem er eins ihrer Kleinode lithographirt herausgab, dann Vridankes bescheidenheit (Gött. 1834), der Rosengarte (Gött. 1836) und endlich Ruolandes liet (Gött. 1838) mit der schönen Widmung an Blume »als ein Andenken an das Glück unseres Zusammenseins, an die heitere Geselligkeit und geistige Anregung eines Kreißes von Freunden, wie er sich nicht leicht wieder zusammen finden wird.«

So befremdend es einer um fünfzig Jahr jüngern, an die Beweglichkeit des modernen Lebens gewöhnten Generation klingen mag, die Uebersiedelung von Cassel nach Göttingen ist den Brüdern offenbar sehr schwer gefallen. An der von Großeltern und Eltern her ererbten hessischen Heimat mit innigster Liebe hangend, einem gelehrten Stilleben ergeben, hatten sie in Hessen zu leben und zu sterben gedacht, und waren nun durch widrige Verhältnisse, die ihnen keine Wahl ließen, in einem Alter, das an sich schon dem Versetztwerden nicht günstig, in einen fremden Boden verpflanzt und zu einer Thätigkeit berufen, die ungewohnte Ansprüche der Oeffentlichkeit an sie stellte und mit ihrer bisherigen Arbeits- und Lebensweise, wenn nicht zu brechen, doch gründliche Aenderung vorzunehmen zwang. Freunde der Natur, wie es beide Brüder waren — wenn man es

sonst nicht wüßte, die reiche Fülle der ihre Schriften durchziehenden Bilder würde es verrathen — vermißten sie die schöne Lage und Umgebung Cassels, und was Göttingen im Vergleich dazu bot, erschien ihnen wohl pappendeckeln. Der Göttinger Anfang brachte mancherlei häusliche Beschwerden. Wohnungsnöthe, die später manchen Ankömmling gequält haben, sind ihnen größtentheils erspart geblieben. Nach einer interimistischen unbequemen Wohnung, die sie nur bis Ostern 1830 inne hatten, bezogen sie das Quartier, das sie während der ganzen Zeit ihres Hierseins beibehalten haben. Von der Bibliothek kaum hundert Schritte getrennt, gehörte das Haus durch seine Lage an einer der breitesten und hellsten Straßen, seine geräumige innere Einrichtung und durch die Nähe des Wallspazierganges nach den damaligen Verhältnissen zu den bessern der Stadt. Ihr Hausgenosse war Otfried Müller, dessen Hörsaal, im Erdgeschoß belegen, auch von den Brüdern benutzt wurde. Das Haus gehörte zu den im vorigen Jahrhundert von dem Obercommissarius Grätzel, einem der verdientesten Industriellen, erbauten, war damals noch im Besitz seiner Erben und eines der alten Fabrikgebäude stand in dem jetzigen Garten. Das Haus ist gegenwärtig Eigenthum des Institutsvorstehers Schwerdfeger und mit einer Gedenktafel bezeichnet (Alleestraße 6).

War das an politischen Stürmen reiche Jahr 1830 an der Stadt ruhig vorübergezogen, so brachte der Anfang des folgenden die traurige Göttinger Revolution. So theilnahmvoll die Brüder die Casseler Septembertage begleiteten, so erhebend ihr Verlauf und ihre Nachwirkungen ihnen erschienen, so streng verurtheilten sie den in allem Betracht widerwärtigen Aufruhr, den Göttingen im Januar 1831 erlebte. Für Wilhelm hatte er die nachtheilige Folge, daß er sich gelegentlich einer auf der gefährdeten Bibliothek zugebrachten Nachtwache eine schwere Erkältung zuzog, die in eine Lungenentzündung ausartete und ihn dem Tode nahe brachte. Die Innigkeit des Verhältnisses zwischen den Brüdern hat kaum je schönern Ausdruck gefunden als in den Briefen Jacobs aus dieser Zeit der Gefahr oder wenn er in der Vorlesung stockend sich mit den Worten entschuldigt: »mein Bruder ist so krank«, und als andrerseits in Wilhelms Zeilen: »als Jacob das erstemal ins Auditorium ging, klaffte ich die Thüre und sah sein stilles und liebreiches Gesicht, das jedes Jahr milder wird, und wie er langsam die Treppe hinunter ging — das Bild behalte ich, so lange ich lebe, vor Augen.« Auch nach der ersten Krankheit ist Wilhelm in den folgenden Jahren noch wiederholt sehr leidend gewesen, und auch dieser Umstand mag dazu mitgewirkt haben, daß die Eingewöhnung in Göttingen so schwer fiel.

In den Briefen der ersten Jahre des Göttinger Aufenthalts begegnen

die Aeußerungen des Unmuths in großer Zahl. Das langweilige Göttingen ist eine der glimpflichsten Bezeichnungen. Als Jacob 1831 im Herbst von einer sechswöchentlichen Reise durch Süddeutschland zurückkehrte, »auf der Brücke zu Göttingen so gieng mein Leiden an«. Er nennt es einen dummen Streich, von Cassel weggegangen zu sein, wo er ein freier Mann gewesen, während er nun ein Knecht im Joche sei. Die Casseler Zeit erschien ihm wie dem Bruder jetzt und später nicht nur als der ruhigste und arbeitsamste, sondern auch als der frischeste und glücklichste Theil ihres Lebens. »In Cassel war, vom Kurfürsten allein abgesehen, alles für unsere Natur und Arbeiten günstiger.« Mit den stillen Spaziergängen Cassels, auf denen er über seine Arbeiten nachsann, vergleicht er den Göttinger Wall, wo ihn die Collegen überlaufen und in Gespräche ziehen, die ihn eigentlich nichts angehen. Man muß solche Ausrufe, wie sie andern nach ihm, die weniger am heimatlichen Boden hafteten, entfuhren, nicht allzu tragisch nehmen. Das Vertrauen, in dem er seinen Entschluß von Cassel fortzugehen faßte, ist nicht zu Schanden geworden. »Die nemlichen Sterne stehen am Himmel und Gott wird uns weiter helfen.« Gewinnend für den neuen Aufenthalt wirkte insbesondere der Kreis von Freunden, den die Brüder erwarben. Wissenschaftlichen Umgang hatten sie in Cassel ganz entbehrt; und über die Menschen dort lauten ihre Urtheile nach dem J. 1830 wenig günstig. Der Regent, der sich mit seiner von den Brüdern hochverehrten Mutter unfreundlich gestellt, war ihnen nicht holder als sein Vater, mochte auch ihr Schwager Hassenpflug sein Minister geworden sein. Grade seine Stellung zum Lande mochte dazu beitragen, daß ihnen die Verhältnisse und Menschen in Cassel unheimlich wurden. Dagegen befestigte sich der Zusammenhang mit einer Reihe von Göttinger Collegen von Jahr zu Jahr. Zu der alten Freundschaft mit Benecke kam der Verkehr mit O. Müller, Lücke, Blume, der Ostern 1831 nach Göttingen kam, um die Professur schon nach zwei Jahren mit einer Rathsstelle am Lübecker Oberappellationsgerichte zu vertauschen, mit Gervinus, der Ostern 1836 in den Göttinger Kreis eintrat und dessen Litteraturgeschichte Jacob G. das Jahr zuvor bei entschiedener Abweichung in vielem Einzelnen doch mit so vollem, fast enthusiastischem Lobe begrüßt hatte. Von den jüngern traten Kraut und Thöl und die sich hier zur akademischen Thätigkeit vorbereitenden Georg Beseler und K. von Richthofen näher. Insbesondere aber war es Dahlmann, mit dem sich nicht nur der anregendste wissenschaftliche Gedankenaustausch anknüpfte, sondern die Göttinger Jahre eine Freundschaft stifteten, die in dem Character beider Männer ihren festen Grund hatte. Dahlmanns, schrieb Wilhelm G., sind unsere nächsten und

besten Freunde und bei aller Achtung vor der übrigen Gesellschaft hier, weiß ich doch keine so reine und edelgesinnte Naturen. Und gewiß zumeist im Hinblick auf Dahlmann hat Jacob G. in der Schrift über seine Entlassung dem Göttinger Aufenthalte nachgerühmt, daß er, wenn auch nicht ohne Sehnsucht nach dem vorausgegangenen Stilleben, doch auch nicht ohne das frohe Bewußtsein unvorhergesehener, in der engern Gemeinschaft mit trefflichen Menschen beruhender Gewinne geblieben sei. — Auch an den Geschicken des Landes, in dem er wenn auch langsam Wurzel schlug, nahm er bald warmen Antheil. Die ständischen Verhandlungen, das Zustandekommen des Staatsgrundgesetzes, die Thätigkeit Dahlmanns in Hannover begleitete er voll Aufmerksamkeit und herzlichen Interesses. Der hannoverschen Zeitung, die damals unter Pertz' Leitung stehend sich der Mitarbeit hervorragender Männer wie Dahlmanns, Rehbergs u. a. zu erfreuen hatte, sandte er wie sein Bruder einzelne Beiträge; neben Recensionen einen Artikel über den Neubau der Göttinger Universität (Kl. Schr. 7. S. 533 ff.)

So sehr Jacob über die Sklaverei der Amtsgeschäfte klagte und ihre ungewohnte Last auf die Göttinger Stimmung drückte, so führten die Brüder doch jetzt ein sorgenfreieres Leben als ehedem. Bedürfnißlos wie sie waren, hätten sie zwar jederzeit ihr bescheidenes Theil Speise dahin zu nehmen sich begnügt; aber die bequemern Verhältnisse, in die sie mit der Uebersiedlung eintraten, ermöglichten doch manches, was ihnen sonst versagt war und zur Erweiterung ihres persönlichen und wissenschaftlichen Gesichtskreises gereichte. Wenn die Rechtsalterthümer den deutschen Begriff der Freiheit in die Freiheit der Bewegung setzen gelehrt haben, so hatten die Brüder in Cassel unendlich wenig davon. Urlaub wurde wiederholt versagt und wenn gewährt, nur sehr kärglich bemessen, so daß Jacob während der ganzen Zeit 1817 einmal bis Heidelberg und 1823 zu einer kurzen Reise ins Hessische gekommen war. Die Göttinger Sommerferien sind dagegen wiederholt zu größeren Fahrten benutzt worden, die allemal zugleich wissenschaftlichen Zwecken, dem Besuch von Bibliotheken und Archiven dienten. Im Sommer 1831 unternahm er eine Reise nach Süddeutschland und der Schweiz, arbeitete in Carlsruhe und Constanz, vorzugsweise im Interesse seiner Sammlung von Weisthümern und war so glücklich, über 100 Stück heimzubringen. Im nächsten Jahre war er in Darmstadt und Heidelberg, im Sommer 1834 in den Niederlanden und Belgien.

Die Stellung zu der vorgesetzten Behörde war stets eine durchaus befriedigende. Das Curatorium gab wiederholt zu erkennen, wie hoch es Grimms Bedeutung für die Universität schätzte. Im März 1833

beantragte es bei dem Könige ihm den Character eines Hofraths, eines hier zu Lande in der hannoverschen Zeit sehr angesehenen Titels, zu verleihen mit der Motivirung, daß er »wegen seiner gründlichen Gelehrsamkeit und seines tiefen Forschungsgeistes insonderheit in dem Fache der deutschen Sprache in allgemein hoher Achtung stehe und auch als academischer Lehrer mit Beifall aufgetreten sei,« und bei Mittheilung der unterm 7. Juni 1833 vollzogenen königlichen Ernennung bemerkte es, der König habe ihm damit einen Beweis der Anerkennung seiner ausgezeichneten Verdienste um die Wissenschaften ertheilen wollen. Seinen Dank sprach J. Grimm in folgenden Schreiben aus:

An Königliches Universitäts-Curatorium.

Ew. Excellenzen

wage ich es meinen ehrfurchtsvollen Dank auszudrücken für die mir durch das hohe Rescript vom 14 d. M. angekündigte Gnade Seiner Majestät des Königs. Mein eifrigstes Bestreben soll es sein, mich derselben durch treue Versehung der mir als Professor und Bibliothecar obliegenden Geschäfte würdig zu machen.

Indem ich mich dem unschätzbaren fernern Wohlwollen Ew. Excellenzen empfehle bin ich mit Verehrung

Ew. Excellenzen
unterthäniger Diener
Jacob Grimm.

Göttingen 22 Juni
1833.

Als er im J. 1835 zu seinen bisherigen Vorlesungen noch die über Diplomatik übernahm, wurde sein Gehalt um 100 Thaler erhöht, nachdem ihm schon die Berufung in die Examinationscommission eine ebenso große Zulage gebracht hatte. »Wir bemerken dabei«, heißt es in dem dem Könige überreichten Antrage des Curatoriums auf Gehaltserhöhung, »daß der Hofrath Grimm in jeder Hinsicht fortdauernd den Erwartungen entspricht, zu welchen der Umfang seiner rühmlichen Leistungen im Fache der deutschen Sprache und Poesie sowie der deutschen Rechtsalterthümer berechtigt«. Das klingt uns alles sehr förmlich und büreaumäßig. Mancherlei Züge zeigen aber, wie man auch persönlich an maßgebender Stelle warmes Interesse an dem großen Gelehrten nahm. Der Herzog von Cambridge, dessen Name noch immer in diesem Lande seinen guten Klang bewahrt hat, äußerte bei einem Besuch der Frankfurter Bibliothek im J. 1840 gegen Joh. Fr. Böhmer, Jacob Grimm, nach dessen Grammatik er gefragt hatte, sei ein vortrefflicher Mann, nur sei die Grammatik in ihrer dermaligen Redaction so weitläufig, daß man eine zusammen-

gezogenere wünschen müsse (Janssen, Böhmer 2. S. 309). Man darf also annehmen, daß der Vicekönig dem früher (S. 24) erwähnten Wunsche der Regierung seiner Zeit nicht fern gestanden hat. Dadurch gewinnt auch eine andere Nachricht, die ich sonst nicht zu controlliren vermag, an Glaubwürdigkeit, daß Jacob G. auf besondern Wunsch des Herzogs bis zur Berufung von Gervinus über deutsche Litteraturgeschichte gelesen habe (Gerland, Hessisches Gelehrtenlexikon 20 S. 293). Der Herzog und der Geh. Cabinetsrath Hoppenstedt waren wenige Wochen nach dem Januaraufstande in Göttingen anwesend, grade in den Tagen, als Wilhelm so gefährlich erkrankt war. Die jetzt erfolgende Ernennung Wilhelms zum außerordentlichen Professor (18. Februar) führte Jacob auf den wahrscheinlich durch jenen Besuch angeregten Gedanken zurück, daß die Wittwe im Todesfalle keine Versorgung gehabt haben würde.

Die hochgeachtete Stellung, welche Jacob G. unter den Collegen einnahm, gaben sie darin zu erkennen, daß sie ihn bald nach seinem Eintritte in die Corporation zum Mitgliede des Senats, der damals außer dem Prorector, dem Exprorector und den Mitgliedern der Gerichtsdeputation fünf aus der Mitte der Ordinarien besetzte Wahlstellen umfaßte, erkoren. Vom Herbst 1832 ab und dann wieder vom Herbst 1835 ab hat er jedesmal zwei Jahre lang das Amt eines Senators bekleidet. Mitglied der Societät der Wissenschaften ward er im Herbst 1830 zugleich mit seinem Bruder und Benecke. So fleißig er sich an den Gelehrten Anzeigen betheiligte, die Abhandlungen enthalten keine Arbeit von ihm, nach Waitz' Vermuthung (z. Gedächtniß an J. Grimm S. 20) eine Folge der damals noch geforderten lateinischen Form, die für die von ihm zu behandelnden Stoffe allerdings wenig getaugt hätte. Dagegen hat er sich wiederholt, auch als er nicht mehr Göttingen angehörte, der Aufgabe unterzogen, über Schriften, die zum Zweck der Preisbewerbung eingelaufen waren, zu referiren. 1837 bei der gelegentlich des Universitätsjubiläums stattfindenden Zuerkennung des Preises an Schaumann für seine Geschichte des niedersächsischen Volkes hatte Dahlmann als erster, J. Grimm als zweiter Berichterstatter fungirt. Für 1838 hatte die Societät die kritische Prüfung des chronicon Corbejense als Aufgabe gestellt. Den Preis erhielten Waitz und Siegfr. Hirsch; unter den andern zur Bewerbung eingereichten Schriften wurde der von Schaumann mit Anerkennung gedacht. In diesem Falle hatte Jacob G. das erste, Dahlmann das zweite Referat gehabt. (Augsb. Allg. Ztg. 1845 Beil. n. 128). Der aus Otfried Müllers Feder stammende Bericht (Gött. gel. Anz. 1838 S. 1042) sagt darüber: »unter den gegenwärtigen Verhältnissen erscheint es ange-

messen, zum Schluß es noch ausdrücklich zu bemerken, daß an diesem einstimmigen Urtheile der historisch-philologischen Classe die sämmtlichen ordentlichen Mitglieder der Classe, auch die entfernt lebenden, Antheil genommen haben. Die Classe betrachtet es als ihre Pflicht, es rühmend und dankbar anzuerkennen, wie sehr diese Mitglieder, deren persönliche Gegenwart der Societät entzogen ist, die ihr aber darum nicht minder angehören, die Angelegenheit auch als die ihrige betrachtet, mit welch bewunderswürdigem Eifer und Fleiß namentlich einer dieser Collegen die Preisschriften bis ins feinste Detail geprüft und das Problem selbst zum Gegenstand eigener eindringender Forschungen gemacht hat. Es ist gewiß ein erhebendes Gefühl, in den unruhigen Bewegungen der Zeit das Band dieser wissenschaftlichen Gesellschaft unzerrissen und ungelockert zu sehen.« Diese in einer Zeit schweren Druckes und unterwürfiger Gesinnung ihren Verfasser doppelt ehrenden Worten begleiten ein Gutachten, das in zahlreiche Einzelnheiten des Inhalts der Preisfrage eingehend auch heute noch Beachtung verdient. In ähnlich ausführlicher Weise hat Jacob G. im J. 1856, als zum erstenmal der Wedekindsche Preis für deutsche Geschichte zu ertheilen war, sich über die Bearbeitung der Chronik des Heinrich von Herford und diese selbst ausgelassen (Kl. Schr. 7, S. 366).

Welch jähes Ende das Göttinger Leben nahm, ist allbekannt und soll hier nicht wiederholt werden. Waitz, der in den Novembertagen 1837 hier verweilte, hat bezeugt, mit welcher Wärme sich Jacob G. für das durch das königliche Patent gekränkte Recht aussprach, und als Dahlmann ihm den Entwurf der Protestation vorlegte, schrieb er dazu: »Sehr nothwendig geschieht endlich, was schon vor vierzehn Tagen hätte geschehen sollen« (Springer 1 S. 432). Da er freimüthig einräumte, die Erklärung nicht nur unterschrieben, sondern auch andern mitgetheilt zu haben, so mußte er mit Dahlmann und Gervinus auf des Königs Befehl sofort das Land verlassen. Am 16. December schied er aus Göttingen, eben beschäftigt mit der Drucklegung der von ihm in Gemeinschaft mit Schmeller herausgegebenen Lateinischen Gedichte des 10. und 11. Jahrhunderts. Wilhelm verblieb noch bis zum October des nächsten Jahres in Göttingen. Jacob gieng nach Cassel, wo er in den Tagen vom 12.—16. Januar 1838 die Schrift: über meine Entlassung verfaßte.

Hatte er einst hoffnungsfreudig in den letzten Casseler Wochen geschrieben: Neujahr gehts über den Lutternberg hinein ins neue Leben, so war ihm nun das Andenken an Göttingen auf lange hin verleidet, und noch nach Jahren äußerte er in der Rückerinnerung an die Göttinger Zeit: hätte ich voraussehen können, was mir dort be-

vorstände, ich würde mich mit Händen und Füßen gesträubt, den geliebten Boden der Heimat nie verlassen haben. Milder schrieb Wilhelm schon im J. 1840: an Göttingen denke ich wie einer, der aus Amerika zurückgekehrt ist, und nicht glaubt, es je wieder zu sehen, aber die Erinnerung an das Gute, das ich dort erlebt habe, und an die Freunde, die ich zurückgelassen, bewahre ich im Herzen. — Auch Jacob ließ nicht von den Freunden, auch denen nicht, die wie Benecke seinen Schritt nicht gebilligt hatten. Als 1842 dessen fünfzigjähriges Dienstjubiläum gefeiert wurde, stellte er sich mit der Abhandlung ein: Frau Aventiure klopft an Beneckes Thür, wie er einige Jahre zuvor Hugo zum 10. Mai 1838 mit einer tabula gratulatoria begrüßt hatte. Mit manchen der Göttinger Freunde blieb er in Correspondenz. Den Gelehrten Anzeigen hat er in den ersten Jahren nach seinem Weggang noch eine Anzahl von Beiträgen zugesandt; dann taucht sein Name nur noch ganz vereinzelt auf: 1841, 1850, 1851 ein oder zweimal. Sein Todesjahr 1863 brachte eine Selbstanzeige des 4. Bandes der Weisthümer, die mit den schönen Worten anfängt: »Alle meine Arbeiten wandten sich auf das Vaterland, von dessen Boden sie auch ihre Kraft entnahmen, mir schwebte unbewust und bewust vor, daß es uns am sichersten führe und leite, daß wir ihm zuerst verpflichtet seien«. Derselbe Jahrgang enthält unterm 2. September eine Recension von Jonckbloets Forschungen über Reinhart. So sind hier noch einmal Reinhart und die Weisthümer vereinigt, die er selbst seine liebsten Bücher genannt hat. Der Aufsatz über Jonckbloet ist das letzte, was er überhaupt geschrieben hat. — Im Frühjahr 1855 wünschte sich Wilhelm G.: ich möchte wieder einmal ungesehen in Göttingen umher gehen, an unserm Haus vorbei über den Wall und auf die Marschwiesen, dort wird es noch so sein wie sonst. Zu Anfang September des Jahres haben die Brüder dann hier noch einmal einige Tage zugebracht.

So kurz die Göttinger Periode währen und so sehr sie durch amtliche Geschäfte beengt sein mochte, sie zeigt in ihren acht Jahren einen Reichthum der bedeutendsten Leistungen, wie keine gleiche vor oder nachher. Das Aufgeben des Casseler Stillebens hat der wissenschaftlichen Thätigkeit nicht nur keinen Eintrag gethan, sondern sie im Gegentheil gefördert. Beim Zurückblicken in beruhigterer Zeit hat Jacob G. von dem ehrenvollen, reichern Leben gesprochen, das ihm in Göttingen aufgegangen sei. Und hat das neue Leben, in das die Brüder eintraten, schwere Anforderungen an sie gestellt, so haben sie die schwerste sich selbst zum Ruhme und andern zur Nachachtung erfüllt. Es ist behauptet worden, die gewaltsame Beendigung der Göttinger Thätigkeit sei schuld daran, daß Jacob Grimm sein Haupt-

werk, die Grammatik nicht vollendet habe (Benfey, Gesch. der Sprachwiss. S. 447). Dem darf man entgegenhalten, daß derselbe äußere Anlaß das Unternehmen des deutschen Wörterbuchs ins Leben gerufen und daß Jacob Grimm in einer kurzen Selbstbiographie, die er in seinen letzten Lebensjahren geschrieben, von sich gesagt hat: was ihm in seinen äusseren Stellungen je Leids geschah, ist ihm stets zum Heil ausgeschlagen.

Als Anhang sollen hier einige bisher unbekannte Briefe von Jacob Grimm mitgetheilt werden, die, wenn auch nicht aus der Göttinger Zeit stammend, doch alle nach Göttingen gerichtet sind und überwiegend dortige Angelegenheiten und Persönlichkeiten betreffen. — Der erste Brief ist ein Begleitschreiben zu einer an die Redaction der Gel. Anz. übersandten Recension und ist den Papieren entnommen, welche Herr Amtsrichter Eichhorn zu Lennep aus dem Nachlaß seines Großvaters, Karl Friedrich Eichhorn, im Jahre 1882 der hiesigen Bibliothek geschenkt hat. Wer der Adressat des Briefes ist, ist nicht ganz sicher. Redacteur der Gel. Anz. war zu jener Zeit J. G. Eichhorn; auf ihn würde kaum die Anrede passen, noch weniger daß von seinem Sohne als Herrn Hofrath Eichhorn die Rede ist. Sollte Benecke schon damals bei der Redaction mitbetheiligt gewesen sein? Die Recension betrifft Wiardas Ausgabe der Willküren der Brockmänner (Berlin 1820), die, seit wir Richthofens Edition in den Friesischen Rechtsquellen S. 151—181 besitzen, ihre Bedeutung verloren hat. Jacob Grimms Recension ist in den Gött. gel. Anzeigen und auch sonst nicht zum Abdruck gekommen, vermuthlich weil K. F. Eichhorn nicht den juristischen Theil der Recension schrieb, der ihm zugedacht war und Grimms Besprechung der sprachlichen Seite des Buches vorangehen sollte, auch wohl nicht die Auslegung zu billigen vermochte, die J. Grimm für die §§ 3 und 15 vorschlug. Von den Andeutungen des Begleitbriefes abgesehen, ergiebt sich das als wahrscheinlich theils aus dem Umstande, daß Grimms Hs. sich unter den Papieren K. Fr. Eichhorns gefunden hat, theils aus der Beschaffenheit der Recension, die nach Voranschickung der damals und noch lange hin in den G. G. A. üblichen Ueberschriftsform beginnt: p. p. Uebrigens befriedigt u. s. w. Die Recension, die, mag auch manches darin irrig und durch spätere Forschung, eigene und fremde, überholt sein, schon wegen ihrer zahlreichen rechtshistorischen Ausdrücke und der fortdauernden Zweifelhaftigkeit mancher der behandelten Stellen von Interesse bleibt, folgt unten unter Auslassung des Druckfehlerverzeichnisses und der Berichtigungen kleinerer Uebersetzungsfehler.

Ganz anderer Art sind die unter 2—4 folgenden Briefe. Wissenschaftliche Dinge werden nur gestreift; persönliche Angelegenheiten, litterarische und politische Interessen überwiegen durchaus. Die Briefe, die ich aus dem Nachlasse des Adressaten zum Geschenk erhalten habe, sind Antworten auf Glückwünsche zum Geburtstage, die Kraut in alter Anhänglichkeit an Jacob G. gerichtet hatte. Nr. 2 berührt einen Streit mit (dem 1883 in Hannover verstorbenen Archivar) Schaumann aus dem J. 1845, dessen Acten in Erklärungen J. Grimms in der Augsb. Allg. Ztg. und Schaumanns in der (Leipziger) Deutschen Allgm. Ztg. vorliegen, und den jetzt wiederaufzugraben um so weniger

gerathen erscheint, als Jacob Grimm selbst in dem Briefe das zutreffendste Wort über solche Streitigkeiten gesprochen hat. Am meisten Interesse verdient der Brief Nr. 3, da er sich mit einer bisher wenig besprochenen Angelegenheit, der Zurückberufung der Sieben, beschäftigt. Aus den Mittheilungen, welche Stobbe in seinem Aufsatze über Albrecht gemacht hat (Sep.-Abdruck aus: Im neuen Reich 1876 Nr. 27 u. 28 S. 14), ergiebt sich, daß Albrecht bei den Verhandlungen mit der hannoverschen Regierung im J. 1848 eine Rehabilitation der Sieben zur Bedingung gemacht hat. Weber hat sich ganz den von Albrecht gethanen Schritten angeschlossen. Uebrigens verdient noch die kleine den Curatorialakten entnommene Notiz, die bei Stobbe nicht mitgetheilt ist, der Erwähnung, daß das vom 8. April 1848 datirte Rescript, worin der König die Eröffnung von Verhandlungen mit Albrecht und Weber genehmigt, mit den in den dicksten Federzügen geschriebenen Worten signirt ist:

gestattet aber
nicht höhere Besoldung
E. A.

In diese für den Character des Königs Ernst August ungemein bezeichnende Clausel mußte sich das Ministerium zunächst fügen. Ministerialvorstand Braun schrieb noch am nemlichen Tage an Regierungsrath Bunsen nach Frankfurt: es hat zwar vorerst die Bevorwortung nicht vermieden werden können, daß keine höhere Besoldung als die frühere gewährt werden solle, womit namentlich Albrecht wohl kaum wieder zu gewinnen sein möchte. Gleichwohl kann uns dies nicht abhalten, Einleitungen zu treffen in der Hoffnung, auch die letzten möglichen Hindernisse doch endlich zu überwinden.

Was das Aeußere der nachstehenden Briefe angeht, so zeigt Nr. 1 (Brief und Recension) deutsche Schrift und den Gebrauch kleiner und großer Anfangsbuchstaben wie oben S. 4 bemerkt ist, die übrigen dagegen sind lateinisch geschrieben und gebrauchen große Anfangsbuchstaben nur für die Eigennamen und den Eingang von Perioden.

1.

Cassel 11 Juni 1821.

Hochverehrter Freund

Hier erscheine ich mit einigen Recensionen, beschämt, daß es so spät und noch mehr, daß es so schlecht geschieht. Ich hatte vergebens gehofft an diesem Pfingstfest wenigstens Zeit zu einer Reinschrift zu gewinnen. Entschuldigen Sie also gütig die unanständigen Concepte, ich bin mit Arbeiten und Schreibereien allzu überhäuft. Die Beurtheilung von Wiarda ist noch ein monstrum, welches Hr. Hofrath Eichhorn vorher illuminieren muß; ich habe § 3 und 15 mit veränderter Wortauslegung den Sinn des Ganzen angreifen müssen und bin dieserhalb unsicher; geht meine Auslegung nicht an, so möge er sie ganz streichen. Das Gesetzbuch hat aber viele solcher bedenklichen Stellen, wo es auf Folge und Zusammenhang des Ganzen ankommt; ohne große Weitläuftigkeit durfte ich mich damit nicht befassen.

An Büchern erfolgt beiliegend: Hammarsköld zwei Bände 8°.[1]) Johnstone 1. Bd. 4°. (die Bemerkung, daß es ein Buchhändlerbetrug sey, dient zu meiner Rechtfertigung und taugt wohl nicht zur Insertion)[2]). Katterfeld Asalehre 8°. (scheint ganz unbedeutend und wird besser mit Stillschweigen übergangen).

Unbestellt sind die Anzeigen des Streits über nord. Mythologie und des Hans v. Schweinichen[3]). Sollte letztere für die gelehrte Zeitung ungeeignet seyn, so bemühen Sie Sich mit keiner Zurücksendung, sondern zerreißen den Bogen.

Mit bekannter Verehrung

gehorsamst
Grimm.

Berlin
b. Reimer 1820. . . Willküren der Brockmänner, eines freyen friesischen Volkes hg. übers. und erläutert von Dr. Tilemann Dothias Wiarda.

P. P.

Übrigens befriedigt der um altfriesische Sprache und ihre Quellen seit langer Zeit (1786 erschien das Wörterbuch) verdiente Verfasser in der Behandlung des Textes, den er in manchen schwierigen Stellen glücklich und mit gelehrtem Scharfsinn bearbeitet hat, doch nicht überall. Weder die Sprachformen sind wie sie seyn sollten critisch hergestellt und gleichförmig durchgeführt, noch ist die Übersetzung von Dunkelheiten und Misverständnissen frei. Zurückführung der in keineswegs correcten und alten Hss. überlieferten Formen auf die reine friesische Grammatik fordert niemand; dazu sind die Regeln noch nirgends aufgestellt und der Mangel älterer, authentischer Quellen wird sie oft nur muthmaßlich aufstellen lassen. Allein manche offenbare Unrichtigkeiten hätte der Herausg. abändern und ausgleichen sollen, zur Erleichterung derer, die ihre Augen von seiner Übersetzung ab auf die Lesarten des Originals wenden wollen. Zwei Handschriften (die einzigen) standen ihm zu Gebot, beide pergamentern und vor der Mitte des 14. Jahrhunderts geschrieben; eine (vom Jahr 1345) gehörte dem ehmahligen Syndicus Oelrichs zu Bremen, aus dessen Verlassenschaft sie der Herausg. erstand[4]): die zweite vermuthlich etwas ältere war von Wichts Eigenthum, dessen Erben sie mittheilten[5]). Diesen von Wichti-

---

1) Die Recension von Hammarsköld, Svenska Vitterheten ist G. G. A. 1821 Juni 30 St. 104 gedruckt (Kl. Schr. 4 S. 154).

2) Zwei Bücher von J. Johnstone von 1786: antiquitates Celto-Normannicae und Celto-Scandicae wurden in Kopenhagen 1815 neu herausgegeben, vermuthlich nur mit einem neuen Titelblatte ausgestattet.

3) Jene bezieht sich auf Schriften von Thorkel Baden und Finn Magnussen diese auf Büschings bekannte Ausg. des Hans von Schweinichen. Beide Besprechungen wurden kurz darauf im Juli 1821 abgedruckt. St. 113: jetzt Kl. Schr. 4 S. 156 und 158.

4) Jetzt in der Königl. Bibliothek zu Hannover (v. Richthofen. Untersuchgn. über fries. Rechtsgesch. 1 S. 721.

5) Die Hs. war zur Zeit der Herausgabe von Richthofens fries. Rechtsquellen

schen Codex legt Hr. Wiarda mit Recht zum Grunde und zeigt die wichtigsten Abweichungen des seinigen in den Anmerkungen an; wir hätten auch anscheinend unwichtige reichlicher beigebracht gewünscht. Außer wahrscheinlich bloßen Druckfehlern stört Lesen und Verständnis zumahl das Schwanken zwischen den im Fries. genau unterschiedenen Consonanten v und w; so lese man häufig redjeva statt redjewa, warve statt warwe, erve statt erwe, wîve st. wîwe, greve st. grewe, drîva st. drîwa u. s. w., wofür ebensohäufig das richtige, mit v gleichbedeutende u gesetzt worden ist. Wer kann von einem nom. wîf einen Dat. wîwe ableiten? und wer sich helfen, wenn die Verwechslung schwierigere Wörter trifft? Formen wie nachtum und nachten (noctibus) stehen neben einander (§ 89), ferner bald liudem bald liuden (hominibus) weil der Schreiber einmahl seinem Original, das andremahl seiner späteren Aussprache folgte; in dergl. Fällen hätte überall die ältere, vollere Form Vorzug verdient und so in unzähligen Kleinigkeiten. Niemand würde etwas dawider haben, wenn Unsicherheiten und Fehler der späteren Abschrift verständig beseitigt und getilgt worden wären. Des Schwankens zwischen ng und nfz; k und fz; ist kein Ende und verfehlte Stellen der Übersetzung zeigen, daß Hr. Wiarda selbst mit dem Verhältnis dieser Formen nicht genug vertraut war. Alle Dunkelheiten des Textes wird erst ein genaueres Studium der Rechtsformeln des altfries. und sächs. Rechts aufhellen können; wir begnügen uns dem Herausg. und seinen Nachfolgern einige Berichtigungen und Zweifel mitzutheilen, die sich doch mehr auf einzelne Ausdrücke beschränken, als auf die Fassung ganzer Sätze einlassen können, was hier zu weit führen würde. § 3 überträgt Hr. W. meide durch Geschenk und erklärt die ganze Stelle von Bestechung der Richter; es ist aber schon auffallend, daß eine lessa und mâra meide (minor et major) unterschieden und wenn es hernach heißt; thi clagere besvere sine meide gezwungen gedeutet wird: der Kläger beschwöre sein Geschenk, (das von ihm angegebene, womit die Gegenpartei bestochen hat!) Grammatisch vermag meide durchaus nicht das hochd. Miethe (donum) zu seyn, das fries. nur mêde heißen kann oder mide (Asegabuch pag. 13). Im Angelsächs. bedeutet aber mägdhe tribus, ordo, familia, generatio und wie däg (dies) sich zum fries. dei, scheint sich jenes zu meide zu verhalten. Auch die weiter im § 3 stehenden Ausdrücke berninge und sibbe lehren, daß hier wohl von einer Unfähigkeit des Richters wegen Verwandtschaft mit der Partei gehandelt wird? Indessen kehrt das Wort § 115 wieder, meythe und meyde geschrieben; daß es hier canon bedeute, scheint aus der ostfries. Gesch. 3, 601 hervorzugehen; diesen Begriff aus dem obigen ordo zu leiten (wie tribus und tributum nahe liegen) fällt nicht schwer und vielleicht bietet das Angelsächs. Parallelstellen dar. Vielleicht aber ist auch § 3 von solch einem canon die Rede, da ein Zusatz des Cod. O bei dem Ausdruck werna ebenfalls zwischen lessa und mâra unterscheidet. — Bei dem Ausdruck lidza gersfelle (§ 9. 189. 217. 219.) humi jacere und wie unser heutiges zu Boden liegen, sowohl wörtlich als abstract für: in Ruhe liegen, abgethan seyn — muß man nur wissen, daß gersfelle ein Adj. sey. Gras steht in der alten Sprache oft für Erde, Grund und Boden. — § 23 alsâ-dên heißt nicht also dann, sondern itafactus, sogethan; der Sinn der ganzen Phrase: so trete dasselbe Recht ein, vgl. den Schluß von § 21, wo und

(1840) verschollen (Rqu. S. XV), hat sich aber nachher in Oldenburg wiedergefunden (Unters. S. 72); Richthofen setzt sie ins Ende des 13. Jahrh.

anderwärts richtig übersetzt worden ist. — § 15 wird bemerkt: »das Wort hane oder hana bedeute bald den Beleidigten (Kläger) bald den Verbrecher (Schuldner)«. Vorerst kann es nur hâna (im Nom. u. allen Casibus Sing.) heißen, nie hâne (welches im vorliegenden § zweimahl zu bessern, da schwerlich ein Unterschied zwischen hâne, laedens und hâna, laesus stattfindet; las hier der oelrich. Cod. auch beidemahl e statt a?); dann aber ist die erste Bedeutung gültig, die zweite gerade entgegengesetzte unerweislich[1]), hâna ist der pauper, laesus, vilis (vgl. Otfried III 20, 231 hôno, afflictus und V 25, 118 unhôno, inculpatus). Nach welchem Sinn wäre im Text der Schuldige gemeint? Die ganze Vorschrift scheint zum Vortheil des Armen, vielleicht nicht nothwendig des Beschädigten; wir verstehen sie so: die Talemen dürfen keine Gerichtsgebühr, Sportel (brecma, Singul.) vom Armen binnen Monat und Tag nehmen oder verfallen selbst in zwei höchste Marken. Thun sies doch, so sollen die alsdann waltenden Radjeven den brecma wieder beitreiben und dem Armen in die Hand zurückstellen (withe-drîva und tha hâna (Dativ; der Nom. würde im Artikel thi fordern) withe inna tha hond); weder heißt withen Brüche entrichten, noch inna tha hond sogleich; withe driva kommt öfter vor, z. B. § 106. — § 27 hei nicht Heu, sondern Hag, angels. häg. — § 32 sumêdre[2]) nicht Schwester, sondern (frater) uterinus, isländ. sammoedra, d. i. von derselben Mutter. — § 45. 148 hôd up stêta den Hut aufstoßen. In der alten Sprache heißts: die Fahne, das Banner aufstoßen (Herzog Ernst 741. Tristan 11584. 6219. Wilh. 1, 81[b]); heutzutage sagt man freilich aufrichten, aufstecken, nur ist das nicht wörtlich übersetzt. Analog damit § 29. 30. 31 brond oder glêde onstâta, Brand oder Feuer anstoßen (Trist. 826 u. s. w.) — 3. 59 hexna mith wald and mith bi sette heye führt unsern Hg. wieder auf Heu; es wird aus der Geschichte der alten Zaubereien zu erläutern seyn und sich auf die sogenannten Ligaturen beziehen; mith bisette hei[3]), mit einem beigesetzten Stock, Zaun, von hei, angels. häg; der Bezauberung durch Heu geschieht nirgends Meldung. Möglich, daß selbst das vielgedeutete Wort Hexe (angels. hägtis) mit diesem häg zusammenhienge. — § 90. 107. 108 boldbreng Dat. boldbrensze, richtig Aussteuer, Mitgift gegeben, aber fälschlich mit bodel (buteil) zusammengestellt; es ist das ags. bold (domicilium) und bezeichnet das was die Frau dem Manne ins Haus bringt; vgl. §. 117. 118 utbelde. — § 132. 133 incorrect bald freta bald frethe geschrieben; wie wenn thi frêtha das althochdeutsche freideo (profugus gloss. hrab. 972[b] gl. jun. 184), der im folg. § urthingad heißt, und thi frethe (Friedensbruchgeld) ganz davon verschieden wäre? — § 152 gabbia soll sich in keinem germanischen Wörterbuche finden; Hr. W. schlage nur Lye-Manning und Biörn Haldorson auf, im sächs. und nord. heißt gabbjan, gabba deludere, illudere (und in den roman. Sprachen gabbar, gaber); es mag nur hier einen strengern Sinn haben, gerade wie höhnen ebenfalls verachten (mit Schmach bedecken, von der Wurzel Hohn, d. i. exiguitas, paupertas) bedeutete s. oben zu § 15. — § 183 hlenszene soll Länge heißen! nie hatte die Wurzel lang vorstehendes h. Man übersetze: Gelenke isl. hleckr, dän. lænke. — § 198 effivene verstehen wir auch nicht; henszebên aber ist, was in deut-

1) Vgl. dagegen Rechtsalterth. S. 622 und Richthofen, Fries. Wörterb. S. 796.

2) Die Lesart zweifelhaft, wahrscheinlich sundre Richthofen, Rqu. S. 154 und Wb. S. 1055.

3) Richthofen, Rqu. S. 159 N. 46. Grimm Mythol. S. 586. (1. Aufl.)

scher Mundart hengebein. — § 204 inrueze[1]) dêde, § 211 inruesza dêda schwerlich verstanden, aber der Lesart müßte man gewiß seyn; rathen läßt das § 211 folgende inur wach auf inurwesza, inwendige; mit renda, rend ist kein Zusammenhang möglich. — § 210 strichalt nicht: straucht, überhaupt kein Verbum, sondern ein Adj. und stric-halt, stricklahm bedeutend. — § 219 stehen bogere und selsketta neben einander, jenes richtig durch Bogenschütze, dieses unrichtig durch Gesellschaft (!) übertragen. Es heißt balistarius (Geschützmeister) und wird selvsketta zu lesen seyn, s. gl. doc. 234[b] selpscoz (balista). — Es wäre auch für das Studium der fries. Sprache zu wünschen, daß die übrigen ungedruckten (in der Vorrede zum Asegabuch verzeichneten) Landrechte herauskämen; sie könnten (ohne beigefügte Übersetzung und Noten, wodurch dergl. Unternehmungen sich in die Länge zu ziehen pflegen) wohl in einem Octavbande versammelt werden.

2.

Berlin 13 febr. 1848.

Lieber Kraut,

ich brächte Ihnen meinen Dank für Ihren treuwiederholten glückwunsch nicht so spät, wenn ich nicht verlegen gewesen wäre das zu beantworten, was Sie mir von Schaumann meldeten, und ich weiß immer noch nicht was ich schreiben soll. Sie trauen mir gewis zu daß ich versöhnlich, weichherzig und fähig bin den werth eines entgegenkommens noch mehr zu fühlen als zu erkennen. Allein ich wünsche ebenso sehr, daß die sache nunmehr liegen bleibe und Sch. nicht daran denke sie irgendwo wieder aufzurühren; er gehe von mir ungeirrt seine wege, gefällt ihm etwas in meinen arbeiten, soll mirs lieb sein, misfällt ihm daran, bin ich auch sehr getröstet. Die bücher sind so manigfalt und das leben ist so kurz, was sollen sich die menschen zanken?

Was Sie vom guten Lücke schreiben hat uns alle betroffen gemacht; so frühe abnahme seiner leiblichen kraft hätte ich nicht geglaubt. Vielleicht aber bessert oder hat er sich schon gebessert. Die Luise Eschwege höre ich ist jetzt dort, ihre schwester Linchen[2]) hält es seit dem herbst hier mit uns aus, wird aber nun bald wieder heimkehren.

Leider muß ich melden, daß Wilhelm schon 14 tage bettlägerig ist, an der grippe und dem was sich dazu gesellte, doch läßt es sich zur besserung an. Dortchen und ich wir grüßen Sie und die Ihrigen von ganzem

herzen

Jacob Grimm.

---

1) Jetzt kl. Schr. 7 S. 26.

2) Schwestertöchter der Frau Wilhelm Grimms.

Die Lübecker Verhandlungen werden diesmal schneller gedruckt und bald erscheinen[1]). Richthofen hat sein jüngstes kind verloren.

3.

Berlin 7 jan. 1849.

Lieber Kraut,

ich danke Ihnen herzlich für die mir zu meinem geburtstage erneuerte versicherung Ihrer freundschaft und anhänglichkeit. unter allen Göttingern sind Sie und Ritters uns am treusten geblieben.

Unsre Göttinger angelegenheit muste freilich bei den ereignissen des vorigen jahrs in den gedanken wieder vortreten. es hat sich die schwäche der menschlichen natur an ihr von neuem bewährt; statt die dargebotnen anlässe zu ergreifen und festzuhalten, hat man sie versäumt und sich bei voraussetzungen beruhigt, die sich bald als grundlos auswiesen. Ewald kam diesen herbst zu mir nach Frankfurt, nicht um unsre nationalversamlung, die er verachtete, zu besuchen sondern um bei Dahlmann und mir zu erkundigen, ob wir doch auch nach Göttingen zurückberufen seien? als ich ihm erklärte von einem solchen antrag nicht das geringste zu wissen, schien er befremdet. Welche vorbehalte Albrecht und Weber, bei der unterhandlung mit ihnen, gemacht haben, ist mir unbekannt, Weber war neulich hier, traf mich aber im bett und ich konnte ihn nicht befragen. In solchen dingen pflegt man seinen eignen maßstab auch an andere zu setzen. ich muß sagen, wenn mir ein solcher antrag gekommen wäre, würde ich nur unter der bedingung darauf eingegangen sein, daß allen meinen genossen dasselbe recht widerführe. denn hier handelt es sich weder um einen ruf im eigentlichen sinn, noch um die unwahrscheinlichkeit, daß die zurückgerufnen kommen werden, sondern bloß um zurücknahme einer ungerechten maßregel, erfolge nachher was da wolle. Diese restitution gebührte uns allen und unsrer ehre, das ministerium Stüve würde sich durch deren vorschlag in der öffentlichen meinung gefördert, nicht zurückgesetzt haben. Haben Ewald, Weber und Albrecht auf diese gebührende genugthuung nicht unterhandelt, so ist dadurch ihre eigne beträchtlich geschwächt, die unsrige der übrigbleibenden wiederum hintertrieben worden. Was für sie weiter noch versucht werden kann muß überlegt werden.

Es ist wahr, Hannoveraner und Kurhessen haben ihren fürsten

1) Verhandlungen der zweiten, zu Lübeck Ende September 1847 abgehaltenen Germanistenversammlung. Ueber das verspätete Erscheinen der Verhandlungen der Frankfurter Versammlung vom Jahre zuvor war lebhaft in Lübeck geklagt worden (Verhdlgn. S. 51).

voriges jahr große treue erwiesen, obgleich wenig andere deutsche völker solches unrecht erfahren hatten. mögen beide auch der sache der freiheit ebenso fest anhängen. unter den hannov. abgeordneten in Frankfurt (natürlich abzurechnen Freudentheil und Grumbrecht) habe ich aber auch wenig deutsche gesinnung, fast nur sinn für particularismus wahrgenommen; anders war es schon mit den Braunschweigern.

Sie sagen kein Wort von Lücke. die gefahr muß ihm doch ferner stehn, da sie seit einem jahr nicht vorgerückt ist. Auch melden Sie nichts von dem eindruck, den Ewald mit seiner frau gemacht hat, noch von dem erfolg seiner vorlesungen.

An Sie und die Ihrigen von uns insgesamt die freundschaftlichsten grüße

Jacob Grimm.

4.

Lieber Kraut,

Das neue jahr, wozu Sie mir in gewohnter weise mit alter freundschaft glück wünschen, hat es nicht schwer, wenn es sich ein wenig bessern will gegen das vorige unter aller critik schlechte und verderbliche. wir wollen den hofnungen, die ewig keimen, ihre zarten spitzen nicht abbrechen, die ganz verkrochen unter dem wuchernden unkraut des bösen stehn.

In diesen tagen sind Ihren augen die Oestreicher leiblich vorgetreten, als knabe sah ich sie oft durch unser ländchen ziehen, das jetzt schwerer von ihnen heimgesucht wurde. Der Schleswiger und Jütische feldzug hatte Deutsche aus allen gegenden einander näher gebracht; ihr zug gegen Hessen und Schleswig wird die herzen wieder feindlich trennen, und erinnerungen hinterlassen, die sich schwer verwischen. so gute mannszucht, höre ich, haben die Baiern in Hessen gehalten, daß einer ihrer officiere von seinen eignen soldaten in ein bettuch gewickelt und gestriegelt wurde. einen hessischen unterofficier, der an den Düppeler schanzen bairische soldaten gerettet und dafür einen bairischen orden empfangen hatte, haben sie in Hanau meuchlings angefallen, so daß er wahrscheinlich sterben muß.

Von was anderm.

Sie kommen nicht dazu mir etwas über meine vorrede zur lex Salica zu sagen, worin ich mich gegen Pardessus, Leo und Waitz erkläre[1]). Waitz ist so recensionsfertig, daß er sich ohne zweifel bald auch über diese sache vernehmen lassen wird.

Ich habe im letzten jahr fast nur kleinigkeiten zu stande ge-

1) Vorrede zu Merkels Ausgabe der lex Salica, die eine selbständige Abhandlung über die malbergische Glosse enthält (Berlin 1850).

bracht, untersuchungen über das verbrennen der leichen, und über den ursprung der sprache[1]), die Ihnen beide fern liegen. die academie zieht leicht auf nebenwege ab.

Sonst sind wir alle nur leidlich gesund und kaum vergeht eine woche, daß nicht eins zu klagen hätte. Ich soll aber herzlich grüssen, Sie und die Ihrigen von uns allen.

Von Stüve mag ich nichts mehr hören. wie manches von dem was man sonst hoch hielt ist abgefärbt worden und verschwunden.

Ihr

Jac. Grimm.

Berlin am 13 jan. 51.

einlage an Bertheau.

1) Jetzt kl. Schr. 2 S. 211 u. 1 S. 255.

Die optischen Eigenschaften sehr dünner Metallschichten.

Von

W. Voigt.

Beobachtungen über das optische Verhalten sehr dünner Metallschichten sind hauptsächlich von Herrn Quincke[1]) angestellt worden. Sie betreffen die elliptische Polarisation der reflectirten und durchgegangenen Wellen wenn lineärpolarisirtes Licht auffällt, d. h. also das Verhältniß der Amplituden und die Differenz der Verzögerungen der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Componenten, auch in gewissen Fällen diese Amplituden und Verzögerungen selbst. Hauptsächlich die auf letztere bezüglichen Resultate sind so absonderlich und scheinbar in sich widerspruchsvoll, daß sie noch bis in neuste Zeit als unerklärlich angesehen worden sind[2]).

Die in Betracht kommenden Hauptpunkte sind folgende.

Beobachtungen mit dem Jamin'schen Interferentialrefractor[3]) haben sicher gestellt, daß die Verzögerung, welche eine Welle beim Durchgang durch dünne Silber- und Goldblättchen erfährt, geringer ist, als die dem gleichen Wege in Luft entsprechende[4]). Hier-

1) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 119, p. 368; Bd. 120, p. 599, 1863; Bd. 129, p. 177, 1866; Bd. 142, p. 186, 1871.

2) S. z. B. Wüllner, Physik Bd. II, p. 557, 1883.

3) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 119, p. 382, Bd. 120, p. 602, 1863.

4) Daß einzelne Präparate sich anders verhielten, ist nach Herrn Wer-

aus schloß Hr. Quincke daß in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Cauchy'schen Theorie der Metallreflexion für diese beiden Metalle der Brechungscoefficient kleiner als Eins sein müßte. Aber an diesem Schluß wurde er später irre durch die Bemerkung, daß der Werth der beobachteten Differenz der Verzögerungen größer ist, als die ganze Verzögerung in Luft, woraus man auf einen »unmöglichen, nämlich negativen Brechungscoefficienten« schließen müßte [1]), wenn man nicht annehmen wollte, »daß beim Eintritt oder Austritt an der Grenze Metall-Luft eine Beschleunigung stattfände [2])«. Herr W. Wernicke [3]) hat sich später ebenfalls gegen die Folgerung erklärt, daß die Brechungsindices für Gold und Silber kleiner als Eins wären und aus Beobachtungen über die Absorption des Lichtes in Silberlamellen einen Werth des Brechungscoefficienten zwischen 3 und 5 geschlossen. Dieser Schluß ist zwar unrichtig, denn er basirt darauf, daß wenn bei normalem Durchgang durch eine Schicht die resultirende Amplitude proportional mit $e^{-\nu}$ ist, sie bei schiefem proportional mit $e^{-\frac{\nu}{\cos r}}$ wäre, wo r den Brechungswinkel bezeichnet, und dies ist eine durchaus willkürliche Annahme, aber jedenfalls ist die erwähnte Quincke'sche Beobachtung hinsichtlich ihrer Deutung noch bestritten und es scheint an der Zeit den Vorgang mit der Theorie zu verfolgen und womöglich aufzuklären.

Minder zweifelhaft ist ein andrer Punkt. Herr Quincke hat an keilförmigen sehr dünnen Metalllamellen sowohl im reflectirten als im durchgegangenen Lichte abwechselnde Maxima und Minima der Intensität beobachtet und erklärt sie für sog. Newton'sche Farbenstreifen [4]). Gegen diese Erklärung nimmt aber schon die bloße Betrachtung der Messungen an diesen Streifen ein, aus welchen Herr Quincke Brechungscoefficienten des Silbers zwischen 6 und 12 ableitet; denn dieselbe Farbe zeigte sich an verschiedenen Präparaten bei durchaus verschiedenen Dicken der Schicht, die bei Silber für das dritte Minimum von 0,036^{mm} bis 0,061^{mm} variirten. In der That hat später Herr Wernicke [5]) beobachtet, daß bei den chemisch niedergeschlagenen keilförmigen Metallschichten dickere und

---

nicke's werthvollen Untersuchungen nicht durch eine besondere Modification sondern ganz einfach durch ein nicht vollständig dichtes Gefüge des Niederschlags zu erklären. (Vgl. W. Wernicke; Pogg. Ann. Ergbd. 8, p. 78 u. f. 1878).

1) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 129, p. 187, 1866.
2) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 142, p. 186, 1871.
3) Wernicke, Pogg. Ann. Bd. 155, p. 94, 1875.
4) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 129, p. 185 u. f. 1866.
5) Wernicke, Fortschritte d. Phys. Bd. 27, p. 420. 1876.

dünnere Stellen mit einander abwechselnd auftreten, daß diese dickeren Stellen wegen geringerer Durchsichtigkeit mehr Licht reflectiren als die dünneren und demgemäß im reflectirten Licht die Maxima, im durchgelassenen die Minima hervorbringen. Da Herr Quincke in den 8 Jahren, die seit Herrn Wernicke's Mittheilungen verflossen sind, meines Wissens nicht geantwortet hat, so darf man wohl annehmen, daß er mit dieser Erklärung einverstanden ist. Für die Theorie bleibt also in dieser Hinsicht nur die Frage zu beantworten, ob und warum die Metalle die Newton'schen Farben nicht zu zeigen vermögen.

Endlich erscheint es wünschenswerth Gesetze abzuleiten, welche die Beobachtungen über die elliptische Polarisation des durchgegangenen Lichtes mit der Theorie zu vergleichen gestatten, soweit das bei der sehr unsichern Bestimmung der Dicke der benutzten Metallschichten und dem Mangel an sicheren Constanten für die Substanzen durchführbar ist.

Die früher von mir entwickelte Theorie der Absorption des Lichtes in isotropen Medien [1]) hat u. A. die Resultate ergeben, daß eine ebene Welle mit durchweg gleicher Amplitude sich nach dem Gesetze für die Verrückung fortpflanzt:

$$\text{1a.} \qquad u = Ae^{-\frac{xz}{\tau\omega_1}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega_1} + \vartheta_x\right),$$

wo ω_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und x der Absorptionsindex sich durch die Constanten A_1, M_1, b und c des Mediums ausdrücken gemäß den Gleichungen [2]):

$$\text{1b.} \qquad \begin{aligned} M_1\omega_1^2 &= A_1(1-x^2) + 2xc_1 \\ b_1\omega_1^2 &= 2xA_1 - c_1(1-x^2), \end{aligned}$$

worin $c_1 = c/\tau$, $b_1 = b.\tau$ und $2\pi\tau = T$, d. i. gleich der Schwingungsdauer ist.

Eine ebene Welle mit nicht constanter, sondern in gewisser Weise variirender Amplitude giebt die allgemeinere Lösung:

$$\text{2a.} \qquad u = Ae^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}} \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} + \vartheta_x\right),$$

worin gilt [3]):

$$\text{2b.} \qquad \begin{aligned} 1 - x^2 &= \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 \\ x &= \beta_1\gamma_1. \end{aligned}$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 6, p. 137. 1884.
2) l. c. p. 141.
3) l. c. p. 144.

Die Gesetze der Reflexion und Brechung, im Falle aus einem durchsichtigen Medium eine ebene Welle auf die ebene Grenze (gegeben durch $z = 0$) des absorbirenden auffällt, drückten sich bei Einführung der Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{A_1\gamma_1 + c_1\beta_1}{M\omega_1^2\gamma_1} & \delta_s &= \frac{c_1\gamma_1 - A_1\beta_1}{M\omega_1^2\gamma_1} \\ \sigma_p &= \frac{\gamma_1(M_1\gamma_1 + b_1\beta_1)}{M(\gamma_1^2+\beta_1^2)} & \delta_p &= \frac{\gamma_1(M_1\beta_1 - b_1\gamma_1)}{M(\gamma_1^2+\beta_1^2)} \end{aligned}\right| \quad 3.$$

bequem durch die Hülfswinkel μ_s, ν_s, μ_p, ν_p aus, die definirt waren durch[1]):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\mu_s &= \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1\sigma_s} & \operatorname{tg}\nu_s &= \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1\sigma_s} \\ \operatorname{tg}\mu_p &= \frac{\alpha_1\gamma\delta_p}{\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma\sigma_p} & \operatorname{tg}\nu_p &= \frac{\alpha_1\gamma\delta_p}{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma\sigma_p}. \end{aligned}\right| \quad 4.$$

Hierin ist α der Sinus, γ der Cosinus des Einfallswinkels, α_1 daraus bestimmt durch $\alpha:\alpha_1 = \omega:\omega_1$ worin ω, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im durchsichtigen Medium, durch dessen Constanten M und A gegeben ist:

$$M\omega^2 = A;$$

aus α_1 folgt dann nach (2b) β_1 und γ_1. Für die reflectirten (R) und gebrochenen (D) Amplituden senkrecht (s) und parallel (p) der Einfallsebene, welche als XZ Ebene gedacht ist, folgten dann die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} R_s' &= \frac{\sin\mu_s\cos(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s, & R_s'' &= -\frac{\sin\mu_s\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s \\ D_s' &= \frac{\cos\mu_s\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s, & D_s'' &= -\frac{\sin\mu_s\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}E_s \\ R_s^2 &= R_s'^2 + R_s''^2 = E_s^2\left(\frac{\sin\mu_s}{\sin\nu_s}\right)^2 \\ D_s^2 &= D_s'^2 + D_s''^2 = E_s^2\left(\frac{\sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin\nu_s}\right)^2, \end{aligned}\right| \quad 5.$$

wenn gesetzt ist die Verrückung für die einfallende Welle:

$$v_s = E_s\sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right),$$

für die reflectirte und gebrochene:

---

1) l. c. p. 147 und 151.

$$v_r = R'_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R''_s \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right)$$

$$v_1 = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left[D'_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + D''_s \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right];$$

ferner:

$$6.\quad \left|\begin{array}{ll} R'_p = \dfrac{\sin\mu_p \cos(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p, & R''_p = -\dfrac{\sin\mu_p \sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ D'_p = \dfrac{\gamma}{\gamma_1} \cdot \dfrac{\cos\mu_p \sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p, & D''_p = -\dfrac{\gamma}{\gamma_1} \cdot \dfrac{\sin\mu_p \sin(\mu_p + \nu_p)}{\sin\nu_p} E_p \\ R_p^2 = R_p'^2 + R_p''^2 = E_p^2 \left(\dfrac{\sin\mu_p}{\sin\nu_p}\right)^2 & \\ D_p^2 = D_p'^2 + D_p''^2 = E_p^2 \left(\dfrac{\gamma}{\gamma_1}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sin(\mu + \nu_p)}{\sin\nu_p}\right)^2, & \end{array}\right.$$

wenn ähnlich, wie oben, gesetzt ist für die Componente parallel der X-Axe:

$$u_e = E_p \gamma \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right)$$

$$u_r = R'_p \gamma \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R''_p \gamma \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right)$$

$$u_1 = e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}} \gamma_1 \left[D'_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + D''_p \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right]$$

und hieraus w_e, w_r, w_1 gemäß der Relation

$$7.\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.\right.$$

bestimmt wird.

Diese Formeln sind behufs Vergleichung mit den für eine Schicht eines beliebigen absorbirenden isotropen Mediums gültigen vorangestellt, zu deren Ableitung wir nunmehr übergehen.

Das durchsichtige Medium (0), in welchem sich die einfallende Welle befindet (z. B. Luft) erstrecke sich von $z = -\infty$ bis $z = 0$; auf dasselbe beziehen sich die Buchstaben ohne Index (z. B. α, γ, A, ω, u, v, w). Das zweite, absorbirende (1) erstrecke sich von $z = 0$ bis $z = l$; für dasselbe gelte der untere Index 1 (z. B. in α_1, γ_1, A_1, ω_1, u_1, v_1, w_1). Das dritte, wiederum durchsichtige (2) reiche von $z = l$ bis $z = \infty$ und die auf dasselbe bezüglichen Größen seien durch den obern Index $'$ ausgezeichnet (z. B. α', γ', A', ω', u', v', w').

I. Ich betrachte zuerst die Componenten normal zur Einfalls- d. h. der XZ-Ebene.

Im ersten Medium ist $v = v_e + v_r$,
im zweiten $v_1 = v_\delta + v_\varrho$,
im dritten $v' = v_d$, und zwar sei:

$$\left.\begin{aligned}
v_e &= E_s \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right)\\
v_r &= R_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right) + R_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right)\\
v_\delta &= e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left(\Delta_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + \Delta_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right)\\
v_\varrho &= e^{+\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\left(P_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\right) + P_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{x_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1}\right)\right)\\
v_d &= D_s' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\right) + D_s'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\right).
\end{aligned}\right| \quad 8.$$

Die Grenzbedingungen sind

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für } z = 0\text{: } \overline{v} = \overline{v_1},\ A\overline{\frac{\partial v}{\partial z}} = A_1\overline{\frac{\partial v_1}{\partial z}} + c\overline{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t}}\\
&\text{für } z = l\text{: } \overline{v_1} = \overline{v'},\ A_1\overline{\frac{\partial v_1}{\partial z}} + c\overline{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t}} = A'\overline{\frac{\partial v'}{\partial z}}.
\end{aligned}\right| \quad 9.$$

Die sehr complicirten Resultate dieser Gleichungen schreibe ich unter Anwendung der früheren und einiger neuer Hülfsgrößen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_s &= \frac{c_1\beta_1 + A_1\gamma_1}{\gamma_1 M\omega_1^2}, \qquad \delta_s = \frac{c_1\gamma_1 - A_1\beta_1}{\gamma_1 M\omega_1^2}\\
\operatorname{tg}\mu_s &= \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \quad \operatorname{tg}\nu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1\sigma_s}\\
\operatorname{tg}\mu_s' &= \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha'\gamma' + \alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \quad \operatorname{tg}\nu_s' = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha'\gamma' - \alpha_1\gamma_1\sigma_s}\\
&\frac{l\beta_1}{\tau\omega_1} = k, \quad \frac{l\gamma_1}{\tau\omega_1} = h.
\end{aligned}\right| \quad 10.$$

Man erhält für die beobachtbaren Größen R und D, deren Werthe ich allein mittheile:

$$
\begin{aligned}
\Pi_s R_s' &= E_s\big[(\sin^2\nu_s' e^{+2k} + \sin^2\mu_s' e^{-2k})\sin\mu_s\sin\nu_s\cos(\mu_s+\nu_s)\\
&\qquad -(\sin^2\nu_s+\sin^2\mu_s)\sin\mu_s'\sin\nu_s'\cos(h+\mu_s'+\nu_s')\big]\\
\Pi_s R_s'' &= -E_s\big[(\sin^2\nu_s' e^{+2k} - \sin^2\mu_s' e^{-2k})\sin\mu_s\sin\nu_s\sin(\mu_s+\nu_s)\\
&\qquad -(\sin^2\nu_s-\sin^2\mu_s)\sin\mu_s'\sin\nu_s'\sin(h+\mu_s'+\nu_s')\big]\\
\Pi_s D_s' &= -E_s\sin(\mu_s+\nu_s)\big[\sin\nu_s\sin\nu_s'(\sin\mu_s'\cos(h+\mu_s+\mu_s'+\nu_s') - \sin\nu_s'\cos(h+\mu_s))e^{+k}\\
&\qquad +\sin\mu_s\sin\mu_s'(\sin\nu_s'\cos(h+\nu_s+\mu_s'+\nu_s') - \sin\mu_s'\cos(h+\nu_s))e^{-k}\big]\\
\Pi_s D_s'' &= +E_s\sin(\mu_s+\nu_s)\big[\sin\nu_s\sin\nu_s'(\sin\mu_s'\sin(h+\mu_s+\mu_s'+\nu_s') - \sin\nu_s'\sin(h+\mu_s))e^{+k}\\
&\qquad -\sin\mu_s\sin\mu_s'(\sin\nu_s'\sin(h+\nu_s+\mu_s'+\nu_s') - \sin\mu_s'\sin(h+\nu_s))e^{-k}\big],
\end{aligned}
\tag{11.}
$$

darin ist:

$$
\begin{aligned}
\Pi_s &= \sin^2\nu_s\sin^2\nu_s' e^{+2k} + \sin^2\mu_s\sin^2\mu_s' e^{-2k}\\
&\qquad -2\sin\mu_s\sin\nu_s\sin\mu_s'\sin\nu_s'\cos(2h+\mu_s+\nu_s+\mu_s'+\nu_s')
\end{aligned}
$$

II. Ebenso nun die Componenten parallel der Einfallsebene. Es sei wiederum:

$$
\begin{aligned}
u &= \gamma(r_e+r_r), \qquad w = -\alpha(r_e-r_r)\\
r_e &= E_p\sin\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha x+\gamma z}{\omega}\Big)\\
r_r &= R_p'\sin\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha x-\gamma z}{\omega}\Big) + R_p''\cos\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha x-\gamma z}{\omega}\Big)\\
u_1 &= u_\delta + u_\varrho, \qquad w_1 = w_\delta + w_\varrho\\
u_\delta &= e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\gamma_1\Big(\Delta_p'\sin\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x+\gamma_1 z}{\omega_1}\Big) + \Delta_p''\cos\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x+\gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\Big)\\
u_\varrho &= e^{+\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\gamma_1\Big(P_p'\sin\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x-\gamma_1 z}{\omega_1}\Big) + P_p''\cos\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x-\gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\Big)\\
w_\delta &= -e^{-\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2}\Big((\Delta_p'\gamma_1-\Delta_p''\beta_1)\sin\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x+\gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\\
&\qquad +(\Delta_p'\beta_1+\Delta_p''\gamma_1)\cos\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x+\gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\Big)\\
w_\varrho &= e^{+\frac{\beta_1 z}{\tau\omega_1}}\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2}\Big((P_p'\gamma_1-P_p''\beta_1)\sin\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x-\gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\\
&\qquad +(P_p'\beta_1+P_p''\gamma_1)\cos\frac{1}{\tau}\Big(t-\frac{\alpha_1 x-\gamma_1 z}{\omega_1}\Big)\Big)
\end{aligned}
\tag{12.}
$$

$$u' = \gamma' r_d, \qquad w' = -\alpha' r_d$$

$$r_d = D_p' \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\right) + D_p'' \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\alpha' x + \gamma'(z-l)}{\omega'}\right). \qquad 12.$$

Die Grenzbedingungen sind

$$\text{für } z = 0: \quad u = u_1, \qquad Mw = M_1 w_1 - b\tau^2 \frac{\partial w_1}{\partial t}$$

$$\text{für } z = l: \quad u_1 = u', \qquad M_1 w_1 - b\tau^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} = M' w'. \qquad 13.$$

Durch Einsetzen von $M = M_1 = M'$ und $b = 0$ giebt dies die gewöhnliche Neumannsche Form, die bei der nummerischen Berechnung unten vorausgesetzt ist.

Folgende Abkürzungen führe ich wiederum ein:

$$\frac{\gamma_1(M_1\gamma_1 + b_1\beta_1)}{M(\gamma_1^2+\beta_1^2)} = \sigma_p, \qquad \frac{\gamma_1(M_1\beta_1 - b_1\gamma_1)}{M(\gamma_1^2+\beta_1^2)} = \delta_p$$

$$\operatorname{tg}\mu_p = \frac{\alpha_1\gamma\,\delta_p}{\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma\sigma_p}, \quad \operatorname{tg}\nu_p = \frac{\alpha_1\gamma\,\delta_p}{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma\sigma_p}$$

$$\operatorname{tg}\mu_p' = \frac{\alpha_1\gamma'\delta_p}{\alpha'\gamma_1 + \alpha_1\gamma'\sigma_p}, \quad \operatorname{tg}\nu_p' = \frac{\alpha_1\gamma'\delta_p}{\alpha'\gamma_1 - \alpha_1\gamma'\sigma_p} \qquad 14.$$

$$\frac{l\beta_1}{\tau\omega_1} = k, \qquad \frac{l\gamma_1}{\tau\omega_1} = h.$$

Dann schreiben sich die Resultate:

$$\Pi_p R_p' = E_p\left[\left(\sin^2\nu_p' e^{+2k} + \sin^2\mu_p' e^{-2k}\right)\sin\mu_p\sin\nu_p\cos(\mu_p+\nu_p)\right.$$
$$\left. - (\sin^2\nu_p + \sin^2\mu_p)\sin\mu_p'\sin\nu_p'\cos(2h+\mu_p'+\nu_p')\right]$$

$$\Pi_p R_p'' = -E_p\left[\left(\sin^2\nu_p' e^{+2k} - \sin^2\mu_p' e^{-2k}\right)\sin\mu_p\sin\nu_p\sin(\mu_p+\nu_p)\right.$$
$$\left. - (\sin^2\nu_p - \sin^2\mu_p)\sin\mu_p'\sin\nu_p'\sin(2h+\mu_p'+\nu_p')\right]$$

$$\Pi_p D_p' = -E_p\frac{\gamma}{\gamma'}\sin(\mu_p+\nu_p)\left[\sin\nu_p\sin\nu_p'\left(\sin\mu_p'\cos(h+\mu_p+\mu_p'+\nu_p') - \sin\nu_p'\cos(h+\mu_p)\right)e^{+k}\right.$$
$$\left. + \sin\mu_p\sin\mu_p'\left(\sin\nu_p'\cos(h+\nu_p+\mu_p'+\nu_p') - \sin\mu_p'\cos(h+\nu_p')\right)e^{-k}\right] \qquad 15.$$

$$\Pi_p D_p'' = E_p\frac{\gamma}{\gamma'}\sin(\mu_p+\nu_p)\left[\sin\nu_p\sin\nu_p'\left(\sin\mu_p'\sin(h+\mu_p+\mu_p'+\nu_p') - \sin\nu_p'\sin(h+\mu_p)\right)e^{+k}\right.$$
$$\left. - \sin\mu_p\sin\mu_p'\left(\sin\nu_p'\sin(h+\nu_p+\mu_p'+\nu_p') - \sin\mu_p'\sin(h+\nu_p)\right)e^{-k}\right]$$

$$\Pi_p = \sin^2\nu_p\sin^2\nu_p' e^{+2k} + \sin^2\mu_p\sin^2\mu_p' e^{-2k}$$
$$- 2\sin\mu_p\sin\nu_p\sin\mu_p'\sin\nu_p'\cos(2h+\mu_p+\nu_p+\mu_p'+\nu_p').$$

Die Formeln (11) und (15) enthalten die Lösung des gestellten Problems; sie gehen für verschwindende Absorption in die früher von mir für eine Schicht einer durchsichtigen Substanz aufgestellten über [1]).

III. Zur Vergleichung mit den an Metallschichten angestellten Beobachtungen bilden wir zunächst die Werthe der Intensitäten beider Componenten des reflectirten Lichtes; betrachtet man die einfallenden als durch E_s^2 und E_p^2 gegeben, so sind jene gemessen durch:

$$16.\quad \begin{aligned} R^2 &= R'^2 + R''^2 \\ &= E^2 \frac{(\sin\mu\sin\nu' e^{+k} - \sin\mu'\sin\nu e^{-k})^2 + 4\sin\mu\sin\nu\sin\mu'\sin\nu'\sin^2\tfrac{1}{2}(2h + (\mu'+\nu') - (\mu+\nu))}{(\sin\nu\sin\nu' e^{+k} - \sin\mu\sin\mu' e^{-k})^2 + 4\sin\mu\sin\nu\sin\mu'\sin\nu'\sin^2\tfrac{1}{2}(2h + (\mu'+\nu') + (\mu+\nu))} \end{aligned}$$

wo nun rechts und links, jenachdem es sich um Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt handelt, die Indices p oder s anzubringen sind.

Diese Formel zeigt — was an sich einleuchtend ist — daß die an einer Metallschicht reflectirten Intensitäten in derselben Weise mit wachsender Dicke der Schicht abwechselnd Maxima und Minima erreichen wie die an einer dünnen Schicht einer durchsichtigen Substanz reflectirten, daß also eine keilförmige Schicht eines Metalles das Newtonsche Phänomen zeigen müßte. Indessen ist nicht nothwendig, daß dasselbe in einer für die Beobachtung merklichen Intensität eintritt, denn das mit der Dicke der Schicht periodische Glied erhält in Zähler und Nenner den Factor e^{-2k}, wenn man den Ausdruck nach Potenzen dieser Größe ordnet, wird also, da $k = 2\pi l\beta_1/\lambda_1$ ist, mit wachsender Dicke schnell an Einfluß verlieren.

Die reflectirten Intensitäten durchlaufen nahezu eine volle Periode während h d. h. $2\pi l\gamma_1/\lambda_1$ um π d. h. l um $\lambda_1/2\gamma_1$ wächst; ist also die Absorption der Substanz so stark daß e^{-2k} unmerklich ist noch bevor l um $\lambda_1/2\gamma_1$ d. h. $2k$ um $2\pi\beta_1/\gamma_1$ gewachsen ist, so wird eine keilförmige Schicht von derselben keinen einzigen dunkeln oder hellen Interferenzstreifen zeigen. Diese Voraussetzung ist aber bei den Metallen, die bis jetzt in dünnen Schichten beobachtet sind, nämlich Gold und Silber, in vollem Maaße erfüllt. Die Größe β_1 fällt bei normalen Einfall mit dem Absorptionsindex $\varkappa$ zusammen und ist bei schiefem Einfall von derselben Ordnung, da γ_1 nicht sehr von 1 ver-

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 22, p. 226, 1884.

schieden ist, $\varkappa$ aber hat nach den früher berechneten Quincke'schen Beobachtungen[1]) für Gold den Werth 8,8 für Silber 15,0 — $2\pi\beta_1/\gamma_1$ ist also resp. von der Ordnung 54 und 93 und daher eine keilförmige Schicht aus diesen Substanzen lange vor dem ersten Minimum als undurchsichtig zu betrachten. Dies ist in Uebereinstimmung mit den oben besprochenen Beobachtungen Wernicke's[2]) und den Folgerungen Jochmann's aus der Cauchy'schen Theorie der Metallreflexion[3]).

Um eine Vorstellung von dem Verlauf der durch (16) bestimmten Werthe zu geben werde ich die reflectirten Amplituden für verschieden dicke Schichten von Silber, welches auf Glas niedergeschlagen ist, und für den Einfallswinkel 72° berechnen, weil Beobachtungen von Herrn Quincke vorhanden sind, welche einen Theil der Resultate zu vergleichen gestatten. Da sich aus diesen Beobachtungen aber nicht die den betreffenden Silberplatten entsprechenden Constanten n und $\varkappa$ berechnen lassen, muß ich diejenigen Werthe derselben benutzen, die ich früher aus anderen Quincke'schen Beobachtungen abgeleitet habe[4]), nämlich

$$\varkappa = 15{,}0 \qquad n = 0{,}23,$$

obgleich dadurch die Vergleichung an Sicherheit verliert. Den Brechungscoefficienten der benutzten Glasplatten giebt Herr Quincke selbst zu 1,538 an[5]).

Die in (10) und (14) definirten Hülfsgrößen σ, δ, μ und ν erhalten dadurch folgende Werthe:

$$\sigma_s = 0{,}00505, \quad \delta_s = 0{,}0710, \quad \sigma_p = 0{,}00384, \quad \delta_p = 0{,}0617$$
$$\mu_s = 42^0\ 5', \quad \nu_s = 47^0 50', \quad \mu_p = 4^0 53', \quad \nu_p = 4^0 56'$$
$$\mu_s' = 29^0 12', \quad \nu_s' = 31^0 18', \quad \mu_p' = 18^0 10', \quad \nu_s' = 18^0 53'.$$

Nimmt man nun die Dicke l der Silberschicht in Tausendtel-Millimetern successive gleich:

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 6, p. 162 u. 168, 1884.
2) Wernicke, Fortschritte d. Phys. 27, p. 420. 1876.
3) Jochmann, Pogg. Ann. Ergb. V, p. 620, 1871.
4) W. Voigt l. c. p. 162.
5) Diese wie die folgenden Berechnungen sind sämmtlich mit dem vortrefflichen Mannheimerschen Rechenschieber angestellt, also die Resultate der complicirten Operationen in der dritten Ziffer nicht mehr sicher. Diese Genauigkeit genügt indeß für den vorliegenden Zweck durchaus.

$$l = \quad 0 \quad 0{,}014 \; 0{,}024 \; 0{,}040 \; 0{,}047 \; 0{,}055 \; 0{,}067 \; 0{,}075 \quad \infty,$$

so erhält man die reflectirten Intensitäten $\mathfrak{R}_s^2$ und $\mathfrak{R}_p^2$, welche der einfallenden Intensität Eins entsprechen:

$$\mathfrak{R}_s^2 = 0{,}060 \; 0{,}224 \; 0{,}433 \; 0{,}667 \; 0{,}730 \; 0{,}768 \; 0{,}796 \; 0{,}805 \; 0{,}818$$

$$\mathfrak{R}_p^2 = 0{,}355 \; 0{,}738 \; 0{,}879 \; 0{,}950 \; 0{,}963 \; 0{,}969 \; 0{,}977 \; 0{,}978 \; 0{,}980.$$

Construirt man diese Werthe, so erhält man zwei stetig ansteigende Curven, die in ihrem ganzen Verlauf weder Maximum noch Minimum zeigen.

Ueber diese Werthe sind nun zwar keine Beobachtungsresultate vorhanden, aber das Verhältniß der Amplituden:

$$\rho_r = \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \operatorname{tg} \psi_r$$

ist von Herrn Quincke für die angegebenen Werthe der Schichtdicke bestimmt[1])

Die obigen Zahlen geben:

$$\rho_r = 0{,}412 \quad 0{,}551 \quad 0{,}702 \; 0{,}838 \quad 0{,}870 \; 0{,}890 \; 0{,}903 \quad 0{,}908 \; 0{,}914$$

$$\psi_r = 22^0 25' \; 28^0 50' \; 35^0 5' \; 39^0 58' \; 41^0 0' \; 41^0 40' \; 42^0 5' \; 42^0 10' \; 42^0 30'$$

Herr Quincke giebt als vollständigste Beobachtungsreihe (LIV):

$$\psi_r = \quad - \quad 21^0 1' \; 33^0 58' \; 38^0 32' \; 42^0 38' \; 43^0 57' \; 42^0 43' \; 43^0 18' \quad -$$

Der erste beobachtete Zahlwerth ist besonders unsicher, andere unvollständigere Beobachtungsreihen haben statt seiner Werthe bis 32^0 ergeben. Die mittleren Zahlen beziehen sich auf Einfallswinkel, die etwas größer als 72^0 sind und sind daher etwas zu klein berechnet. Die Uebereinstimmung ist also eine sehr bedeutende und kann als eine neue Bestätigung der Theorie gelten. —

Sind, wie bisher, die einfallenden Intensitäten durch E_s^2 und E_p^2 gemessen, so sind wegen der Verschiedenheit des ersten und dritten Mediums die Intensitäten der durchgegangenen Wellen nicht durch $D_s^2 = D_s'^2 + D_s''^2$ und $D_p^2 = D_p'^2 + D_p''^2$ gemessen, sondern durch $\alpha'\gamma'/\alpha\gamma \, D_s^2 = (D_s)^2$ und $\alpha'\gamma'/\alpha\gamma \, D_p^2 = (D_p)^2$. Für diese erhält man nach einigen Reductionen die Form:

---

1) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 129 p. 214 u. 215.

$$(D)^2 = E^2 \frac{\sin(\mu+\nu)\sin(\mu'+\nu')[\sin(\nu-\mu)\sin(\nu'-\mu')+4\sin\mu\sin\nu\sin\nu'\sin\mu']}{(\sin\nu\sin\nu' e^{+k}-\sin\mu\sin\mu' e^{-k})^2+4\sin\mu\sin\nu\sin\mu'\sin\nu'\sin^2\frac{1}{2}(2h+\mu'+\nu'+\mu+\nu)} \quad 17.$$

Hierin ist, jenachdem es sich um Licht parallel oder senkrecht der Einfallsebene polarisirt handelt, auf beiden Seiten der Index p oder s anzufügen.

Man erkennt aus der letzten Formel, daß die Schwächung durch die absorbirende Lamelle (die sowohl in Reflexion als Absorption begründet ist) genau die gleiche ist, ob das Licht die drei Medien in der Reihenfolge 0, 1, 2 oder 2, 1, 0 durchläuft.

Fragen wir nach den Umständen, welche das Unmerklichwerden von $(D_s)^2$ und $(D_p)^2$ bedingen, so können wir uns im Nenner auf das größte Glied beschränken und schreiben:

$$(D)^2 = E^2 \frac{\sin(\mu+\nu)\sin(\mu'+\nu')}{\sin^2\nu\,\sin^2\nu'}[\sin(\nu-\mu)\sin(\nu'-\mu')+4\sin\nu\sin\mu\sin\nu'\sin\mu']e^{-2k} \quad 18.$$

Die Größenordnung dieses Ausdrucks hängt in erster Linie von der Exponentialgröße ab; ihr Exponent $2k$ ist $= 4\pi l\beta_1/\lambda_1 = 4\pi l\varkappa/\lambda_1\gamma_1$, also für $(D_s)^2$ und $(D_p)^2$ gleich und von dem bei normalem Durchgang, d. h. von $4\pi l\varkappa/\lambda_1$, nur durch den Nenner γ_1 verschieden. Die Größe γ_1 bestimmt sich aus (2b), sie ist also keineswegs, wie Herr Wernicke angenommen hat, mit dem Cosinus des Brechungswinkels d. h. $\sqrt{1-\alpha^2/n^2}$ identisch; demgemäß sind alle Folgerungen, welche Herr Wernicke aus seinen Absorptionsbeobachtungen bei normaler und schiefer Incidenz zieht, hinfällig [1]). Daß diese Beobachtungen mit meiner Theorie übereinstimmen habe ich schon früher gelegentlich dargethan [2]). Vorstehender Formeln bedarf es zu der Berechnung dieser Beobachtungen nicht, weil sie so angestellt sind, daß die Schwächung durch die Reflexion an den beiden Grenzen der Metallschicht, welche durch den complicirten Factor der Exponentialgröße gegeben ist, auf die Resultate nicht influirt.

Dieser Factor bestimmt in zweiter Linie die Größe von $(D_s)^2$ und $(D_p)^2$ und ist für senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisirtes Licht verschieden. Für die Beobachtung bietet sich besonders das Verhältniß der beiden Amplituden $(D_s)/(D_p) = \rho_d$, welches man direct erhält, wenn man das von einfallendem lineärpolarisirtem herrührende, elliptisch polarisirte durchgehende Licht mit Hülfe eines Compensators wieder lineär macht. Meist wählt man das Azimuth des einfallenden Lichtes $= 45°$, also $E_s = E_p$ und hat dann, wenn

1) S. oben p. 45.
2) W. Voigt l. c. p. 163.

man sich wiederum wie in Formel (18.) auf das höchste Glied beschränkt, für dies Verhältniß:

$$19.\quad \left|\begin{array}{l} \rho_d^2 = \left(\frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p}\right)^2 = \left(\frac{\sin\nu_p \sin\nu_p'}{\sin\nu_s \sin\nu_s'}\right)^2 \frac{\sin(\mu_s+\nu_s)\sin(\mu_s'+\nu_s')}{\sin(\mu_p+\nu_p)\sin(\mu_p'+\nu_p')} \\ \quad \cdot \frac{\sin(\nu_s-\mu_s)\sin(\nu_s'-\mu_s') + 4\sin\nu_s\sin\mu_s\sin\nu_s'\sin\mu_s'}{\sin(\nu_p-\mu_p)\sin(\nu_p'-\mu_p') + 4\sin\nu_p\sin\mu_p\sin\nu_p'\sin\mu_p'}. \end{array}\right.$$

Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß, weil man nicht im 3. Medium selbst beobachten kann, wenn dasselbe vom ersten (Luft) verschieden ist, rechts noch ein Factor wegen des Uebergangs durch die letzte Grenze hinzuzufügen ist.

Ist die Metallschicht beiderseits direct mit Luft in Berührung, so hat man einfacher:

$$20.\quad \left|\ \rho_d = \frac{\sin^2\nu_p \sin(\mu_s+\nu_s)}{\sin^2\nu_s \sin(\mu_p+\nu_p)} \sqrt{\frac{\sin^2(\nu_s-\mu_s) + 4\sin^2\nu_s \sin^2\mu}{\sin^2(\nu_p-\mu_p) + 4\sin^2\nu_p \sin^2\mu_p}}\ .\right.$$

Nach dieser Formel wären z. B. die Quincke'schen Beobachtungen über die elliptische Polarisation des durch ein Goldblättchen gegangenen Lichtes zu berechnen, wenn man annehmen dürfte, daß letzteres so dick gewesen ist, daß die von uns gemachte Vernachlässigung zulässig ist; wäre sie es nicht, so müßten die berechneten Werthe größer als die beobachteten ausfallen. Ich gebe im Folgenden einige darauf bezügliche Zahlwerthe an, muß aber freilich, da Herrn Quincke's Beobachtungen die Constanten n und $\varkappa$ für das benutzte Goldblättchen nicht abzuleiten gestatten, die bei einem ganz andern Präparat früher erhaltenen [1]) n, $\varkappa$ und μ, ν anwenden, wodurch natürlich die Sicherheit der Vergleichung leidet.

Herrn Quincke's Beobachtungen [2]) geben für die Einfallswinkel

$$\varphi = \quad 0^0 \qquad 25^0 \qquad 45^0 \qquad 65^0$$

durch Interpolation die Werthe:

$$\rho_d = 1{,}017 \qquad 1{,}137 \qquad 1{,}530 \qquad 2{,}268;$$

obige Formel hingegen ergiebt:

$$\rho_d = 1{,}000 \qquad 1{,}159 \qquad 1{,}640 \qquad 2{,}951;$$

die beobachteten Werthe laufen den berechneten parallel, sind aber kleiner, das Blättchen ist also so dünn gewesen, daß die gemachte Vernachlässigung nicht zulässig ist; indeß ist eine Benutzung der strengen Formel unmöglich, da Herr Quincke die Dicke des benutz-

1) W. Voigt, l. c. p. 168.
2) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 119, p. 373; 1863.

ten Blättchens nicht angiebt. Ein ganz ähnliches Resultat erhält man wenn man die Beobachtungen Herrn Quincke's an Licht, welches durch eine auf Glas niedergeschlagene Silberschicht hindurchgegangen ist[1]) nach der angenäherten Formel (19.) berechnet.

Die strenge Formel (17.) für die durchgegangenen Amplituden habe ich wiederum nur für die oben (p. 53) schon erwähnten Quincke'schen Beobachtungen berechnet, welche sich auf den Durchgang des Lichtes durch ein System verschieden dicker auf Glas niedergeschlagener Silberschichten bezieht.

Für die in Tausendtheilen von Millimetern gegebenen Dicken:

$l = 0$ 0,014 0,024 0,040 0,047 0,055 0,067 0,075 ∞

erhält man aus den oben angegebenen Hülfsgrößen die Intensitäten nach dem Durchgang durch das Silber (also im Glas) für die einfallende Intensität Eins;

$(\mathfrak{D}_s)^2 =$ 0,940 0,662 0,411 0,154 0,0891 0,0504 0,0213 0,0119 0
$(\mathfrak{D}_p)^2 =$ 0,645 0,214 0,0864 0,0235 0,0128 0,00695 0,00286 0,00158 0.

Indessen sind die Beobachtungen erst nach dem Austritt aus der Glasplatte angestellt und beziehen sich daher auf Amplituden $\mathfrak{D}'_s$ und $\mathfrak{D}'_p$, welche gegeben sind durch:

$$\mathfrak{D}'^2_s = (\mathfrak{D}_s)^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos^2(\varphi-\varphi')}$$

$$\mathfrak{D}'^2_p = (\mathfrak{D}_p)^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi)'},$$

worin $\varphi = 72°$ der Winkel des Strahles gegen das Einfallsloth in Luft, $\varphi' = 38°$ derjenige im Glas ist. Diese Werthe sind:

$\mathfrak{D}'^2_s =$ 0,883 0,622 0,386 0,145 0,0838 0,0473 0,0200 0,0112 0
$\mathfrak{D}'^2_p =$ 0,417 0,138 0,0557 0,0152 0,00827 0,00448 0,00185 0,00102 0.

Hieraus folgt demnach $\rho'_d = \mathfrak{D}'_s/\mathfrak{D}'_p = \operatorname{tg}\psi'_d$:

$\rho'_d =$ 1,455 2,12 2,63 3,09 3,18 3,25 329 3,31 3,32
$\psi'_d =$ 55°30′ 64°40′ 69°10′ 72°4′ 72°33′ 72°54′ 73°6′ 73°11′ 73°15′.

Für diese Größe giebt Herr Quincke in der oben benutzten Reihe:

$\psi'_d =$ — 64°35′ 67°14′ 70°20′ 70°51′ 71°34′ 70°9′ 69°15′ (?) — 72°27.

Die letzte Zahl erscheint unsicher, eine andere unvollständigere Beobachtungsreihe giebt den daruntergestellten Werth, welcher we-

1) Quincke, l. c. p. 375.

sentlich besser stimmt. Auch diese Beobachtungen bestätigen die Theorie soweit bei den unsichern Werthen n und $\varkappa$ zu erwarten.

IV. Die bei der Reflexion stattfindenden Verzögerungen ε_s und ε_p sind gegeben durch:

$$21. \qquad \left| \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_s}{\tau} = -\frac{R_s''}{R_s'}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_p}{\tau} = -\frac{R_p''}{R_p'}; \right.$$

sie erhalten dieselben Werthe wie bei einer Metallmasse von unendlicher Dicke sobald e^{-2k} neben 1 zu vernachlässigen ist, sie erhalten kleinere Werthe, wenn diese Vernachlässigung nicht statthaben darf.

Die Verzögerungen beim Durchgang durch die Schicht, η_s und η_p, d. h. die Phasendifferenz derselben Wellenebene in den beiden Lagen im ersten und dritten Medium, welche durch die Schnittpunkte einer Normalen auf der Schicht mit deren beiden Begrenzungsflächen hindurchgehen, sind analog gegeben durch:

$$22. \qquad \left| \operatorname{tg}\frac{\eta_s}{\tau} = -\frac{D_s''}{D_s'}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\eta_p}{\tau} = -\frac{D_p''}{D_p'}. \right.$$

Vernachlässigt man hierin e^{-2k} neben 1, d. h. nimmt an, daß eine Schicht von doppelter Dicke der benutzten als nahe undurchsichtig angesehen werden könne, so erhält man:

$$23. \left| \begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\eta_s}{\tau} &= \frac{\sin\mu_s'\sin(h+\mu_s+\mu_s'+\nu_s') - \sin\nu_s'\sin(h+\mu_s)}{\sin\mu_s'\cos(h+\mu_s+\mu_s'+\nu_s') - \sin\nu_s'\cos(h+\mu_s)} \\ \operatorname{tg}\frac{\eta_p}{\tau} &= \frac{\sin\mu_p'\sin(h+\mu_p+\mu_p'+\nu_p') - \sin\nu_p'\sin(h+\mu_p)}{\sin\mu_p'\cos(h+\mu_p+\mu_p'+\nu_p') - \sin\nu_p'\cos(h+\mu_p)}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt, daß, selbst wenn man, wie hierbei geschehen ist, von mehrfachen inneren Reflexionen absieht, die beim Durchgang durch die Metallschicht auftretende Verzögerung keineswegs nur von dem zurückgelegten Weg abhängt, (den man gewöhnlich durch $\gamma_1 l$ gegeben ansieht) sondern durch die Vorgänge beim Eintritt und Austritt durch die Grenzen der Schicht mit bedingt wird und demgemäß für die Componenten parallel und normal zur Einfallsebene verschieden ist.

Da über die absolute Verzögerung beim Durchgang durch ein beiderseits mit Luft in Berührung stehendes Goldblatt Beobachtungen von Herrn Quincke vorliegen, so will ich einige Werthe für η unter Benutzung der früher berechneten Constanten für Gold

$$\varkappa = 8{,}8 \qquad n = 0{,}28$$

und der daraus folgenden Werthe μ und ν angeben; doch ist dabei nochmals daran zu erinnern, daß die verschiedenen Goldplatten je nach der Herstellung sich wesentlich verschieden verhalten, die Benutzung der an einer erhaltenen Constanten zur Darstellung der von anderen gezeigten Erscheinungen also im hohen Grade unsicher ist.

Nehmen wir zunächst normalen Durchgang durch das Blättchen so ist in obigen Formeln $h = l/\tau\omega_1 = 2\pi l/\lambda_1$ zu setzen.

Wählt man successive:

$$\frac{l}{\lambda_1} = \quad 1/24 \quad 1/12 \quad 1/6 \quad 1/4$$
$$= \quad 0{,}041 \quad 0{,}083 \quad 0{,}167 \quad 0{,}250$$

so erhält man für die absolute Verzögerung im Blättchen in Theilen von 2π d. h. wegen $\tau = T/2\pi$ für:

$$\frac{\eta_0}{T} = -0{,}074 \quad -0{,}032 \quad +0{,}067 \quad +0{,}133$$

während zugleich die Verzögerung auf demselben Wege aber in Luft wäre:

$$\frac{l}{\lambda} = \quad 0{,}147 \quad 0{,}296 \quad 0{,}597 \quad 0{,}893.$$

Es findet hiernach in sehr dünnen Metallschichten beim senkrechten Durchgang eine Beschleunigung statt. Herrn Quincke's Beobachtungen mit dem Interferentialrefractor gaben die Differenz der Verzögerungen in Luft und Metall und es ist nach den vorstehenden Zahlen begreiflich, daß er bei einer Metalldicke, die er auf 1—2 Zehntel Wellenlänge in Luft schätzte [1]), doch einen Gangunterschied von größerem Werth als diesem erhalten hat.

Aus diesen Quincke'schen Beobachtungen ist also kein Einwand gegen die Theorie zu entnehmen, sie enthalten vielmehr eine neue Bestätigung derselben.

Für schiefen Einfall benutzen wir ebenfalls die früher berechneten Werthe für die μ und ν und erhalten für ein Blättchen von der Dicke $l = \lambda_1/12$, für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt und für die Einfallswinkel

$$\varphi = \quad 0^0 \quad 25^0 \quad 45^0 \quad 65^0 \quad 85^0$$

die Verzögerung beim Durchgang durch das Metall:

---

1) Quincke Pogg. Ann. Bd. 19 p. 382, 1863. Bd. 142 p. 186, 1871.

$$\frac{\eta_s}{T} = -0{,}032 \quad -0{,}002 \quad +0{,}013 \quad +0{,}087 \quad +0{,}250,$$

ferner die bei Zurücklegung des gleichen Weges in Luft:

$$\frac{l_\gamma}{\lambda} = \quad 0{,}296 \quad 0{,}268 \quad 0{,}209 \quad 0{,}125 \quad 0{,}026,$$

also die mit dem Interferentialrefractor beobachtbare Differenz der Verzögerungen in Streifenbreiten:

$$\frac{\zeta_s}{T} = -0{,}328 \quad -0{,}270 \quad -0{,}196 \quad -0{,}038 \quad +0{,}224.$$

Der letztere Werth geht also durch Null hindurch in das Entgegengesetzte über. Für Licht parallel der Einfallsebene polarisirt folgt ebenso für:

$$\varphi = \quad 0° \quad 25° \quad 45° \quad 65° \quad 85$$

$$\frac{\eta_p}{T} = -0{,}032 \quad -0{,}043 \quad -0{,}080 \quad -0{,}102 \quad -0{,}157$$

$$\frac{l_\gamma}{\lambda} = \quad 0{,}296 \quad 0{,}268 \quad 0{,}209 \quad 0{,}125 \quad 0{,}026.$$

Also die gegenseitige Verzögerung:

$$\frac{\zeta_p}{T} = -0{,}328 \quad -0{,}311 \quad -0{,}289 \quad -0{,}227 \quad -0{,}183.$$

Herr Quincke hat bei einem Goldblättchen diese Werthe leider nicht bestimmt, sondern nur für eine auf Glas niedergeschlagene Silberschicht[1]); auf diese Beobachtungen wird unten eingegangen werden.

Die gegenseitige Verzögerung der beiden durchgegangenen Componenten ist gegeben für:

$$\varphi = 0° \quad 25° \quad 45° \quad 65° \quad 85°$$

durch:

$$\frac{\eta_s - \eta_p}{T} = 0 \quad 0{,}041 \quad 0{,}093 \quad 0{,}189 \quad 0{,}407$$

sie wächst also mit dem Einfallswinkel und scheint bei streifendem Einfall den Werth 0,5 zu erreichen.

Diese gegenseitige Verzögerung ist durch Beobachtung der el-

---

1) Quincke Pogg. Ann. Bd. 120 p. 602, 1863.

liptischen Polarisation des durchgegangenen Lichtes ebenfalls direct zu bestimmen. Herr Quincke[1]) hat eine so gewonnene Werthreihe mitgetheilt; da aber die Dicke des benutzten Goldblättchens nicht angegeben ist — sondern nur ein gelegentlich von Warren de la Rue und Faraday mitgetheilter Werth über seine Größen-Ordnung, — so ist eine nummerische Vergleichung nicht möglich; Vorzeichen und Gang der Zahlen ist aber genau der oben vermerkte; man erhält nämlich durch Interpolation aus den beobachteten Zahlen unter der Einführung unserer Einheiten für:

$\varphi =$	$0°$	$25°$	$45°$	$65°$	$(75°)$
$\frac{\eta_{is}-\eta_{ip}}{T} =$	0	$0{,}015$	$0{,}070$	$0{,}165$	$(0{,}245)$.

Daß Herr Quincke nie größere Gangunterschiede als 0,25 beobachtet hat[2]) rührt daher, daß er in Luft keine größeren Einfallswinkel als 75° angewandt hat; die Werthe wachsen nach unsern Formeln nahe 90° sehr schnell mit dem Einfallswinkel.

Endlich will ich noch nach Formel (23) die Verzögerungen berechnen, die beim Durchgang durch eine einerseits von Luft andrerseits von Glas vom Brechungscoefficienten 1,54 begrenzte Silberschicht von der Dicke $0{,}00015^{mm}$ bei verschiedenen Einfallswinkeln eintreten, über welche Beobachtungen von Hern Quincke[3]) vorliegen. Ich benutze dazu die obigen Werthe der Constanten $n = 0{,}23$, $\varkappa = 1{,}50$ und solche Einfallswinkel für welche die μ und ν schon früher bestimmt waren, so daß nur μ' und ν' neu zu berechnen sind.

Die aus (23) folgenden Werthe sind für die Einfallswinkel:

$\varphi =$	$0°$	$25°$	$45°$	$65°$	$72°$
$\frac{\eta_{is}}{T} =$	$-0{,}074$	$-0{,}067$	$-0{,}048$	$-0{,}010$	$+0{,}015$
$\frac{\eta_{ip}}{T} =$	$-0{,}074$	$-0{,}081$	$-0{,}095$	$-0{,}114$	$-0{,}121$.

Die Beobachtungen beziehen sich auf die Differenz dieser Werthe

---

1) Quincke Pogg. Ann. Bd. 119 p. 373, 1863.

2) l. c. p. 370.

3) Quincke Pogg. Ann. Bd. 120, p. 602, 1863; Herr Quincke giebt die Dicke der Silberschicht auf 0,000122mm bis 0,000179mm an, es bleibt da also eine beträchtliche Unsicherheit und ist denkbar, daß die verschiedenen Einfallswinkeln entsprechenden Beobachtungen an verschieden dicken Stellen angestellt sind.

und der Verzögerung auf dem gleichen Wege in Luft $l\gamma/\lambda$, für welche man erhält:

$$\frac{l\gamma}{\lambda} = \quad 0{,}250 \quad 0{,}227 \quad 0{,}177 \quad 0{,}106 \quad 0{,}077.$$

Nennt man die Differenzen wieder ζ_s/T und ζ_p/T so erhält man:

$$\frac{\zeta_s}{T} = -0{,}324 \quad -0{,}294 \quad -0{,}225 \quad -0{,}116 \quad -0{,}062$$

$$\frac{\zeta_p}{T} = -0{,}324 \quad -0{,}308 \quad -0{,}292 \quad -0{,}220 \quad -0{,}198.$$

Diese Zahlen sind unmittelbar die Bruchtheile der Streifenbreiten, um welche bei Herrn Quincke's Beobachtungen mit dem Interferentialrefractor durch die Wirkung der eingeschobenen Silberplatte das Interferenzbild verschoben wurde. Die Beobachtungen, welche nach Herrn Quincke's Bemerkung nicht über 0,1 Streifenbreiten sicher waren, gaben für die Einfallswinkel:

$\varphi =$ 0° 20° 30° 40° 50° 60° 70°

im Mittel:

$$\frac{\zeta_s}{T} = -0{,}25 \quad -0{,}30 \quad -0{,}30 \quad -0{,}23 \quad -0{,}15 \quad -0{,}10 \quad -0{,}00$$

$$\frac{\zeta_p}{T} = -0{,}25 \quad -032 \quad -035 \quad -0{,}30 \quad -0{,}25 \quad -0{,}15 \quad -0{,}10.$$

Die Differenz erreicht nie die Größe der möglichen Beobachtungsfehler; die Uebereinstimmung ist also eine vollkommene.

Göttingen, November 1884.

Universität.

Siebenter Bericht über die Königl. Universitäts-Poliklinik für Ohrenkrankheiten.

Von

Dr. **K. Bürkner.**

Mit dem laufenden Etatsjahre ist die vor sieben Jahren als Privatinstitut des Berichterstatters gegründete Poliklinik für Ohrenkrankheiten von der Regierung übernommen und in ein Universitätsinstitut umgewandelt worden; eine Wendung, welche für die Zukunft zu den besten Hoffnungen berechtigt und für welche auch an dieser Stelle dem hohen Staatsministerium der schuldige Dank ausgesprochen sei.

Die Frequenz des Institutes hat auch im verflossenen Kalenderjahre wieder eine erhebliche Steigerung erfahren, indem im Ganzen an 983 Personen mit 1214 verschiedenen Krankheitsformen 6643 Consultationen (gegen 868 Patienten und 5025 Consultationen im Jahre 1883) ertheilt worden sind.

933 Patienten wurden in regelmäßige Behandlung genommen, während 50 Kranke theils wegen völliger Unheilbarkeit oder wegen fehlender Ohrenkrankheit abgewiesen, theils andren Instituten zugeführt werden mußten.

Ueber die Heilerfolge bei den einzelnen Patienten giebt folgende Zusammenstellung Aufschluß:

Geheilt wurden	621	Patienten	= 63,2%.
Wesentlich gebessert	106	„	= 10,8%.
Ungeheilt blieben	21	„	= 2,2%.
Ohne Behandlung entlassen wurden	50	„	= 5,0%.
Vor beendigter Kur blieben aus . .	156	„	= 15,9%.
In Behandlung verblieben	25	„	= 2,5%.
Gestorben sind	4	„	= 0,4%.
	983.		100,0.

Es war somit von den sämmtlichen zur Untersuchung gekommenen Patienten Heilung zu verzeichnen in 63,2%, Besserung in 10,8%. Von den überhaupt in Behandlung genommenen 933 Kranken wurden, nach Abrechnung der noch in der Kur befindlichen, 80,1% geheilt oder wesentlich gebessert. Bezüglich der vor Beendigung der Behandlung ausgebliebenen Patienten ist zu bemerken, daß etwa 80 von diesen 156 wesentlich gebessert ausgeblieben sind, so daß noch ungefähr 8% zu den als wesentlich gebessert Aufgeführten hinzuzuzählen sein würden. Der wirkliche Procentsatz für die geheilten oder gebesserten Fälle würde sich demnach auf circa 88% stellen.

Von den 983 Patienten waren

wohnhaft in Göttingen	376	= 38,2%.
wohnhaft außerhalb Göttingen, aber in der Prov. Hannover . . .	438	= 44,6%.
Mithin in der Prov. Hannover überhaupt	814	= 82,8%.
Außerdem kamen auf		
Provinz Hessen-Nassau	52	= 5,3%.
„ Sachsen	73	= 7,3%.
„ Westfalen	21	= 2,3%.
Herzogthum Braunschweig	15	= 1,5%.
Fürstenthum Lippe-Detmold	5	= 0,5%.
Freie Stadt Hamburg	2	= 0,2%.
Großherzogthum Hessen	1	= 0,1%.
Mithin außerhalb der Prov. Hannover	169	= 17,2%.

Von andren klinischen Instituten wurden eine Anzahl von Kranken theils zur Untersuchung, theils zur Behandlung der Poliklinik überwiesen oder von mir in den betreffenden Kliniken behandelt; nämlich

Patienten der Augenklinik	28.
„ „ Medicinischen Klinik	33.
„ „ Chirurgischen Klinik	4.
„ „ Irrenanstalt	1.
	66.

Männlichen Geschlechts waren . . .	575	= 58,4%.
Weiblichen Geschlechts	408	= 41,6%.
	983.	
Im Kindesalter (bis incl. 15. Lebensjahr) standen	434	= 44,2%.
Erwachsene waren	549	= 55,8%.
	983.	

Die Thätigkeit der Poliklinik vertheilte sich auf die einzelnen Monate in folgender Weise:

Januar:	564	Consultationen;	82	Patienten.
Februar:	616	„	92	„
März:	625	„	95	„
April:	427	„	60	„
Mai:	532	„	90	„
Juni:	504	„	87	„
Juli:	678	„	122	„
August:	735	„	96	„
September:	565	„	64	„
October:	490	„	66	„
November:	491	„	65	„
December:	416	„	64	„
	6643	Consultationen.	983	Patienten.

Folgende Krankheiten kamen zur Beobachtung:

A. Krankheiten des äußeren Ohres.
225 Fälle.

1. *Bildungsdefect des äußeren Ohres.* 1 Fall.
   Einseitig.
   Abgewiesen.
2. *Angeborene Ohrfistel.* 1 Fall.
   Einseitig.
   Abgewiesen.
3. *Erythem des äußeren Ohres.* 1 Fall.
   Einseitig.
   Geheilt.
4. *Acutes Ekzem des äußeren Ohres und Gehörganges.* 29 Fälle.
   19 einseitig.
   10 doppelseitig.
   25 geheilt, 4 ausgeblieben.
5. *Chronisches Ekzem des äußeren Ohres und Gehörganges.* 5 Fälle.
   3 einseitig.
   2 doppelseitig.
   Sämmtlich geheilt.
6. *Erysipel des äußeren Ohres und Gehörganges.* 1 Fall.
   Einseitig.
   Geheilt.
7. *Fehlen der Ohrmuschel.* 1 Fall.
   Einseitig.
   Abgewiesen.
8. *Othaematom.* 1 Fall.
   Einseitig.
   Geheilt.
9. *Pruritus cutaneus des Gehörganges.* 2 Fälle.
   Beide einseitig.
   Geheilt.
10. *Furunkelbildung im Gehörgange.* 38 Fälle.
    36 einseitig.
    2 doppelseitig.
    36 geheilt, 2 ausgeblieben.
11. *Diffuse Entzündung des Gehörganges.* 4 Fälle.
    3 einseitig.
    1 doppelseitig.
    3 geheilt, 1 ausgeblieben.

12. *Syphilitische Entzündung des Gehörganges.* 1 Fall.
Einseitig.
Geheilt.

13. *Abscess des äußeren Gehörganges.* 2 Fälle.
Beide einseitig.
Geheilt.

14. *Cerumenansammlung.* 117 Fälle.
71 einseitig.
46 doppelseitig.
111 geheilt, 6 gebessert.

15. *Fremdkörper im äußeren Gehörgange.* 19 Fälle.
Sämmtlich einseitig.
Geheilt.

Als Fremdkörper fanden sich vor: Wattepfropf 2 mal, Bleistiftknopf, Bohne 2 mal, Erbse 2 mal, Lupinenkern, Weidenkätzchen, Rosinenkern, Zwiebel 2 mal, Strohhalm, Getreidegranne 2 mal, Weizenkorn, Akazienfruchtkern, Hollunderblatt, Motte.

16. *Cholesteatom des Gehörganges.* 2 Fälle.
1 einseitig.
1 doppelseitig.
Beide geheilt.

B. Krankheiten des Trommelfelles.
47 Fälle.

17. *Acute Trommelfellentzündung.* 8 Fälle.
Sämmtlich einseitig.
Geheilt.

18. *Zerreißung des Trommelfelles.* 6 Fälle.
5 einseitig.
1 doppelseitig.
4 geheilt, 1 ungeheilt, 1 in Behandlung.

19. *Residuen von abgelaufenen Mittelohraffectionen.* 33 Fälle.
11 einseitig.
22 doppelseitig.
5 geheilt, 14 gebessert, 1 ungeheilt, 4 abgewiesen, 7 ausgeblieben, 2 in Behandlung.

C. Krankheiten des Mittelohres.
659 Fälle.

20. *Acuter Tubencatarrh.* 15 Fälle.
    11 einseitig.
    4 doppelseitig.
    13 geheilt, 1 gebessert, 1 ausgeblieben.
21. *Chronischer Tubencatarrh.* 1 Fall.
    Einseitig.
    Geheilt.
22. *Abnormes Offenstehn der Tuben.* 1 Fall.
    Einseitig.
    Geheilt.
23. *Acuter einfacher Mittelohrcatarrh.* 150 Fälle.
    81 einseitig.
    69 doppelseitig.
    123 geheilt, 6 gebessert, 19 ausgeblieben, 1 in Behandlung, 1 gestorben.
24. *Chronischer einfacher Mittelohrcatarrh.* 190 Fälle.
    22 einseitig.
    168 doppelseitig.
    66 geheilt, 48 gebessert, 11 ungeheilt, 12 abgewiesen, 46 ausgeblieben, 7 in Behandlung.
25. *Acute eiterige Mittelohrentzündung.* 140 Fälle.
    110 einseitig.
    30 doppelseitig.
    114 geheilt, 3 gebessert, 1 ungeheilt, 19 ausgeblieben, 2 in Behandlung, 1 gestorben.
26. *Chronische eiterige Mittelohrentzündung.* 154 Fälle.
    86 einseitig. 9 mit Caries und Necrose.
    68 doppelseitig. 14 mit Polypen.
    66 geheilt, 26 gebessert, 2 ungeheilt, 1 abgewiesen, 48 ausgeblieben, 9 in Behandlung, 2 gestorben.
27. *Periostitis des Warzenfortsatzes.* 2 Fälle.
    Beide einseitig.
    Geheilt.
28. *Neuralgie des Plexus tympanicus.* 6 Fälle.
    5 einseitig.
    1 doppelseitig.
    4 geheilt, 2 ausgeblieben.

D. Krankheiten des inneren Ohres.
40 Fälle.

29. *Brausen ohne Befund.* 5 Fälle.
    1 einseitig.
    4 doppelseitig.
    1 geheilt, 2 ungeheilt, 1 abgewiesen, 1 ausgeblieben.
30. *Salicyltaubheit.* 2 Fälle.
    Beide doppelseitig.
    Geheilt.
31. *Nervöse Taubheit.* (*Labyrinth- und centrale Affectionen*). 21 Fälle.
    5 einseitig.
    16 doppelseitig.
    2 gebessert, 3 ungeheilt, 9 abgewiesen, 5 ausgeblieben, 2 in Behandlung.
32. *Taubstummheit.* 12 Fälle.
    10 erworben, 2 angeboren.
    Sämmtlich ohne Behandlung entlassen.

E. Verschiedenes.
12 Fälle.

Normal wurden befunden 6 Fälle, die Diagnose blieb unbestimmt in 2 Fällen, Parotitis wurde geheilt einmal, Stockschnupfen 3 mal.

An Operationen wurden ausgeführt:

Eröffnung von Abscessen im Gehörgange	3 mal.
„ „ *Furunkeln* „ „	15 mal.
Fremdkörperextraction	3 mal.
Paracentese der Paukenhöhle	48 mal.
Polypenextraction	12 mal.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle* Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. Februar. **№ 2.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 7. Februar 1885.

Wieseler, über Eris, namentlich ihre äußere Erscheinung und Darstellung nach Schrift und Bild.

Weiland, zur Papstgeschichte des 10. Jahrhunderts.

F. Kohlrausch, auswärtiges Mitglied, die elektrische Leitungsfähigkeit wässriger Lösungen im Zustande äußerster Verdünnung.

Zur Papstgeschichte des zehnten Jahrhunderts.

Von

Ludwig Weiland.

Benedict VI. war der letzte Papst, der bei Lebzeiten Ottos des Großen den Stuhl Petri bestieg. Daß dies nicht ohne die Einwilligung des Kaisers geschah, ist, obgleich kein Quellenzeugniß dafür angeführt werden kann, als sicher anzusehen, wird hauptsächlich dadurch bewährt, daß der Papst am schwersten unter der Reaction zu leiden hatte, welche nach dem Tode des Kaisers in Rom gegen die Deutsche Herrschaft ausbrach. Crescentius, der Sohn der Theodora, warf den Papst in den Kerker, erhob einen Adelspapst, Bonifacius VII., auf dessen Anstiften Benedict VI. erdrosselt wurde, im Juli 974. Bonifacius hielt sich nicht anderthalb Monate, die kaiserliche Partei kam wieder obenauf, er floh aus Rom und begab sich später nach Constantinopel. »Die Vacanz dauerte einige Zeit; man verständigte sich zuerst mit dem jungen Kaiser« sagt Baxmann

(Die Politik der Päpste II, 126); Giesebrecht (Kaiserzeit I, 588): »Die nun herrschende Partei hatte mit Einwilligung des jungen Kaisers gegen Ende des Jahres 974 Benedict VII. zum Papst geweiht«. Wahrscheinlich ist das ja zweifellos, aber einen Quellenbeleg weiß keiner der Darsteller anzuführen.

Ein solcher liegt aber schon bald vierzig Jahre gedruckt vor. Es ist eine Einzeichnung aus dem 10. Jahrhundert in einer Handschrift der Capitelsbibliothek zu Ivrea, welche Bethmann im Archiv für ältere Deutsche Geschichtskunde IX, 623 veröffentlicht hat, und welche durch Wiederabdruck der Vergessenheit zu entreißen und weiter bekannt zu machen, Pflicht scheint. Sie lautet:

Interim imperialis majestatis legatum Sicconem comitem advenisse contigit. Qui ut jussus fuerat, cum sublatum pontificem Romanis majoribus et minoribus ab his quibus custodia tenebatur reposceret, nihilque proficeret, jussu atque consilio Franconis, quem supra diximus Romanam ecclesiam invasse (lies: invasisse), ut postmodum comprobatum, Stephanus quidam presbiter cum fratre in ipsius (lies: fratre ipsius eum) corrigie cujusdam strangulatione necavit. Unde omnes, tam imperialis missus quam civitas Romana magno merore defixus (corrigirt aus: defixas), longa obsidione, longa inpugnatione devictum Franconem pervasorem necat, eumque qui nunc est Benedictum communi omnium Romanorum electione, presentis imperatorii nuntii auctoritate munita, priori mortuo substituit. Quod ille alter graviter ferens, institum (lies: institutum) pontificem summopere persecutus est, nec passus est eum regimen sibi commissum tractare pacifice.

Sehen wir von der zeitgemäßen schlechten Grammatik und Stilisirung des Berichtes ab, so ist der Sinn desselben im ganzen klar, oder durch leichte Emendation klar zu stellen — mit einer Ausnahme. Daß Crescentius nicht genannt ist, kann auffallen, scheint mir aber kein Grund den Bericht zu verdächtigen. Unter »Franco« ist man geneigt, Bonifacius VII. zu verstehen; es entsteht hier nur die Schwierigkeit, daß der Bericht angibt, Franco sei nach langer Belagerung getödtet worden. Im Folgenden ist »ille alter«, der Benedict VII. nicht zum ruhigen Besitze des Papstthumes gelangen läßt, zweifellos Bonifacius. Der Bericht corrigirt sich also durch sich selbst: die erste Stelle ist corrumpirt. Will man nicht etwa ejicit für necat emendiren, so muß man, was wahrscheinlicher, eine größere Corruptel annehmen und das »Tödten« auf Andere, etwa Anhänger des Bonifacius beziehen. Daß aber Bonifacius in der That Franco hieß, besagt eine andere seither fast nicht beachtete Quelle, das Epitaphium Benedicts VII. bei Watterich I, 86: Hic primus repulit Franconis

spurca superbi, Culmina qui invasit sedis apostolicae, Qui dominumque suum captum in castro habebat u. s. w., leider verstümmelt. Epitaph und Bericht stützen sich also gegenseitig. Ein Späterer, ein Fälscher würde auf den für einen Römer ungewöhnlichen Namen nicht verfallen sein.

Was bietet der Bericht nun Neues? Vor allem daß die Reichsregierung schon sehr bald der Römischen Revolution Beachtung zuwandte. Der Missus Graf Sicco (vielleicht der Graf von Spoleto, der 969 vorkommt, wie ich aus dem Register bei Dümmler, Otto I. entnehme, oder der unechte Bruder Ottos II. des Aufgebotes von 981 bei Jaffé, Bibl. V, 471) kam schon mit dem Auftrage nach Rom, die Freilassung Benedicts VI. zu fordern. Als Mörder des Papstes wird ein Priester Stephan und sein Bruder genannt, bezeichnend für die Sittenzustände in Rom, wenn auch nicht gerade ein neues culturgeschichtliches Moment. Der Umschlag in der Stimmung des Römischen Volkes, die sich oft genug jäh in ihr Gegentheil verkehrte, vollzieht sich in Folge der Ermordung des Papstes. Es bedarf aber harten Kampfes und langer Belagerung, vermuthlich der Engelsburg, wo ja auch Benedict VI. gefangen gehalten und erdrosselt worden war, um des Gegenpapstes Herr zu werden. Die Neuwahl Benedicts VII. erfolgt jedenfalls unter Mitwirkung des kaiserlichen Gesandten, also im kaiserlichen Sinne. Bonifacius und sein Anhang erscheinen aber danach noch nicht völlig niedergeworfen; er setzt seinem neuen Gegner noch hart zu, läßt ihn nicht zur ruhigen Ausübung seines Amtes kommen.

Ich glaube nicht zu irren, wenn ich diesen letzten Satz des Berichtes auf die Vorgänge des Jahres 980 beziehe. Im August dieses Jahres ist Benedict VII. nicht mehr in Rom, er begegnet dem Kaiser Otto II. in Ravenna. Daß er der Gewalt gewichen, erschließt man nur aus einer kurzen Annalennotiz (Ann. Colon. 981: Apostolicus in sedem receptus est; vgl. Giesebrecht, Jahrbücher Ottos II. S. 66). Unser Bericht scheint anzudeuten, daß es sein alter Gegner war, der ihn aus seiner Residenz vertrieb. Bestätigung giebt wieder das Epitaphium: Cumque pater multum certaret dogmate sancto, Expulit a sede namque invasor eum. Die gewöhnliche Annahme, die sich auf die Ableitungen des verlorenen officiellen Papstcatologes (Watterich I, 66) stützt, ist, daß Bonifacius sich alsbald nach seiner Vertreibung aus Rom nach Constantinopel begeben habe, um erst im Jahre 984 zurückzukehren und den Papst Johannes XIV. vom Sitze zu stürzen. Nach unseren beiden Quellen sehen wir ihn ausdauernd das Ziel verfolgen, in Rom wieder die Oberhand zu bekommen. Die beste Ableitung des Cataloges, Hermanns Chronik (SS. V, 116)

sagt schon: expulsus, Constantinopolim postea petiit. Daß Bonifacius nach seiner Vertreibung aus Rom sich zu den Griechen geflüchtet habe, welche damals in Unteritalien eine sehr dominirende Stellung einnahmen und den Hort aller dem Römischen Kaiserthum widerstrebenden Elemente Italiens bildeten, ist wahrscheinlich genug. Möglicherweise soll daher der Ausdruck Constantinopolim nur dies besagen: ad Graecos.

Ueber den Charakter der Quelle, von welcher ein Fragment in der Handschrift von Ivrea vorliegt, enthalte ich mich jeder Vermuthung. Geschrieben ist die Aufzeichnung jedenfalls vor dem Tode Benedicts VII., der im October 983 erfolgte. Mit den Ableitungen des verlorenen Papstkataloges zeigt sie keinerlei Verwandtschaft. Die Worte »quem supra diximus« weisen auf eine längere Darstellung, ebenso der episch gehaltene Anfang; die andeutende Bemerkung am Schlusse schließt nicht aus, daß ein erläuternder ausführlicher Bericht, etwa über die Vorgänge des Jahres 980 folgte. Bei alledem ist möglich, daß wir es doch nur mit dem Fragmente eines Briefes oder einer anderen Gelegenheitsschrift, nicht einer erzählenden Quelle zu thun haben. Der Verlust des Ganzen ist aber bei der Dürftigkeit unsers Quellenbestandes gerade für die Italienischen Verhältnisse unter Otto II. sehr zu bedauern.

Die elektrische Leitungsfähigkeit wässriger Lösungen im Zustande äußerster Verdünnung.

Von

Friedrich Kohlrausch.

Meine zum Teil mit Grotrian angestellten Beobachtungen über das Leitungsvermögen von gelösten Elektrolyten [1]) reichten im allgemeinen bis zu Gehalten von etwa 5 Procent abwärts. Eine Gruppe verdünnterer Lösungen wurde von Lenz [2]) eingehend untersucht. Im vorigen Jahre erschienen Arbeiten von Bouty [3]) und von Arrhenius [4]) über denselben Gegenstand.

---

1) Götting. Nachr. 1874 Aug. 5.; 1876 Mai 17.; 1877 Apr. 4.; Münch. Sitz.-Ber. 1875 Nov. 5.; Pogg. Ann. Bd. 154 S. 1. 215, 1875; Bd. 159 S. 233, 1876; Wied. Ann. Bd. 6 S. 1. 145, 1879. Die letztgenannte Arbeit ist hier immer mit l. c. citirt.

2) Mém. de l'Acad. St. Péters. Bd. 26 Nr. 3, 1878.

3) Comptes rendus de l'Acad. Paris 1884 Jan. 21 u. Febr. 11. Journ. de

Die jetzige Mitteilung, einen Auszug aus einer Untersuchung gebend, welche mich schon lange beschäftigt, umfaßt wieder viel größere Verdünnungen als die genannten Arbeiten, im Durchschnitt einige Tausendmal größer als bei Lenz, einige Hundertmal größer als bei Bouty, und gegen Arrhenius, soweit aus den dort gegebenen Anhaltspuncten ersichtlich ist, auch noch mindestens zehnmal. Auch abgesehen hiervon würde meine Arbeit, die bei dem Erscheinen von Arrhenius' Versuchen übrigens im wesentlichen schon abgeschlossen war, nicht unnötig sein, denn diese Versuche beabsichtigten offenbar mehr einen Ueberblick über die Verhältnisse, als eine exacte abschließende Kenntnis zu erzielen.

Zu einer eingehenden Würdigung der genannten Arbeiten ist hier nicht der Ort. Die interessanten theoretischen Betrachtungen von Arrhenius insbesondere [1]) verlangen ein gründliches Studium. Auch eine ausführliche Kritik der weitgehenden Schlüsse, welche Herr Bouty zieht, würde hier zu viel Raum beanspruchen. Man wird aus meinen Resultaten, welche bis an die äußerste erreichbare und noch interessirende Grenze der Verdünnung reichen dürften und bei denen Vermutungen über das weiter unten liegende größtenteils ausgeschlossen sind, leicht erkennen, daß ich den Schlüssen des Herrn Bouty in wesentlichen Puncten nicht zustimmen kann.

Die Empfindlichkeit so geringhaltiger Lösungen (welche in ihrem Gehalte teilweise noch unter das hinuntergehen, was man gewöhnlich destillirtes Wasser nennt), die großen zu messenden Widerstände, die Herstellung beträchtlicher Mengen sehr reinen Wassers erforderte eine Summe von neuen Erfahrungen. Es sind über 600 Lösungen, die ich untersucht habe; einen Teil der älteren Versuche habe ich durch bessere ersetzt. Damit mag die lange Zeit, welche seit der ersten ausgesprochenen Absicht zu dieser Arbeit verstrichen ist, entschuldigt werden.

Die Concentration der Lösung soll durch ihren Moleculargehalt bezeichnet werden. Die »Molecülzahl« m oder gewöhnlicher die »Aequivalentzahl« des Elektrolytes in einer Lösung be-

---

phys. (2) Bd. 3 S. 325; Aug. 1884. Ann. de Chim. (6) Bd. 3. 1884. Die letztgenannte Publication der Untersuchungen von H. Bouty, die gerade eben erschienen ist, macht zu meiner Befriedigung einige historische Bemerkungen, zu denen die ersten Veröffentlichungen mir Veranlassung zu geben schienen, größtenteils überflüssig.

4) Bihang till k. Svenska Vet. Akad. Handl. Band 8, Nr. 13. 1884. Ueber die Säuren finden sich auch einige Angaben in der in diesen Tagen erschienenen Mittheilung von W. Ostwald, J. pr. Chem. Bd. 30. 1884.

1) sowie auch von Ostwald.

deutet die in 1 Liter Lösung enthaltene Menge in Grammen geteilt durch das Moleculargewicht (oder bei mehrwertigen Verbindungen das Aequivalentgewicht z. B. $NaCl = 58{,}50$; $Ba\frac{1}{2}Cl = 104{,}0$; $K(SO_4)\frac{1}{2} = 87{,}16$; $\frac{1}{2}MgSO_4 = 60{,}03$) A des Elektrolytes. Also $m = 1$ bedeutet das, was in der Titrir-Analyse eine Normallösung genannt wird. Dem kleinsten zur Beobachtung gelangten $m = 0{,}00001$ entspricht also z. B. für eine Kochsalzlösung der Gehalt 0,000585 g. im Liter oder nach gewöhnlichem Ausdruck $0{,}0000585 = {}^1/_{1710}$ Procent.

Das Leitungsvermögen k gilt wie früher für 18°,0 des Elektrolytes und ist auf Quecksilber als Einheit bezogen.

Das zum Lösen gebrauchte Wasser hatte in den meisten Versuchen ein Leitungsvermögen $k.10^{10} = 1$ bis 1,5. Dieser Betrag ist dann von dem beobachteten Leitungsvermögen der Lösung abgezogen worden. Der Rest wird als das Leitungsvermögen des gelösten Körpers allein angesehen. Daß diese Anschauung für neutral reagirende Salze gestattet ist glaube ich nach Versuchen mit verschiedenem Wasser behaupten zu dürfen (vgl. auch Arrhenius l. c. S. 25. 48). Ueber alkalische und saure Elektrolyte dagegen siehe weiter unten.

Da bei verdünnten Lösungen die Hauptfrage sich nach dem Verhältnis des Leitungsvermögens zum Gehalte richtet, so gebe ich (wie Lenz) das Verhältnis $k/m = \lambda$, welches meiner Bezeichnung specifisches moleculares Leitungsvermögen entspricht. Wäre das Leitungsvermögen dem Gehalte proportional, so müßte also diese Größe von dem Gehalte unabhängig sein.

Neutral reagirende Salze.

Die folgende Zusammenstellung gibt die (mit 10^7 multiplicirten) Werte k/m für Moleculargehalte m von 0,00001 nach Potenzen von 10 fortschreitend, bis $m = 1$ nach neuen Beobachtungen, für $m = 10$, oder wenn die Löslichkeit nicht so weit reicht womöglich wenigstens bis $m = 5$, nach unseren früheren citirten Versuchen.

Tabelle I.

Specifische moleculare Leitungsvermögen k/m bei 18° für wässrige Lösungen neutraler Salze.

von dem Moleculargehalte m =			0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	5	10
Kaliumchlorid	KCl	A = 74,6	122	121	119	115	105	92		
Ammoniumchlorid	NH_4Cl	= 53,5	121	121	119	114	104	91	75	
Natriumchlorid	$NaCl$	= 58,5	103	103	101	96	87	69	40	
Lithiumchlorid	$LiCl$	= 42,5	96	94	92	87	78	59	30	11
Bariumchlorid	$\frac{1}{2}BaCl_2$	= 104,0	114	113	109	101	86	66		
Zinkchlorid	$\frac{1}{2}ZnCl_2$	= 68,0	103	103	99	91	77	51		
Kaliumjodid	KJ	= 165,9	122	121	120	116	107	97	38	
Kaliumnitrat	KNO_3	= 101,2	121	121	118	112	98	75		
Natriumnitrat	$NaNO_3$	= 85,1	97	97	95	91	82	62	32	
Bariumnitrat	$\frac{1}{2}Ba(NO_3)_2$	= 130,6	112	110	106	95	76			
Silbernitrat	$AgNO_3$	= 170,0	108	108	107	102	89	64	35	
Kaliumchlorat	$KClO_3$	= 122,6	114	112	110	105	93			
Kaliumacetat	$KC_2H_3O_2$	= 98,1	94	93	92	88	78	59	24	4
Kaliumsulfat	$\frac{1}{2}KSO_4$	= 87,2	127	125	121	110	90	67		
Natriumsulfat	$\frac{1}{2}NaSO_4$	= 71,1	105	103	100	91	73	47		
Lithiumsulfat	$\frac{1}{2}LiSO_4$	= 55,0	95	94	91	82	64	39		
Magnesiumsulfat	$\frac{1}{2}MgSO_4$	= 60,0	106	103	94	71	47	27	8	
Zinksulfat	$\frac{1}{2}ZnSO_4$	= 80,6	105	102	91	68	43	25	8	
Kupfersulfat	$\frac{1}{2}CuSO_4$	= 79,8	108	105	94	67	42	24		
		$m^{1/2}$ =	0,021	0,046	0,100	0,215	0,464	1,00	1,71	2,15

Eine Uebersicht über diese Zahlen kann nur aus einer graphischen Darstellung gewonnen werden, die aber in gewöhnlicher Weise ausgeführt, ein Papier von 1 Kilometer Länge verlangen würde, wenn man der ersten Abscisse $m = 0{,}00001$ nur die Länge 1 mm. geben will. Man könnte aber z. B. $\log m$ als Abscisse nehmen. Doch ist wohl am rationellsten und ist hier geschehen, als Abscisse die mittlere gegenseitige Nähe der elektrolytischen Molecüle mit anderen Worten die Anzahl der Molecüle auf der Längeneinheit statt in der Volumeinheit zu nehmen. Zu diesem Zwecke ist also $\sqrt[3]{m}$ als Abscisse aufgetragen.

Die 1. Figur stellt die Größen k/m für eine Anzahl der Salze aus der Tabelle dar, welche alles characteristische enthält. Bedenkt man daß dies recht verschiedenartige Körper und zwar in Concentrationen von etwa 60 bis $^1/_{25000}$ Procent, d. h. im Verhältnis 1 zu anderthalb Millionen verschieden sind, so kann man mit der neuen Darstellungsart zufrieden sein.

Die Frage: gibt es für jede Substanz ein specifisches Leitungsvermögen als Grenzwert in äußerster Verdünnung? ist hiermit für die neutralen Salze endgültig bejaht. Denn die schließliche noch 10fache Verdünnung von 0,0001 auf 0,00001 hat das specifische Leitungsvermögen überall nur noch unbedeutend geändert. Man wird die in der ersten Spalte gegebenen Zahlen (vielleicht für die Sulfate von Magnesium, Zink und Kupfer noch um eine Einheit vermehrt) als diese (mit 10^7 multiplicirten) Grenzwerte ansehen dürfen.

Diese molecularen Leitungsvermögen sind alle von derselben Ordnung, aber durchaus nicht einander gleich. Sie werden augenscheinlich durch die beiden Jonen des Elektrolytes beeinflußt, welche letztere sich ihrer Güte nach ordnen:

für das Kation:

Kalium, Ammonium, Barium, Silber, Natrium, Kupfer, Magnesium, Zink, Lithium;

für das Anion:

Schwefelsäure, Chlor, Jod, Salpetersäure, Chlorsäure, Essigsäure.

Kalium und Ammonium, dann Magnesium, Zink und Kupfer bilden zusammengehörige Gruppen. Desgleichen sind in großer Verdünnung die Unterschiede zwischen SO_4, Cl, J, NO_3 unerheblich (vgl. Lenz l. c.)

Mit Ausnahme der Stellung der Schwefelsäure, die, wie schon Lenz und dann Bouty sowie Arrhenius und Ostwald gezeigt haben, in äußerster Verdünnung sich ganz anders ver-

hält als bei mäßiger Verdünnung zu erwarten wäre, stimmt diese Gruppirung mit meinen früheren Ergebnissen wesentlich überein.

Indem nun die im Wasser gelöste Menge wächst, nehmen die specifischen Leitungsvermögen ohne Ausnahme ab. »Alle Leitungs-»vermögen wachsen verzögert mit dem Moleculargehalt der Lösung; »die Anhäufung der Theilchen beeinträchtigt die Wirkung des ein-»zelnen Molecüls« (l. c. S. 184). Auch dies haben wir ja für mäßig verdünnte Lösungen schon früher gefunden. Für die angeführten Körper beträgt die Abnahme im Mittel

von	0,00001	0,0001	0,001	0,01
auf	0,0001	0,001	0,01	0,1
etwa	1	3	10	20 %.

Die Größe der Abnahme erleidet aber nach den verschiedenen Körpern eine bedeutende Veränderlichkeit. Die Abnahme ist bei weitem am stärksten für die Sulfate von Magnesium, Zink und Kupfer, bei denen das specifische Leitungsvermögen von Anfang bis zu $m = 1$ etwa auf den vierten Theil sinkt. Demnächst zeigen auch die anderen Sulfate beträchtliche Abnahmen, aber auch die Verbindungen der zweiwerthigen Metalle Zink und Barium mit einwerthigen Säuren sind durch ein stärkeres Gefälle von k/m charakterisirt als die einwerthigen Verbindungen. Ich halte dieses Zusammentreffen des stärkeren Gefälles mit der Mehrwerthigkeit der Bestandtheile nicht für ein zufälliges [1]).

Saure und alkalische Lösungen.

Im Vorigen sind nur neutral reagirende Körper gegeben worden. Es ist merkwürdig, daß alle übrigen, sie mögen alkalisch oder sauer reagiren, sich in äußerster Verdünnung ganz anders verhalten und zwar wie es scheint so charakteristisch, daß man das Kriterium einer nicht neutralen Beschaffenheit eben so sicher auf dieses Verhalten gründen könnte wie auf die Pflanzenfarben.

---

1) Einen Zusammenhang mit der Hydratbildung oder besser mit dem bei dem Auskrystallisiren in den festen Körper eintretenden Krystallwasser aber mit Bouty anzunehmen hindert mich das Verhalten des Kaliumsulfates und Bariumnitrates, die meines Wissens niemals mit Wassergehalt auskrystalliren.

Tabelle II.

Specifische moleculare Leitungsvermögen k/m bei 18° für einige saure oder alkalische Lösungen.

von dem Moleculargehalt m =			0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10
Salzsäure	HCl	A = 36,46	125	317	345	342	325	278	60
Salpetersäure	HNO_3	= 63,04	114	309	343	339	323	277	61
Schwefelsäure	$\frac{1}{2}H_2SO_4$	= 49,03	141	312	332	285	208	182	65
Kaliumhydrat	KOH	= 56,13	75	169	211	212	199	172	42
Natriumhydrat	$NaOH$	= 40,04		120	182	186	172	148	19
Kaliumcarbonat	$\frac{1}{2}K_2CO_3$	= 111,1	86	100	122	108	88	66	17
Natriumcarbonat	$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	= 95,0	70	88	104	90	68	43	

Nur die neutralen Salze haben von Anfang an einen bestimmten Werth des molecularen Leitungsvermögens, der in den allerersten Stufen des Gehaltes sich wenig ändert, dann allgemein abnimmt. Die alkalischen oder sauren Körper (vgl. Fig. 2) beginnen in äußerster Verdünnung mit einem kleinen molecularen Leitungsvermögen, welches zuerst zunimmt, ein Maximum erreicht und dann abnimmt. Das Maximum tritt schon sehr früh ein, bei Moleculargehalten von etwa 0,001 bis 0,005, unterhalb der Verdünnungen, mit denen die HH. Lenz oder Bouty gearbeitet haben. In der von H. Arrhenius zusammengestellten Tab. B spricht sich das im Anfange beschleunigte Wachsthum der nicht neutral reagirenden Körper gleichfalls aus, sowie in Ostwald's Versuchen.

Es liegt hierbei nahe zu vermuthen, wie auch Arrhenius gethan hat, daß alkalische oder saure Verunreinigungen des Wassers diese Erscheinung als eine Anomalie verursachen[1]). Die Prüfung dieser Frage hat mich lange aufgehalten. Allein ein und dasselbe Wasser (k. $10^{10} = 1{,}25$) bei Schwefelsäure und bei Aetzkali angewandt gab in beiden Fällen die erwähnte Erscheinung.

Das reinste Wasser, welches man gegenwärtig für solche Versuche herstellen kann, macht also den Eindruck, als ob dasselbe Säuren gegenüber alkalische und Alkalien gegenüber saure Eigenschaften habe. Ein endgiltiger Abschluß der Frage, ob dies eine Eigenschaft des Wassers an sich ist oder ob doch noch Verunreinigungen die Ursache bilden, läßt sich aus diesen Versuchen noch nicht entnehmen. Uebereinstimmend war in der That der Gang des Leitungsvermögens bei Anwendung verschiedenen Wassers im ersten Anfange nicht, sondern bis etwa $m = 0{,}0005$ zeigten verschiedene Versuche noch deutliche allmählich kleiner werdende Unterschiede.

Es verdient noch Erwähnung, daß auch mit der Zeit bei den hier besprochenen Körpern kleine Aenderungen eintraten, die sich etwa so verhielten, als ob die Elektroden kleine Mengen des gelösten Elektrolytes absorbirten. Daher arbeitete ich schließlich mit ziemlich großen Mengen (0,5 Liter) Flüssigkeit.

Im einzelnen ist zu bemerken, daß die Hydrate von Natrium und Kalium, sowie überhaupt die Verbindungen dieser Metalle, sich

---

1) Zusatz von Säure zu einer alkalischen Lösung vermindert natürlich zuerst das Leitungsvermögen, um dasselbe erst später wieder zu vermehren. Es scheint, daß der Uebergang von der Verminderung zur Vermehrung bei starken Verbindungen plötzlich, bei schwachen allmählicher eintritt. Hier liegt ein interessantes Gebiet der Forschung über Bindung von Basis und Säure in Lösung vor.

um einen nicht sehr veränderlichen Betrag zu Gunsten des Kaliums unterscheiden.

Salpetersäure und Salzsäure (sowie jedenfalls auch Brom- und Jod-Wasserstoff) stehen auch in der äußersten Verdünnung in derjenigen nahen Uebereinstimmung, welche meine früheren Beobachtungen für stärkere und mäßig verdünnte Lösungen ergaben und die dann von Lenz und jetzt von Bouty an schwächeren Lösungen nachgewiesen wurde.

Die Schwefelsäure. Vollkommen anders zeigt sich die zweibasische Schwefelsäure. Deren Curve (Fig. 2) besteht aus zwei Abtheilungen, von denen man, wenn sie nicht zusammenhingen, vermuthen würde, daß sie ganz verschiedenen Körpern angehören. Von großer Concentration bis etwa $m = 0{,}1$ abwärts verläuft die Curve in gewöhnlicher Weise, nach unten mäßig concav, sich über Kaliumhydrat wenig erhebend.

Von $m = 0{,}1$ nach stärkeren Verdünnungen fortschreitend erhebt sie sich aber steil und nach kurzer Krümmung fast geradlinig ansteigend, bis zu einem Maximum, welches demjenigen der einbasischen Säuren sehr nahe kommt. Schon Lenz, der bis etwa 0,02 abwärts beobachtete, fand daselbst eine auffallende Verringerung des Unterschiedes zwischen diesen Körpern.

Ich bin nach diesen mir schon lange bekannten eigenartigen Verhältnissen ganz der Ansicht, welche H. Bouty jetzt ausgesprochen hat, daß dieselben den Beweis der Constitutionsänderung der Schwefelsäure in großer Verdünnung liefern, ohne aber Herrn Bouty in die Theorie der Hydratbildung zu folgen. Es genügt mir und scheint von großem Interesse, daß die Schwefelsäure sich in äußerster Verdünnung wie die einbasischen Säuren verhält und daß auch die Constitution oder wenigstens der Vorgang bei der Elektrolyse für alle eine ähnliche Beschaffenheit haben wird.

Als einen weiteren Prüfstein für diese Ansicht kann man den Temperatureinfluß auf das Leitungsvermögen ansehen. Auch dieser fand sich für eine Lösung von $m = 0{,}001$ demjenigen für Salpeter- und Salzsäure fast gleich, während er für stärkere Lösungen nur etwa $^2/_3$ davon beträgt.

Ein Rückblick auf Tab. I oder Fig. 1 läßt nun sofort erkennen, daß wie die Schwefelsäure zu den einbasischen Säuren, so auch die Sulfate sich zu den entsprechenden Chloriden oder Nitraten verhalten. Bis $m = 0{,}1$ abwärts leiten erstere erheblich schlechter, besonders das Zink-, Kupfer- und Magnesiumsulfat. Von 0,1 abwärts aber er-

heben sich die Curven und erreichen ja übersteigen schließlich ein wenig die anderen am Nullpuncte [1]).

Andere Lösungen. Das anfängliche Ansteigen von k/m zeigten auch Posphorsäure, Essigsäure und Ammoniak (vgl. Fig. 2).

Phosphorsäure erreichte ihr Maximum von k/m ungefähr wie Schwefelsäure bei $m = 0{,}0009$, der größte Werth betrug aber nur 98. (Vgl. Ostwald S. 228.)

Essigsäure leitet in äußerster Verdünnung sogar besser als Phosphorsäure. Das schon bei etwa $m = 0{,}00002$ erreichte Maximum von k/m betrug 132, übertrifft also alle Salze. Aber für $m = 0{,}1$ ist der Wert bereits auf 5 gesunken.

Auch Ammoniak hatte sein Maximum bereits bei 0,00002. Und auch hier ist der Wert $k/m = 82$ wenn auch nicht so groß wie bei Essigsäure, doch ganz enorm im Vergleiche mit stärkeren Lösungen, da für $m = 0{,}1$ das specifische Leitungsvermögen k/m schon auf 3 gesunken ist.

Diese beiden Körper, welche in stärkerer Lösung Leiter niederer Ordnung darstellen, nähern sich also in großer Verdünnung den guten electrolytischen Leitern. Bereits in meinen älteren Beobachtungen (l. c. 190) waren diese Flüssigkeiten bis zu größerer Verdünnung verfolgt als die übrigen und ihr ganz abweichendes Verhalten wiederholt hervorgehoben worden. Es wurde bemerkt, daß in einer graphischen Darstellung die Curven für das Leitungsvermögen k im Anfang fast senkrecht aufsteigen. (Vgl. auch hierüber Bouty, Arrhenius und Ostwald.)

---

1) Es mag hier an einen schon von Faraday und von Gmelin angestellten Versuch (Wiedemann, Elektr. 2. Bd. S. 599, 3. Aufl.) erinnert werden, wonach ein elektrischer Strom von einer Magnesiumsulfatlösung in das »Wasser« übergehend an der Berührungsfläche Magnesiumhydrat ausscheidet. Ich habe die Thatsache an der Grenzfläche einer stärkeren und einer sehr verdünnten ($m = 0{,}001$) Lösung von Magnesiumsulfat bestätigt gefunden. Diese Thatsache scheint nun doch zu beweisen, daß in sehr großer Verdünnung auch das Wasser selbst mit leitet. An einigen anderen Körpern konnte ich vorläufig nichts ähnliches finden. Auch möchte ich nicht behaupten, daß an den ausgeschiedenen Metallen in der verdünnten Lösung, sich Wasserstoff befunden hätte, ohne es aber bestimmt zu verneinen.

Sehr schön sind die Metallfällungen aus so verdünnten Lösungen (Silber, Kupfer, Zink) durch die unglaublich zarte Verästelung, die mir eine Art Spitzenwirkung zu sein scheint. Die Metallfäden sind so dünn, daß sie unter der Einwirkung der Ladung durch Oeffnen und Schließen der Kette sich zusammenziehen und ausspreizen — eine sehr zierliche Erscheinung.

Das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen in verdünnter Lösung.

Ich habe früher den folgenden Satz aufgestellt [1]). In verdünnter Lösung, d. h. wenn die Wanderung der beiden Bestandtheile eines Electrolytes in einem Mittel stattfindet, welches sich vom Wasser wenig unterscheidet, hat jeder Bestandtheil eine bestimmte von dem anderen unabhängige Beweglichkeit. Das moleculare Leitungsvermögen einer Verbindung läßt sich dann aus den beiden Beweglichkeiten u und v der Bestandtheile einfach als die Summe $u + v$ finden. Die relative Geschwindigkeit der Ionen (Hittorf) ist gleich $u : v$. Für die einbasischen Mineralsäuren und ihre Verbindungen und einigermaßen auch für die Aetzalkalien bewährte sich, soweit sicheres Material vorlag [2]), dieser Satz in befriedigender Weise.

Auch die von mir damals vorausgesagten Ueberführungszahlen der Lithium-Verbindungen sind seitdem durch die Beobachtungen von Kuschel bestätigt worden.

Auf die mehrbasischen Säuren und ihre Verbindungen habe ich den Satz probeweise auch angewendet, aber unter Hervorhebung einiger Bedenken und daher mit Vorbehalt. Ich beschränke mich hier ganz auf einbasische Säuren.

Die molecularen Leitungsvermögen waren damals nur bis zu mäßigen Verdünnungen bekannt. Daraus wurden die Eigenschaften verdünnter Lösungen abgeleitet, so gut es sich thun ließ, und zwar nach einem für alle Körper gleichen Verfahren. Ich wußte freilich schon und sprach es wiederholt aus (l. c. S. 151. 162. 210), daß diese Resultate der Wirklichkeit bei äußerster Verdünnung nicht ganz entsprachen, theilweise sogar, wie bei der Schwefelsäure, beträchtliche Abweichungen zeigten. Allein eine genaue Erforschung dieser Verhältnisse erforderte, wie man gleich übersehen konnte, eine größere neue Arbeit (vgl. auch den Eingang dieser Mittheilung). Vor allem würde hierzu, um den Gegenstand zu erledigen, auch eine Ausdehnung der Hittorf'schen Wanderungsbeobachtungen auf diese großen Verdünnungen nöthig sein, zu welcher großen Arbeit viele Zeit und auch einiger Muth gehört.

Endlich scheint es mir auch, daß die Beschränkung auf mäßige Verdünnung berechtigt ist. Das Hinzunehmen des Grenzzustandes an

---

1) Götting. Nachr. 1876 Mai 17.; Wied. Ann. Bd. 6 S. 167, 1879.

2) H. Wiedemann schätzt, wie mir scheint, teilweise diese Sicherheit zu hoch. (Elektr. Bd. 2, 3. Aufl. § 1071).

dem reinen Wasser könnte ohne genaue Kenntniß aller Thatsachen die Beziehungen (etwa durch eine Leitung des Wassers selbst) in ähnlicher Weise verwickeln, wie die Massengravitation sich complicirt, wenn man die Kräfte bis zu molecularen Abständen verfolgt.

Immerhin aber habe ich gleich anerkannt (l. c. S. 152), daß der Rückschluß von meinen Beobachtungen an fünfprocentigen und stärkeren auf verdünnte Lösungen ein Nothbehelf in Ermangelung geeigneteren Materials war.

Für eine Anzahl von Körpern ist diesem Mangel nunmehr abgeholfen und ich will das Gesetz daher an den neuen Beobachtungen prüfen. Als die größte Verdünnung, für welche man auch die Ueberführungszahlen einigermaßen kennt, nehmen wir gleichmäßig den Gehalt $m = 0{,}1$. Die hierfür geltende Verdünnung (für NaCl z. B. 0,585%) ist eine ziemlich beträchtliche, denn da nach unserer Definition (vgl. S. 74) 1 Liter Wasser $1000 : 9 = 111$ Aequivalente enthält, so kommt für $m = 0{,}1$ auf 1110 Aequivalente Wasser ein Aequivalent des Elektrolytes.

Ich setze die Beweglichkeiten der Ionen

	K	NH_4	Na	Li	Ag	H	$\frac{1}{2}$Ba	$\frac{1}{2}$Mg	$\frac{1}{2}$Zn
$u =$	52	50	32	24	42	272	30	26	24

	Cl	J	NO_3	ClO_3	$C_2H_3O_2$	OH
$v =$	54	55	48	42	26	143.

Die hieraus berechneten molecularen Leitungsvermögen $u + v$ und Ueberführungszahlen des Anions $n = v/(u + v)$ vergleichen sich dann mit den Beobachtungen aus Tab. I bez. mit denjenigen von Hittorf, Wiedemann und Kuschel folgendermaßen.

Tabelle III.

Vergleichung von Leitungsvermögen und Ueberführungszahlen mit der Theorie.

	Moleculare Leitungsvermögen k/m			Ueberführungs-Zahl n des Anions		
	beob.	ber.		beob.	ber.	
KCl	105	106	+1	0,51	0,51	±
NH_4Cl	104	104	±	0,51	0,52	+0,01
NaCl	87	86	−1	0,63	0,63	±
LiCl	78	78	±	0,70	0,69	−0,01
HCl	325	326	+1	0,19	0,17	−0,02
KJ	107	107	±	0,50	0,51	+0,01
NaJ		87		0,61	0,63	+0,02
LiJ		79		0,70	0,70	±
KNO_3	98	100	+2	0,50	0,48	−0,02
$NaNO_3$	82	80	−2	0,61	0,60	−0,01
$AgNO_3$	89	90	+1	0,53	0,53	±
HNO_3	323	320	−3	(0,14)	0,15	+0,01
$KClO_3$	93	94	+1	0,46	0,45	−0,01

	Moleculare Leitungsvermögen k/m			Ueberführungs-Zahl n des Anions		
	beob.	ber.		beob.	ber.	
$KC_2H_3O_2$	78	78	±	0,33	0,33	±
$NaC_2H_3O_2$		58		0,44	0,45	+0,01
$AgC_2H_3O_2$		68		0,37	0,37	±
$\frac{1}{2}BaCl_2$	86	84	−2	0,62	0,64	+0,02
$\frac{1}{2}MgCl_2$	80	80	±	0,68	0,67	−0,01
$\frac{1}{2}ZnCl_2$	77	78	+1	0,70	0,69	−0,01
$\frac{1}{2}ZnJ$		79		0,68	0,70	+0,02
$\frac{1}{2}Ba(NO_3)_2$	76	78	+2	0,61	0,62	+0,01
KOH	199	195	−4	0,74	0,73	−0,01
$NaOH$	172	175	+3	0,84	0,82	−0,02
$LiOH$				0,85	0,85	±

Das Gesetz der unabhängigen Wanderung bewährt sich an dem jetzigen gleichmäßigen und besseren Materiale noch besser als an dem früheren (vgl. l. c. S. 173. 176. 182) und es scheint mir ein Zweifel an der inneren Berechtigung dieser Beziehung nicht gerechtfertigt zu sein. Denn ein solcher Zweifel würde voraussetzen, daß die nahe Uebereinstimmung von einstweilen 42 Werthen, welche aus 15 Zahlen berechnet sind, auf einem Zufall beruhe. Allerdings wird der Satz wahrscheinlich, wie manche andere Naturgesetze, nur den Anspruch auf eine sehr genäherte Giltigkeit erheben dürfen.

Zu Gunsten meiner Anschauung gegenüber dem von Herrn Bouty ausgesprochenen Satze erlaube ich mir noch folgendes einzelne anzuführen.

1) Das Gesetz der unabhängigen Wanderung umfaßt auch die Wasserstoff-Verbindungen (Säuren und Alkalien).

2) Nicht nur die Leitungsvermögen sondern auch die Hittorf'schen Ueberführungszahlen erscheinen nach ihm unter einem einfachen einheitlichen Gesichtspuncte.

3) Das Gesetz der unabhängigen Wanderung ist von vorn herein ohne specielle Voraussetzungen zu vermuthen; für die Annahme von Bouty[1]), die gewissermaßen eine besondere einfachste Form dieses Gesetzes darstellen würde, sehe ich keine innere Veranlassung.

---

1) Der Hauptsatz von H. Bouty die »Loi des équivalents« sagt: »Die molecularen Leitungsvermögen verdünnter Salzlösungen sind einander gleich«. Die Gültigkeit dieses Satzes würde verlangen, daß die Anfangszahlen in Tab. I. für die verschiedenen Körper gleich groß wären. Freilich hat H. Bouty im Verfolg seiner Arbeiten diesen Ausspruch wesentlich eingeschränkt, nämlich auf solche Körper, die eine »normale Elektrolyse« erfahren, d. h. deren Lösung sich durch den Strom an beiden Elektroden gleich stark verdünnt, mit anderen Worten, deren Bestandteile nach Hittorf beiderseitig gleich rasch wandern. Zu solchen Körpern rechnet Bouty vom Kalium und wahrscheinlich dem Ammonium die Haloidsalze, Nitrate und Sulfate, auch das Chlorat und Chromat, sowie das Sulfat und Nitrat des Silbers, — also eine recht be-

4) Man mag von den Concentrationen der Tab. I irgend eine herausgreifen, die molecularen Leitungsvermögen zeigen stets beträchtliche Abweichungen von einander.

Große Verdünnungen. Macht man den Versuch, etwa für den Moleculargehalt 0,0001 ein System von Beweglichkeiten der Ionen aufzustellen, so lassen sich hierdurch unter gewissen Voraussetzungen nicht nur die einbasischen Säuren (ausgenommen die Essigsäure) und ihre Salze, sondern auch die Sulfate und Carbonate mit großer Annäherung ihrem Leitungsvermögen nach berechnen. In Ermangelung des Prüfsteins an den für diesen Fall unbekannten Ueberführungszahlen aber soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

Temperatur-Coefficienten.

Schon in der ersten Veröffentlichung mit Grotrian und dann in meinen späteren Mittheilungen wurde besonderes Gewicht darauf

---

schränkte Gruppe von Stoffen. Allein auch unter diesen, soweit sie in Tab. I. vorkommen, finden sich noch beträchtliche Unterschiede. Auch das kohlensaure Natrium würde nach den Versuchen von Kuschel hergehören. Von dem essigsauren Lithium scheue ich mich nicht vorauszusagen, daß seine Leitungsfähigkeit viel kleiner sein dürfte als diejenige irgend eines Stoffes der Tab. I, während seine Elektrolyse doch im Sinne der Bouty'schen Definition »normal« sein wird.

Kurz, das von Bouty angenommene Gesetz erleidet so viele bedeutende Ausnahmen und trifft nur in einer so kleinen Anzahl von Fällen genähert zu, daß ich den Vorteil dieses Ausspruches nicht einsehe. Man könnte doch höchstens sagen: die Leitungsvermögen äquivalenter Lösungen von Salzen sind von gleicher Ordnung.

Für die Chloride ist aber diese Beziehung schon in den Arbeiten von Grotrian und mir (»spec. Leitungsvermögen nach Aequivalenten«, Gött. N. 1874 S. 418, Pogg. Ann. Bd. 154 S. 236, 1875) mit Zahlen belegt hervorgehoben worden, als überhaupt zum ersten Male von dem Leitungsvermögen verdünnter Lösungen die Rede war. Daß Jodide und Nitrate sich anschließen stand in meiner Arbeit von 1879. Die Untersuchungen über größere Verdünnungen von Lenz und sodann von Bouty haben allerdings erst gezeigt, daß auch die Sulfate schließlich den beträchtlicheren Unterschied, welchen sie in mäßiger Verdünnung zeigen, zum großen Theile verlieren.

Die Bedeutung des chemischen Aequivalentes für das Leitungsvermögen anlangend darf ich endlich überhaupt auf meine Bemerkungen (l. c. S. 184. 187. 188) sowie auch über die Uebereinstimmung der Wasserstoffsäuren und der Salpetersäure, der Kalium- und Ammonium-Verbindungen, der Chloride von Barium, Strontium, Calcium, der Sulfate von Magnesium, Zink und Kupfer hinweisen. Ich bin erfreut, daß die Wichtigkeit dieser Bedeutung für die Chemie der Lösungen im Anschlusse an H. Bouty's Mittheilung von berufenster Seite in der Sitzung der Académie des Sciences Anerkennung gefunden hat.

gelegt, daß die Temperatur das Leitungsvermögen in starker, aber übersichtlicher Weise beeinflußt, daß insbesondere die Temperatur-Coefficienten der Salze in verdünnter Lösung sich bis auf Unterschiede von einigen Tausendteln gleichen. Etwa 40 verschiedenartige Körper gaben den größten Unterschied 0,0044 des Coefficienten [1]).

An den Lösungen für den Gehalt $m = 0{,}01$ wurden nun die Leitungsvermögen wie früher bei etwa 18° und 26° gemessen und der Temperaturcoefficient als Aenderung auf 1° in Theilen des Leitungsvermögens von 18° ausgedrückt, was zu folgenden Resultaten führte.

Tabelle IV.

Temperaturcoefficienten

für $m = 0{,}01$.

KCl	0,0221	KJ	0,0219	$\frac{1}{2}K_2SO_4$	0,0223	$\frac{1}{2}K_2CO_3$	0,0249
NH_4Cl	0,0226	KNO_3	0,0216	$\frac{1}{2}Na_2SO_4$	0,0240	$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	0,0265
$NaCl$	0,0238	$NaNO_3$	0,0226	$\frac{1}{2}Li_2SO_4$	0,0242	KOH	0,0194
$LiCl$	0,0232	$AgNO_3$	0,0221	$\frac{1}{2}MgSO_4$	0,0236	HCl	0,0159
$\frac{1}{2}BaCl_2$	0,0234	$\frac{1}{2}Ba(NO_3)_2$	0,0224	$\frac{1}{2}ZnSO_4$	0,0234	HNO_3	0,0162
$\frac{1}{2}ZnCl_2$	0,0239	$KClO_3$	0,0219	$\frac{1}{2}CuSO_4$	0,0229	$\frac{1}{2}H_2SO_4$	0,0125
		$KC_2H_3O_2$	0,0229				

Die so für sehr verdünnte Lösungen erhaltenen Temperaturcoefficienten des Leitungsvermögens sind in bester Uebereinstimmung mit den Werthen, welche aus den früheren Darstellungen des Temperatureinflusses (l. c. S. 191 sowie Taf. I u. II) zu erwarten waren und

1) Die Beobachtungen von Arrhenius sind in Uebereinstimmung mit diesen Zahlen. Auch von Bouty wird die nahe Gleichheit des Temperatureinflusses auf 12 von ihm untersuchte Körper betont, an denen er Unterschiede in dieser Richtung etwa ebensogroß wie die meinigen findet. Von strenger Gleichheit aber kann in keinem Falle die Rede sein. Das bei dieser Gelegenheit gegebene Citat meiner Ergebnisse sagt: »M. F. K. avait déjà observé, que la variation ... est sensiblement la même ... en dissolution étendue. La plus faible concentration qu'il ait employée est $^1/_{20}$. La loi n'est rigoureuse que pour des dilutions supérieures«. Ich hatte jedoch von meinen Beobachtungsreihen auf große Verdünnung zurückgeschlossen und angegeben, daß dann die Coefficienten zwischen den engen Grenzen 0,0211 und 0,0255 eingeschlossen erscheinen, was sich in den neuen Versuchen fast vollkommen bestätigt findet.

Auf H. Bouty's hervorgehobene Analogie mit dem Temperaturcoefficienten der Reibung über welche ja so umfassende Untersuchungen besonders von Grotrian vorliegen, will ich hier nicht eingehen. Die genaue Uebereinstimmung mit diesem Coefficienten für das Wasser ist nur eine zufällige, insofern man die Reibung des Wassers zwischen 0 und 1° nimmt. Bei anderen Temperaturen würden nach Bouty's Zahlen Unterschiede bis zu 50 % auftreten können.

dürfen für die aufgeführten Körper wohl nahe als die Grenzwerthe für verdünnte Lösungen angenommen werden.

Nur die Schwefelsäure weicht wiederum ab; die Zahl ist größer als zu erwarten war (0,0112) und als deswegen noch die 10fache Verdünnung $m = 0{,}001$ untersucht wurde, fand sich der Coefficient 0,0159, also dem der einbasischen Säuren gleich. Dies haben wir schon Seite 80 hervorgehoben.

Würzburg, Januar 1885.

Ueber Eris, namentlich ihre äußere Erscheinung und Darstellung nach Schrift und Bild.

Von

Friedrich Wieseler.

Im Glauben und in der Sage der Griechen giebt es nur eine Eris, die hauptsächlich als Anstifterin blutigen Streites und als Schlachten- und Kriegs-Göttin oder Dämon, wie die ihr zunächst stehenden Götter oder Dämonen Ares, Enyo, Deimos und Phobos, erwähnt wird, dann aber auch als Veranlasserin unblutigen Zankes und Wettstreites, ja selbst nützlichen Wetteifers. Wenn Hesiod in den Werken und Tagen Vs 11 fg. — einer Stelle, welche sicherlich Plutarch Amator. 18, 11 im Sinne hat, indem er *τὰς ποιητικὰς Ἔριδας* erwähnt — von zwei Erisarten spricht, so handelt es sich nur um eine ihm eigenthümliche Doctrin, von deren Annahme sich nirgendanderswo auch nur eine Spur zeigt (s. Excurs I).

Eris wird von Griechischen Schriftstellern, Dichtern und Prosaikern, öfter als auf Waffen oder sonst in Bildwerken vorkommend erwähnt, selten aber auch nur etwas genauer beschrieben. Schon in der Ilias erscheint sie auf dem Schilde des Achilleus XVIII, 535, wie noch bei Quintus Smyrnaeus Posthomer. V. 31, und bei Hesiod Scut. Herc. Vs 147 fg. auf dem des Herakles[1]), sowie bei Vergil Aen. VIII,

---

1) Ich stimme nicht mit Goettling überein, wenn er in der Stelle Vs 147 fg., wo es von dem *δράκοντος φόβος* sonst heißt:

ἐπὶ δὲ βλοσυροῖο μετώπου
δεινὴ ΈΡΙΣ πεπότητο, κορύσσουσα κλόνον ἀνδρῶν,

nicht *Ἔρις*, sondern *ἔρις* geschrieben wissen will. Man hat etwa anzunehmen, daß der Dichter hier so spreche, wie andere Schriftsteller, nach denen Peitho auf Perikles' Lippen thront oder Hebe, die Chariten und besonders Eros auf den Wangen schöner Jungfrauen ihren Wohnsitz haben (O. Jahn Peitho S. 6),

702 auf dem des Aeneas. In der Ilias V, 740 wird Eris auch auf der Aegis der Athena erwähnt. Als ältestes sicheres Bild lernen wir das am Kasten des Kypselos kennen durch Pausanias V, 19, 1, durch welchen wir übrigens nichts weiter erfahren, als daß sie in der Mitte zwischen den im Einzelkampf begriffenen Helden Aias und Hektor stand und ein sehr häßliches Aussehen hatte. Entsprechend stellte sie nach demselben Gewährsmann Kalliphon von Samos, der jedenfalls der früheren Zeit angehörte (Brunn Gesch. d. Griech. Künstler II, S. 56), auf dem Gemälde des Kampfes der Hellenen und Troer in dem Heiligthum der Artemis zu Ephesos dar. Sie fehlt auch nicht in dem fingirten Schlachtengemälde bei dem jüngeren Philostratos Imag. c. 10, wo ihr Aussehen keinesweges beschrieben wird, wie noch Creuzer Zur Archäologie III S. 83 gemeint hat, denn die Worte *τὴν πεφοινιγμένην λύθρῳ δαίμονα, αὐτήν τε καὶ τὴν ἐσθῆτα* gehen nur die *Κήρ* an, was auch aus Homer. Il. XVIII, 535 fg. und Hesiod. scut. Herc. Vs 156 fg. erhellt, aus welchen der Sophist geschöpft hat.

In der Ilias XI, 3 fg. erwähnt der Dichter auch ein Attribut der Eris, indem er die von Zeus abgesendete als *πολέμοιο τέρας μετὰ χερσὶν ἔχουσαν* bezeichnet. Das Kriegeszeichen ist ohne allen Zweifel die brennende Fackel; s. Excurs II.

Eine etwas genauere Beschreibung der Eris finden wir erst bei Quintus Smyrnaeus XI, 8 fg., wo sie nicht bloß als Bildwerk, sondern ihres Amtes waltend vorgeführt wird:

ἐν γὰρ δὴ μέσσοισιν Ἔρις στονόεσσά τ' Ἐνυὼ
στερωφῶντ', ἀργαλέῃσιν Ἐριννύσιν εἴκελαι ἄντην,
ἄμφω ἀπὸ στομάτων ὀλοὸν πνείουσαι ὄλεθρον,

und besonders X, 53 fg.:

τοὺς δ' ἄγεν εἰς ἕνα χῶρον Ἔρις μεθέπουσα κυδοιμὸν
οὔτινι φαινομένη· περὶ γὰρ νέφος ἄμφεχεν ὤμους
αἱματόεν· φοίτα δὲ μέγαν κλονέουσα κυδοιμὸν
ἄλλοτε μὲν Τρώων ἐς ὁμήγυριν, ἄλλοτ' Ἀχαιῶν· —
ἡ δὲ μέγ' ἐξ ὀλίγοιο κορύσσετο μαιμώωσα[1]),
τεύχεα δ' ἐξ ἀδάμαντος ἔχεν πεπαλαγμένα λύθρῳ,
πάλλε δὲ λοίγιον ἔγχος ἐς ἠέρα· τῆς δ' ὑπὸ ποσσὶ

---

vgl. besonders die Mania, welche Athena *ἀπὸ φρενὸς ἠδὲ καὶ ἔσσων ἐκείδασεν*, bei Quintus Smyrn. Posthom. V, 451 fg. (unten in Excurs VI). Aber *πεπότητο* wird in *πεπόνητο* zu verändern sein. Schon F. Ranke hielt im Apparat. crit. seiner Ausgabe des Schildes p. 189 *πεπότητο* für verdächtig. Das Plusquamperfectum von *ποτάομαι* paßt auch in sachlicher Hinsicht nicht wohl. Zu *πεπόνητο* vgl. Quintus Smyrn. V, 38 fg.:

ἐν δ' ἄρα Γοργόνες ἦσαν ἀναιδέες· ἀμφὶ δ' ἄρα σφι
σμερδαλέοι πεπόνητο περὶ πλοχμοῖσι δράκοντες.

1) Vgl. Homer. Il. IV, 442 fg., den auch Tryphiodor Vs 562 nachgeahmt hat.

κίνυτο γαῖα μέλαινα· πυρὸς δ' ἄμπνειεν ἀϋτμὴν
σμερδαλέου· μέγα δ' αἰὲν ἀΰτεεν ὀτρύνουσα
αἰζηούς.

Daß sich der Dichter die Eris vollkommen menschlich gebildet und ohne Schlangenhaar denkt, geht hervor aus I, 363 fg., wo es von der Penthesileia heißt:

οὐ γὰρ τήνδε γυναῖκά γ' ὀΐομαι εἰσοράασθαι
οὕτως θαρσαλέην τε καὶ ἀγλαὰ τεύχε' ἔχουσαν,
ἀλλ' ἄρ' Ἀθηναίην ἢ καρτερόθυμον Ἐνυὼ
ἢ Ἔριδ' ἣ κλειτὴν Ληϊωίδα,

vgl. I, 179 fg.:

ἣ δ' οἵη Τριτωνίς, ὅτ' ἤλυθεν ἄντια Γιγάντων,
ἣ Ἔρις ἐγρεκύδοιμος ἀνὰ στρατὸν ἀΐσσουσα,
τοίη ἐνὶ Τρώεσσι θοὴ πέλε Πενθεσίλεια.

Außerdem erwähnt der Dichter, von der Penthesileia sprechend, I, 159 fg.:

βουπλῆγ' ἀμφίτυπον, τὴν οἱ Ἔρις ὤπασε δεινή,
θυμοβόρου πολέμοιο πελώριον ἔμμεναι ἄλκαρ,

sodaß man sich auch Eris selbst mit der Streitaxt ausgerüstet denken kann.

Noch eigenthümlicher ist die Wage, vgl. VIII, 540:

Ἔρις δ' ἴθυνε τάλαντα
ὑσμίνης ἀλεγεινά.

Ueber das Attribut der Wage, welches Eris mit Zeus als *ταμίης πολέμοιο* und Ares bei Griechischen Dichtern theilt, ist schon in den Götting. Antiken, 1858, S. 18 gesprochen.

Auch bei Lateinischen Dichtern werden Aussehen und Attribute der Discordia dann und wann erwähnt.

So von Vergil Aen. VI, 280 fg.:

Discordia demens
Vipereum crinem vittis innexa cruentis,

und VIII, 702:

scissa gaudens vadit Discordia palla.

Eine besonders ausgeführte Beschreibung findet sich bei Petronius Satir. reliq. 124, Vs 271 fg., p. 170, 2 fg. der Ausgabe von Buecheler v. J. 1862, p. 89 fg. der Ausg. desselben v. J. 1871:

intremuere tubae et scisso Discordia crine
extulit ad superos Stygium caput. hujus in ore
concretus sanguis, contusaque lumina flebant:
stabant irati scabra rubigine dentes,
tabo lingua fluens, obsessa draconibus ora,
atque inter torto laceratam pectore vestem
sanguineam tremula quatiebat lampada dextra.

Die Stelle enthält so manches Eigenthümliche und ist so verderbt, daß es nöthig ist, genauer auf sie einzugehen. Scissi crines werden sonst bei der Eris-Discordia nicht erwähnt. Da aber Vergilius von einer scissa palla spricht und bei Petronius selbst von einer lacerata vestis die Rede ist, so wäre es gewiß Unrecht an der Echtheit von scisso zu zweifeln. Aber in Vs 273 ist flebant gewiß verderbt, wie auch Buecheler annimmt. Dieser schlägt vor: fletu, was jedoch nicht paßt. Ich schreibe mit noch leichterer Veränderung: flutant. Die Hinzufügung von sanguine war bei Petronius, der zudem unmittelbar vorher von dem concretus sanguis gesprochen hatte, um so weniger nöthig als das Wort contusa darauf hinweist, daß an Blut zu denken ist. — Merkwürdig, daß Niemand an stabant in Vs 274 Anstoß genommen hat. Sehr passend würde livent sein; vgl. Ovid. Metam. II, 776: livent rubigine dentes. Eine äußerlich leichtere Veränderung, die in scabrent, wäre wegen des gleich folgenden scabra nicht zu billigen. So bleibt wohl nichts Anderes übrig als tabent. Gegen dieses Wort spricht keinesweges das am Anfang des folgenden Verses stehende tabo, da das letztere sich auf Blut und Eiter bezieht, durch das erstere aber das Zergehen und Schwinden bezeichnet wird. — Auch in irati (welches Buecheler in der größeren Ausgabe in den Text aufgenommen hat) steckt sicherlich ein Fehler. Da der cod. p und der margo t aerati bieten, läßt sich wohl fragen, ob dieses nicht das Richtige sei. Könnte nicht aeratus rubigine in dem Sinne von »mit der aerugo oder der aeris robigo (Columella de re rust. VII, 5, 12) versehen« gebraucht sein? Ich sehe hinterdrein, daß auch Buecheler in der kleineren Ausgabe aerati in den Text gesetzt hat. Der zweite Theil von Vs 275 ist wohl so zu verstehen, daß das Antlitz der Discordia von Schlangen umgeben sei, wie das bei Medusenmasken nicht selten der Fall ist und auch hinsichtlich des Gorgonis os pulcherrimum, cinctum anguibus (Cicero Acc. in Verr. IV, 56, 124) sowie der Gorgonen bei Quintus Smyrn. V, 38 fg. anzunehmen ist. — Besonders stark ist Vs 276 verderbt. Wenn Buecheler bemerkt: construendum torto inter laceratam pectore vestem neque opus est aut atque intorto inter aut atque inter laceram contorto aut aliis inventis sensum poetae debilitantibus, so ist es mit diesen Conjecturen allerdings nichts; aber auch seine Meinung kann nicht gebilligt werden. Die einzige Weise der Herstellung, welche für mich Wahrscheinlichkeit hat, ist:

atque intecta fero lacerata pectore veste.

Die Varianten sind inter torto, intertorto, inter toto und lacerata. Man construire: intecta lacerata veste fero pectore. Vgl. fera pectora bei Valerius Flaccus Arg. V, 534. — In Vs 277 liegt es nahe,

sanguinea tremulam zu schreiben, was schon Lambinus vorschlug. Indessen dürfte die hergebrachte Schreibart dem, was der Dichter gab, näher stehen. Nach meiner Ueberzeugung ist das Imperfectum quatiebat unpassend. Ursprünglich war wohl geschrieben: quatit ebria. Discordia wird als blutberauschte Mänade gedacht. Bei Petronius selbst wird ihr tabo lingua fluens und bald nachher Vs 282 furibundum pectus zugeschrieben. Vgl. die *αἵματος ἀκρήτοιο μέθης ἐπίκωμος Ἐννώ* bei Tryphiodor *ΑΑ. ΙΑ.* Vs 561. Zu solcher Auffassungsweise paßt die tremula dextra auf das Beste.

An einer anderen Stelle des Petronius war Eris als horrida bezeichnet. Wir meinen die Petron. Satyr. p. 168 fg. = p. 89, Vs. 255 fg. Buecheler:

emergit late Ditis chorus, horrida Erinys
et Bellona minax facibusque armata Megaera.

Erinys kann nur gehalten werden, wenn man annimmt, daß Eris gemeint sei. Gewiß war geschrieben: Erisque. Der Fehler mag deshalb entstanden sein, weil die Griechische Form des Namens bei Lateinischen Schriftstellern äußerst selten ist.

Von Statius endlich wird Theb. VII, 50 Discordia als geminum tenens ferrum bezeichnet[1]).

Das sind die Schriftstellen, in denen auf das Aussehen der Eris Rücksicht genommen wird. In allen ist nur von der furchtbaren Gottheit des Streites und Krieges die Rede. Von dem Aussehen der Eris, welche als Veranlasserin friedlichen und ersprießlichen Wettstreits galt, die bei Hesiod Op. et dies 11 fg. von jener geschieden wird, giebt es nirgends eine besondere Nachricht.

Gehen wir jetzt zu den Bildwerken über, so steht zu bemerken, daß man freilich in Etruskischen schon vorlängst Eris vorausgesetzt hat, aber meist ohne alle Wahrscheinlichkeit[2]), daß aber im Bereiche der Griechischen und Griechisch-Römischen Werke vor den großen Entdeckungen bemalter Thongefäße von namhaften Archäologen nur auf Marmorreliefs eine Darstellung der Eris angenommen wurde und zwar mit Unrecht. Erst seit der genaueren Betrachtung jener

---

1) Wenn es ebenda II, 286 fg. in Beziehung auf das Halsband der Harmonia heißt:

Non hoc Pasithea blandarum prima sororum,
Non Decor Idaliusque puer, sed Luctus et Irae,
Et Dolor et tota pressit Discordia dextra,

so ist im letzten Verse für das gewiß verderbte tota doch wohl zu schreiben: tuta. Ein Epitheton, das sich auf das Aussehen der Hand bezog, wie z. B. tincta, sc. sanguine, hat keine Wahrscheinlichkeit.

2) Wir erinnern nur an Gori Mus. Etrusc. T. II, p. 192, 238, 255, 295.

Gefäße ist von den Erklärern der Gedanke an Eris wiederholt geäußert. Es sind auf einigen unter ihnen selbst Inschriften gefunden, die auf Eris lauten. Auch aus anderen Gattungen der Kunstübung sind seitdem Bildwerke bekannt geworden, in denen Eris mit Sicherheit oder mit größter Wahrscheinlichkeit zu erkennen ist, aber nur wenige.

Wir geben zuerst ein Verzeichniß der uns bekannten einschlägigen Bildwerke, indem wir, wie billig, mit den Vasenbildern beginnen.

Unter den auf Eris bezogenen Vasenbildern befinden sich mehrere, welche uns nur durch Beschreibungen bekannt sind. Eins ist von Second. Campanari Ant. vasi dipinti della collez. Feoli p. 211, n. 115 so verzeichnet: La Discordia in figura di una giovane donna alata sta in mezzo a due cavalieri armati di lancia, che par che attizi alla zuffa. Der jetzige Aufbewahrungsort des Gefäßes ist uns unbekannt (A 1). Zwei andere, welche sich an den Außenseiten einer und derselben Kylix, ebenfalls unbekannten Aufbewahrungsortes, wiederholt finden, beschreibt J. de Witte Descr. d'une collection de vases peints et bronzes ant. provenant des fouilles de l'Étrurie p. 99, n. 156 folgendermaßen: Deux éphèbes qui s'avancent l'un vers l'autre en courant. Au milieu d'eux Éris ailée, dans la pose ordinaire. De chaque côté un pédotribe enveloppé dans son tribon et suivi d'un sphinx (A 2). Drei andere hiehergehörende werden im Britischen Museum aufbewahrt. Das erste wird von de Witte im Cab. Durand (Descr. des antiquités et objets d'art qui composent le cab. de M. E. Durand) n. 241 und dann von Birch und Newton A catalogue of the Gr. and Etr. Vases in the Brit. Mus. n. 484 beschrieben und zwar von diesen so: two quadrigas approaching each other at full speed from opposite directions, each driven by a charioteer in a long, white chitôn and armed with a goad, between them rushes Eris, extending her left hand towards the horses' heads of the chariot on the right and looking back at the other; she is winged and wears an embroidered chitôn which she holds up as high as the knee; her hair is long and bound with a diadem; in her left hand she has a wand (A 3). Das zweite haben de Witte im Cab. Durand n. 690 und Birch u. Newton n. 486 verzeichnet, diese also: two horsemen in short, white chitôns and armed with spears, approaching at full speed from opposite directions; between them a figure of Eris, rushing towards the horseman on the right and looking back at his antagonist; she has large wings and wears a short chitôn, over which is the skin of some animal (»nebride« de Witte); her hair is long and bound with a sphendonê; on her feet are

endromides (A 4). Ueber das dritte Vasenbild, welches sich an der Vorderseite und an der Rückseite desselben Gefäßes wiederholt findet, geben Birch und Newton, welche die Gesammtdarstellung als vielleicht auf the quarrel between Achilles and Agamemnon bezüglich betrachten, a. a. O. n. 711 in Betreff der von ihnen als Eris betrachteten geflügelten Figur folgende Auskunft: a winged female figure, on each side of whom is a group of three male figures; the winged figure has long hair falling down the neck, and wears a necklace, and a bordered talaric chitôn over which falls an upper fold or garment as low as the girdle; she is moving rapidly the right, looking back and with her arms and wings extended (A 5). Ein siebentes Vasenbild befindet sich im Mus. naz. zu Neapel. Es wird von Heydemann S. 693, n. 268 so beschrieben: »Eine weißhäutige bekleidete Frau (Eris), mit Bart und ausgestreckter Zunge; sie streckt beide Hände von sich, die eine hebend, die andere senkend«. Die Beziehung auf Eris ist zuerst ausgesprochen im Arch. Intelligenzblatt 1837, S. 77. Cavedoni dachte im Bull. d. Inst. arch. 1844, p. 154 fg. an den Eurynomos. Zunächst wird man an eine der Gorgonen zu denken haben, für welche die Bärtigkeit durch Bildwerke genügend bezeugt ist (A 6)[1]).

Außerdem kennen wir zwei Vasen mit hellen Figuren, von denen je eine auf Eris bezogen ist, nur durch Beschreibung. Die eine (A 7) stammt aus Nola. Sie enthält auf der Vorderseite des Theseus Kampf mit dem Minotauros und auf der Rückseite eine beflügelte weibliche Figur, in Betreff deren Roulez Bull. de l'Acad. R. de Bruxelles T. X, n. 4, p. 388 glaubt, daß sie möglicherweise Eris darstelle. Das ist aber entschieden irrig. De Witte Cab. Durand n. 337 beschreibt die Darstellung also: Iris ailée, vêtue d'une longue tunique et coiffée d'un bonnet, tient de la main droite une fleur et de la gauche le caducée. Die andere Vase (A 8) ist die von H. Brunn Bullett. d. Inst. arch. 1853, p. 161 fg. beschriebene auf Adonis bezügliche der Sammlung Amati zu Potenza, in deren den Streit der Aphrodite und Persephone um den Besitz des Kindes Adonis darstellender oberen Figurenreihe nach G. Körte's

1) Ueber ein anderes hiehergezogenes Vasenbild sind wir minder genau unterrichtet. Panofka faßt in Gerhard's Hyperbor. Röm. Studien für Archäol. I, 1833, S. 260 als Eris eine weibliche mit vier Flügeln versehene Figur auf einem »im ältesten Stil gemalten Gefäße« der Panitteri'schen Sammlung aus Girgenti in München, in »kurzem rothen Chiton«, deren Gesicht »völlig medusenhaft mit fletschenden Zähnen und heraushängender Zunge« dargestellt sei. Ich kann eine ganz gleiche Vase in Jahn's Beschreibung der Vasensammlung König Ludwigs nicht finden. Auch die S. 236 unter n. 758 beschriebene stimmt nicht überein.

Dafürhalten (Ueber Personificationen psychologischer Affecte in der späteren Vasenmalerei, Berlin 1874, S. 78) in der Frau in Amazonentracht mit Lanze und Bogen und in der mit kurzem Chiton bekleideten, geflügelten möglicherweise Nike und Eris zu erkennen sind. Er fügt jedoch hinzu, daß nach der Beschreibung, welche noch besonders auf die »cattive ristaurazioni« der Vase aufmerksam mache, kein sicheres Urtheil zu fällen sei. Inzwischen sind wir überzeugt, daß mit Sicherheit behauptet werden kann, mit jenen beiden Figuren seien Nike und Eris nicht gemeint. Körte scheint nicht gewußt zu haben, daß Stephani schon in den Annali d. Inst. Vol. XXXII, 1860, p. 316 fg. eingehend über die Darstellung gehandelt hatte. Dieser bezeichnet die erst erwähnte Figur als Artemis, woran kein Zweifel gehegt werden kann (Artemis findet sich auch in der nahestehenden Darstellung auf der Vase im Museo naz. zu Neapel, vgl. Bull. arch. Nap., N. S., VII, 9 und Heydemann Vasensammlungen des Mus. naz. zu Neap. S. 808 fg., n. 702). Hinsichtlich der anderen Figur äußert Stephani die Ansicht, sie sei un' Erinni, o, cio che pare piu probabile, la solita compagna di Proserpina, Ecate. Ueber diese Deutungsweisen läßt sich allerdings streiten. Faßt man die geflügelte Frau als Nike, so kann diese bezeichnen, daß Persephone in dem von Zeus abgehaltenen Gericht (Apollodor. Bibl. III, 14, 4, Hygin. Astron. II, 7), welches in dem Vasenbilde dargestellt ist, und zwar so, daß Aphrodite den kleinen Adonis in den Armen hält, als gehöre er nur ihr, den Sieg davon trage, insofern als auch der Persephone der Besitz des Adonis für eine gleiche Zeitfrist zugesprochen wird. Was die Annahme einer Eris betrifft, so erregen nicht bloß die Flügel der betreffenden Figur Bedenken, sondern auch der Umstand, daß die Anwesenheit der Eris bei einer gerichtlichen Verhandlung, obgleich diese allerdings als Streit gefaßt werden kann, für keinen anderen Fall auf Bildwerken nachweisbar ist.

Unter den herausgegebenen Bildwerken, welche zugleich meist mehrfach beschrieben und besprochen sind und deshalb hier nur in den Fällen, in welchen die Abbildungen in minder zugänglichen Werken mitgetheilt sind, genauer beschrieben zu werden brauchen, nehmen den ersten Platz ein die Vasenbilder mit schwarzen und mit hellen Figuren, auf denen die betreffende Figur durch Namensinschrift als Eris bezeichnet ist oder sein soll.

Diese sind das auf der früher im Besitz Gerhard's, jetzt wohl im Berliner Museum befindlichen Vase, welches in Gerhard's Flügelgestalten Taf. II, n. 5 und in dessen Ges. Abhandl. Taf. X, n. 5 abgebildet ist (B 1), und das auf der Vase de Witte's in Gerhard's Flügelgest. Taf. II, n. 6 u. Ges. Abh. T. X, n. 6, sowie in dessen Aus-

erl. Vasenbild. Taf. XX. XXI (B 2), hinsichtlich dessen Inschrift zwischen den Lesungen Eris und Iris geschwankt wird[1]).

Die hellfigurigen Vasenbilder mit dem beigeschriebenen Namen der Eris beziehen sich auf das Urtheil des Paris. Sie sind das in Carlsruhe befindliche bei Creuzer Zur Gall. d. alten Dramat. T. I oder Zur Archäol. III, Nr. 1 E. Braun Il giudiz. di Paride rappresentato sopra tre ined. monum., Parigi 1838, t. I, und Gerhard Apul. Vasenbilder Taf. D 2 (B 3) und das der K. Ermitage zu St. Petersburg (Stephani Vasensammlung n. 1807) im Compte rend. pour 1861, Taf. III, n. 2 (B 4).

Unter den schwarzfigurigen Vasenbildern ohne Namensinschrift der betreffenden Figur mögen an erster Stelle erwähnt werden zwei uns nur durch Abbildung in Gerhard's Flügelgestalten Taf. II und Ges. Abh. Taf. X bekannte einzelne Figuren auf Vasen unbekannten Aufbewahrungsortes, n. 2 (mit Gorgonenantlitz, kurzem Chiton und Fell, Flügelstiefeln), n. 4 (mit vier Flügeln, über dem Leib geknüpften Fell, rückblickend im Lauf) — B 5, a, b —; dann das früher in der Pizzati'schen Sammlung, dann im Besitz des Herrn Rollin zu Paris befindliche von Roulez a. a. O., dann in Gerhard's Auserl. Vasenb. T. CCCXXV, n. 1 herausgegebene, auf welchem allein die auch an den Füßen beflügelte Figur mit einer Kopfbedeckung, dem Petasos, versehen ist (B 6). Weiter handelt es sich um zwei Vasen, auf denen die in Rede stehende Figur gorgonenartig mit verbildetem Gesichte dargestellt ist, die Adrastosvase im K. Museum zu Kopenhagen (Ann. d. Inst. arch. Vol. XI, 1839, tav. d'agg. P, Overbeck Gall. her. Bildw. Taf. III, n. 4, Gerhard Flügelgest. Taf. II, n. 1 = Ges. Abh. T. X, n. 1, Arch. Ztg. 1866, T. CCVI, 2), in Betreff deren die zuletzt von Heydemann in der Arch. Ztg. a. a. O. S. 151 vertretene Deutung der Figur keinesweges die ein-

1) Während Stephani schon im Ausruhenden Herakles S. 255, Anm. 4 äußerte, daß auf dem in Rede stehenden Gefäß die auf Iris lautende Inschrift gewiß nur durch Beschädigung des I am Anfang aus ΕΡΙΣ entstanden sei und die Ansicht, daß die Inschrift auf Eris deute, auch im Compte rend. p. 1861, p. 50, A. 3 und p. 1862, p. 144, A. 1 mehr oder minder bestimmt ausspricht, giebt Gerhard noch in den Ges. Abhandlungen I, S. 349, zu n. 6 an, die Inschrift bezeichne die Figur als Iris, »ihre Erscheinung in Mitten zweier gegen einander ziehenden Streitwagen stimme zur Person einer versöhnenden Götterbotin«. Daß Eris gemeint sei, ist ebenso wahrscheinlich als es sicher steht, daß es sich nicht um Verderbniß durch Beschädigung handele. Wenn noch Roulez a. a. O. p. 387 annahm, daß ΙΡΙΣ nur eine verschiedene Form von ΕΡΙΣ sei, indem er auf Hesych. s. v. Ἶρις verwies, so wird ihm jetzt schwerlich noch Jemand beistimmen. Man wird einen Schreibfehler des Vasenmalers vorauszusetzen haben.

zige in Vorschlag gebrachte ist (B 7), und die berühmte François-Vase, nach Gerhard Arch. Ztg. 1850, S. 274, A. 61 (B 8); dann um die Vase des Xenokles, früher in der Sammlung Blacas zu Paris, jetzt also im Brit. Mus. (Panofka Mus. Blacas pl. XIX, C), hinsichtlich deren der erste Herausgeber p. 58 fg. an eine Gorgone dachte, während sich der von de Witte Cat. Magnoncour n. 50, A. 3 und Roulez a. a. O. p. 386 befürworteten Beziehung der Figur auf Eris auch Brunn Gesch. d. Gr. Künstler, II, S. 740 anschließt (B 9). Ferner sind zu erwähnen die von Gerhard Auserl. Vasenb. Taf. CXCIV und von de Witte in den Mon. ined. d. Inst. arch. Vol. III, t. L herausgegebene früher Feoli'sche Tyrrhenische Amphora, auf welcher nach Gerhard Th. III, S. 91 fg. Diomedes ein Schild »mit drohendem Erisbilde« hält (B 10), und drei im Brit. Museum aufbewahrte Vasen: die in Gerhard's Auserl. Vasenb. T. XCII abgebildete, im Catal. d. Brit. Mus. unter n. 474 verzeichnete, auf welcher nach dem Index Vol. II, p. 309 Eris dargestellt sein soll, ob etwa in dem Vol. I, S. 63 erwähnten female head with long, flowing hair, bound with a sphendonê? (B 11); die in Inghirami's Vasi fittili t. XLIII abbildlich mitgetheilte, im Catal. unter n. 477 aufgeführte, von de Witte Descr. n. 106 besprochene (B 12), die ebensowenig weiterer Berücksichtigung bedarf als B 11; endlich die in der Él. d. mon. céramogr. I, pl. LXI, mit der Darstellung der Geburt der Athena aus dem Haupte des Zeus, wo nach dem Catal. n. 544 unter dem Sessel dieses Gottes a winged female figure looking back, probably Eris, with a short chitôn over which hangs a panther's skin, and talaria zum Vorschein kommt (B 13). Die Deutung auf Eris wurde zuerst, und zwar als unzweifelhaft gegeben von de Witte Descr. n. 6, p. 4.

Die durch Abbildung bekannt gewordenen Vasen mit hellen Figuren, auf denen man ohne eine auf Eris lautende Inschrift diese hat erkennen wollen, sind: die Berliner bei Raoul-Rochette Monum. inéd. pl. XXXV, und Gerhard Apulische Vasenbilder, Ergänzungstaf. A. 6, vgl. R.-Rochette p. 194 fg., Gerhard Berlins Ant. Bildw. I, 285, Apul. Vasenb. S. 29, Luebbert, Ann. d. Inst. arch. Vol. XXXVII, 1865, p. 123 fg. (C 1); die sogenannte, aus Tarquiniensischen Ausgrabungen stammende, im J. 1837 im Besitz eines Capitän Freudenreich befindliche Schale des Protomachos, deren in den Monum. ined. d. Inst. arch. Vol. II, t. XLIV, a, unter B gegebenes Innenbild E. Braun Annali Vol. IX, p. 198 zuversichtlich auf Eris bezog (C 2)[1]);

1) Ich glaube nicht zu irren, wenn ich diese Vase den hellfigurigen zuzähle, obgleich E. Braun weder in den Annali a. a. O. p. 189 fg. noch in dem Bullett. 1837, p. 37 auch nur ein Wort über die Farbe der Figuren verlauten läßt.

die Schale des Sosias im Berliner Museum, mehrfach abgebildet, auch in den Denkm. d. a. Kunst Bd. I, Taf. XLV, vgl. den Text S. 36 fg. d. zw. Bearb. (C 3); die mit der öfter, zuerst von Millin Peint. de Vas. T. II, pl. XXVI und Gall. myth. pl. XXX, n. 93, zuletzt von Gerhard Lichtgottheiten Taf. III, n. 5 = Ges. Abh. T. VII, n. 5 abbildlich mitgetheilten Darstellung der fahrenden »Eos« und der ihr mit Fackeln in den Händen voraufschreitenden »Artemis« oder »Hekate« oder »Iris«, von denen Stephani im Compte rend. p. 1862, p. 144, die erstgenannte Figur für Nike und die zweite für Eris oder Lyssa hält (C 4); die jetzt zu Petersburg befindliche (Stephani Vasensamml. der K. Ermitage n. 428), bei Minervini Monum. di Barone t. XXI, auf welcher die in der Rechten eine Fackel und in der Linken zwei Speere haltende Figur von Stephani Compte rend. pour 1862, p. 144, A. 1, sowie im Catalog der Vasensamml. d. K. Ermitage a. a. O. und von Anderen auf Eris bezogen ist (C 5); die von Stephani im Compt. rend. 1860, pl. II herausgegebene Petersburger Vase, deren eine Figur Strube Bilderkreis von Eleusis S. 86, Anm. auf Eris deutete, wogegen sich Körte a. a. O. S. 82 mit Recht ausspricht (C 6); die früher Campana'sche, jetzt in Petersburg befindliche (n. 419 des Cat. von Stephani) in den Mon. ined. d. Inst. VI u. VII, t. LXXI, 1 abgebildete Vase, nach H. Brunn Bull. d. Inst. 1861, p. 67, dem Körte a. a. O. S. 77 fg. beistimmt (C 7); die im Louvre zu Paris aufbewahrte Vase von Milo mit der Darstellung des Gigantenkampfs, welche F. Ravaisson in den Monum. Grecs publ. par l'associat. pour l'encouragement des études Gr. en France Vol. I, n. 4 (1875), pl. I u. II herausgegeben hat, vgl. Heydemann Gigantomachie auf einer Vase von Altamura, Halle 1881, S. 15 fg. (C 8); endlich, um auch diese nicht zu übergehen, die im Tischbein'schen Vasenwerke I, pl. XXI der Florentiner Ausgabe abgebildete Schale, deren Innenbild de Witte Cab. Durand n. 368 so erklärt: Iris vêtue d'une tunique talaire et d'un péplus, et munie de grandes ailes, présente un casque à Amphiaraus et le décide à partir pour la guerre contre les Thébains, und die ebenda I, pl. IV herausgegebene, auf welcher de Witte a. a. O. dargestellt erachtet: Iris munie d'un caducée, présente un casque à un éphèbe, indem er in Beziehung auf beide Darstellungen bemerkt, nous prenons ici Iris dans l'acception d'Éris. Daß dieses unzulässig ist, bedarf keiner weiteren Bemerkung. Es ist zudem mehr als wahrscheinlich, daß man die betreffende Figur in beiden Fällen für Nike zu halten hat. Dieselben können mithin ganz unberücksichtigt bleiben[1]).

1) Die Zulässigkeit der Beziehung beider Figuren auf Eris stellte auch

An die bemalten Vasen mit hellen Figuren schließt sich zunächst die aus Athen stammende, zuerst im Besitz Fauvel's, dann in der Sammlung Pourtalès (Dubois Descr. d. antiques d. M. le comte Pourtalès-Gorgier Paris 1841, p. 32, n. 135), jetzt im Berliner Museum befindliche fragmentirte bemalte Terracottatafel, welche zuerst von Bröndsted Voy. et rech. en Grèce II, pl. XLII und jüngst von Benndorf Griech. u. Sicil. Vasenbilder Taf. IV, n. 2 herausgegeben ist. Eine Figur, von welcher nur ein Flügel übrig geblieben ist, hat sich in der die Athena angehenden Darstellung die Beziehung auf Eris gefallen lassen müssen. Daß Benndorf Recht hat, wenn er S. 19 in der Flügelfigur Nike voraussetzt, unterliegt uns keinem Zweifel.

Auch auf gestanzten und namentlich gravirten Metallwerken hat man Eris wiederholt erkennen wollen.

Wir erwähnen zunächst den im Mus. naz. zu Neapel befindlichen, in einem Grabe von Kroton entdeckten Spiegel, welcher zuerst von Minervini im Bullett. arch. Nap. N. S., II, t. III, dann von Gerhard in den Etrusk. Spiegeln Taf. CCXLIII a herausgegeben ist. Minervini bezog p. 188 die dargestellte Figur mit Gorgonengesicht auf Eris oder Lyssa; Gerhard hält es Th. III, Abth. 1, S. 240 für fraglich, ob lieber Eris oder Medusa in ihr zu erkennen sei (D 1).

Weiter handelt es sich um zwei uns nur durch Beschreibung bekannte Stücke, welche zu den fast durchaus durch Ausgrabungen in Etrurien zu Tage geförderten bijoux et objets en or der früheren Durand'schen Sammlung gehören und von de Witte im Cab. Durand verzeichnet sind: die Halskette n. 2087, in deren Mitte sich une plaque en or repoussé représentant Éris, munie de quatre ailes befindet, und die grosse bague, sur laquelle est gravée (en creux) Niké, ou plutôt Éris, entre deux palmes. Aber dort ist sicherlich eine Gorgone, hier ohne Zweifel Nike gemeint.

Dann gehören hieher Zeichnungen auf Etruskischen Spiegeln und auf einer Etruskischen Cista, in denen man noch in neuerer Zeit Eris dargestellt erachtet hat. Auf einem zuerst von Gori Mus. Etr. t. CXXIX herausgegebenen, in Gerhard's Etr. Spiegeln Taf. CCVII, n. 4 wiederholten Spiegel erscheint unterhalb der Darstellung des Parisurtheils an der Mündung des Griffs eine beflügelte sogut wie unbekleidete Frauengestalt, deren Beine aus einem Blüthenkelch hervorgehen. Ueber diese Figur bemerkt Welcker nach Gori noch in den A. Denkm. V, S. 429, n. 116, sie scheine die Eris zu sein. Auch Conestabile faßt sie in den Ann. d. Inst. arch. XXXVIII (1866), p. 364 fg.

Gerhard Auserl. Vasenb. Th. II, S. 4 fg. in Abrede, aber aus dem unhaltbaren Grunde, daß für Vasen späteren Stils die Annahme einer Eris unstatthaft sei.

als Eris. Gerhard dagegen, der übrigens in der Hauptdarstellung gewiß mit Unrecht Helena's Hochzeit mit Paris erkannt wissen wollte, dachte a. a. O. III, 1 S. 199 zunächst an die Siegesgöttin, und das ist entschieden wahrscheinlicher. Die Figur entspricht durchaus der an gleicher Stelle angebrachten bei Gerhard Taf. CCLVII, A (D 2). Wenn Gerhard a. a. O. S. 12 sich veranlaßt fühlt, in der nach rechts hin laufenden »bekleideten und mit einer Mütze bedeckten Flügelgestalt« auf dem Reliefspiegel Taf. XXX, n. 3 u. XXXII, n. 9 »eine feindliche Göttin, etwa eine Eris oder Erinys«, zu erblicken, so geschieht das ohne genügende Begründung und ohne alle Wahrscheinlichkeit (D 3). Auf einem anderen, zuerst von Dempster Etr. reg. I, t. II bekannt gemachten, bei Gerhard a. a. O. T. CLXIV wiederholten Spiegel, dessen jetziger Aufbewahrungsort unbekannt ist, sieht man Hercules und Minerva, umgeben von zwei Frauen, von denen die eine mit dem Namen Ethis, die andere mit dem Namen Eris bezeichnet ist (D 4). Der letztere Name findet sich auch in Beziehung auf eine ganz anders aussehende Frau in der auf »der Göttinnen Streit um Adonis« bezogenen Zeichnung des Volcentischen Spiegels im Museo Gregoriano zu Rom (I, 35), die zuerst herausgegeben ist in den Mon. ined. d. Inst. arch. Vol. II, t. XXVIII, zuletzt in Gerhard's Etr. Spieg. Taf. CCCXXIII (D 5). Ueber beide Darstellungen, namentlich die erstere, ist viel verhandelt. Man vergleiche Gerhard's Text Th. III, Abth. 1, S. 153 fg. und Th. IV, S. 58 fg. Man hat unter Anderem die »Eris« des ersteren Spiegels als Göttin des edlen Wettstreits gefaßt. Die »Eris« des anderen soll den Wettstreit der Göttinnen um Adonis »verdeutlichen« (so!). Es hat mich Wunder genommen, daß Stephani (der von Gerhard gar nicht berücksichtigt ist) im Compte rend. pour 1861, p. 51, Anm. 2 die von der »furchtbaren Eris« verschiedene, »mild und freundlich gesinnte Göttin gleichen Namens« anerkennt, da er doch »Nimbus und Strahlenkranz« S. 125 mit Recht bezweifelte, »ob es sicher sei, daß es sich überhaupt um einen griechischen Namen, also um die Göttin des Streits handle, nicht um einen ganz unverständlichen etruskischen Namen, also gar nicht die griechische Eris, sondern eine nicht näher zu bestimmende etruskische Göttin gemeint sei«. Beide Spiegel dürfen ohne Bedenken bei einer Untersuchung über die Griechische Eris ganz unberücksichtigt bleiben.

Die Cista, an welcher man eine Darstellung der Eris vorausgesetzt hat, ist die Barberinische von Conestabile in den Mon. ined. d. Inst. Vol. VIII herausgegebene. Die betreffende beflügelte und mit einem Chiton angethane Figur findet sich in der Darstellung des Parisurtheils t. XXVIIII. XXX rechts von Paris stehend (D 6). Die

Beziehung auf Eris rührt von Conestabile Annali XXXVIII, p. 362 fg. her. Schon Garrucci und Helbig sahen ein, daß vielmehr die Siegesgöttin gemeint sei (Bull. d. Inst. 1859, p. 98 fg., 1861, p. 157, Anm. 1, 1866 p. 18 fg.).

Die Eris aus der Sage über den Schönheitswettstreit der drei Göttinnen hat man auch auf zwei Sarkophagreliefs erkennen wollen, dem aus der Villa Albani, welches nach Zoega Bassir. ant. t. LII in den Denkm. d. a. Kunst Bd. II, Taf. LXXV, n. 961 wiedergegeben ist, und dem bei Beger Spicileg. antiquit. p. 131 u. 135, Bellum Trojan. 1 u. 7, Spence Polymetis pl. 34, O. Jahn über einige Darstell. des Parisurtheils in den Ber. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1849, Taf. IV, abgebildeten, von Zoega bei Jahn a. a. O. S. 57 fg., von Jahn S. 58 fg. und von Welcker A. Denkm. V, S. 422, n. 80 besprochenen der Villa de' Medici. In beiden Fällen beruht aber die Annahme einer Eris so entschieden auf Irrthum, daß wir dieselbe gar nicht weiter zu berücksichtigen brauchen. Ueber das Relief Albani genügt es auf den Text zu den Denkm. d. a. K. zu verweisen. Die von Zoega für Eris gehaltene Figur ist offenbar Victoria, wie schon Jahn urtheilte, und es kann nur befremden, wenn Welcker äußert, daß sie es »vermuthlich« sei.

Dagegen findet sich Eris aus dieser Sage unzweifelhaft dargestellt in einem Knochenrelief aus sehr später Zeit im Besitz des Grafen Fossati zu Babriano (Welcker a. a. O. S. 423, n. 81). welches E. Braun Il giudizio di Paride rappresentato sopra tre inediti monumenti, Paris 1838, als Vignette auf p. 13 herausgegeben hat. Hier erscheint sie im Begriff den Apfel zwischen die versammelten Götter zu werfen, mit nicht entstelltem Gesichte, reichlichem, auf die Schultern hinabfallenden Haare, in welchem sich keine Spur von Schlangen zeigt, aber ganz nackt (E).

Ganz nackt, aber mit Schlangen im Haare oder wahrscheinlich mit Schlangen als Haar und mit verzerrtem Gesichte, zudem mit einem Schilde am rechten Arme erblicken wir sie als Anstifterin blutiger Zwietracht am Boden liegend und von den Hufen des Rosses eines Römischen Herrschers zertreten auch auf einem vertieft geschnittenen Steine des Berliner Museums (Toelken Erkl. Verzeichn. Kl. V Abth. 2 n. 213), welcher in meiner Abhandlung über einige beachtenswerthe geschnittene Steine des vierten Jahrhunderts n. Chr. Abth. I, Gött. 1883, auf der Lichtdrucktaf. unter n. 5 abgebildet ist (F).

Endlich kommt sie auf dem Miniaturbilde bei A. Mai Virgilii picturae antiquae ex codicibus Vaticanis, Romae MDCCCXXXV, t. XLVI, unter sieben schattenähnlichen, ganz nackten, wie es scheint weiblichen, ohne Verbildung und irgendwelche Attribute dargestellten

namenlosen Figuren (ohne Zweifel Repräsentanten von in der Aeneis VI, 273 fg. aufgezählten Dämonen) als die achte auch schattengleich und ganz nackt, aber mit langen Haaren, welche in Schlangen bestehen, und allein durch eine Ueberschrift, DISCORDIA, bezeichnet. Ob auch die vittae cruentae angedeutet sein sollen, kann ich nicht sagen. Die Schattenähnlichkeit und Nacktheit der Discordia sowie der anderen Dämonen muß der Maler anderswoher genommen haben (G).

Unter den zahlreichen aufgeführten Bildwerken steht außer den mit unzweifelhaften Inschriften versehenen nur eins ganz sicher: das Knochenrelief aus später Zeit (E), und zwar nicht bloß durch die Darstellung im Ganzen, sondern besonders auch durch das Attribut des Apfels bei der betreffenden Figur. Doch fehlt es nicht an Figuren, deren Beziehung auf Eris mehr als wahrscheinlich, ja so gut wie sicher ist; freilich auch nicht an solchen, in Betreff deren dieses nicht statthat.

Wir wollen in dem Folgenden eine Betrachtung derjenigen, welche nach den oben bei Gelegenheit der Aufführung als nicht die Eris betreffend bezeichneten noch in Frage kommen, nach Maßgabe der Attribute, der Tracht, der attributiven Handlung, des Aussehens des Kopfes, namentlich des Gesichtes, und der nackten Theile des Körpers anstellen.

Zunächst mag ein Vasenbild zur Besprechung kommen, welches sich dem eben erwähnten Knochenrelief anschließen würde, wenn meine im Jahre 1854 ausgesprochene Annahme (Text zu den Denkm. d. a. K. Bd. I, S. 37 fg. d. zw. Bearb.), daß K. O. Müller's Beziehung der Darstellung an der Außenseite der Schale des Sosias auf die Hochzeit des Peleus und der Thetis die richtige und mit der weiblichen Figur zwischen Hestia und Amphitrite und den Horen, welche in der Linken ein Rund hält, Eris gemeint sei, sicher stände. Seitdem ist über die Sosiasschale mehrfach gehandelt: von Brunn Gesch. d. Griech. Künstler II, S. 733 fg., Preuner Hestia S. 170 fg., H. L. Ahrens Themis I, S. 46 fg., Kekulé Hebe S. 28, A. 2, Robert Comment. in hon. Mommseni p. 149 fg., Tümpel Ares und Aphrodite im 11ten Supplementheft der Fleckeisen'schen Jahrb. für class. Philol. S. 748 fg., Heydemann im Rhein. Mus. f. Philol., N. F., XXXVI, 1881, S. 466 fg. Robert und Heydemann sind der Ansicht, daß es sich bloß um ein allgemeines Göttersymposion im Palaste des Zeus handele, und betrachten die in Rede stehende Figur als zu den Horen gehörend, wie das auch schon früher geschehen ist. Trifft der erstere Theil dieser Ansicht das Wahre, so ist der Annahme der Eris der Boden entzogen. Daß aber die Figur eine Hore darstellen solle,

glaube ich auch so mit nichten. Viel mehr empfiehlt sich der Gedanke an Peitho, für welche als Tochter und engverbundene Genossin der Aphrodite der Apfel in der Linken ebenso wohl paßt, wie sie anderswo auf Vasenbildern die Iynx und eine Blumenranke hält [1]), und nicht minder die auch sonst auf Vasenbildern (Denkm. d. a. K. II, 58, 728) vorkommende Haube. Daß die ältere Kunst den Apfel der Eris nicht kennt, hat schon Welcker A. Denkm. V, S. 379 fg. bemerkt.

Auf den schwarzfigurigen Vasenbildern, den einzigen Ueberbleibseln aus der Periode der älteren Kunst, auf denen Figuren, welche man auf Eris bezogen hat, vorkommen, erscheint nur eine von diesen mit einem Attribute in der Hand, nämlich einer Gerte (»baguette«, »wand«), auf dem Vasenbilde des Brit. Mus. n. 474 (A 3), die hier doch wohl zunächst als Treibstecken zu fassen ist.

Von der Fackel finden sich erst auf späteren Vasenbildern Beispiele, die zudem keinesweges sicher stehen. Dieses gilt namentlich von dem Vasenbilde C 4, wo die betreffende Figur mit einer Fackel in jeder Hand, wenn die Wagenlenkerin Nike ist, gewiß mit größerer Wahrscheinlichkeit für Enyo zu halten ist als für Eris, um von der Lyssa zu schweigen. Aber auch in Betreff der mit größerer Wahrscheinlichkeit als Eris gefaßten Figur auf dem unteritalischen Vasenbilde C 5 läßt es sich nicht in Abrede stellen, daß sie nicht etwa für Lyssa, sondern für eine Erinys oder für Enyo gehalten werden kann (s. Excurs III), wenn ich meinerseits auch überzeugt bin, daß die Deutung auf Eris das Richtige trifft (s. Exc. IV).

Mit Waffen erscheint Eris auch erst in späterer Zeit, nicht bloß auf dem ebenerwähnten Vasenbilde C 5, sondern auch auf der Vase von Milo (C 8) und auf dem geschnittenen Steine des Berliner Mus. (F), auf welchen beiden Bildwerken sie nach unserer Ueberzeugung sicher steht (s. Exc. V). Als Waffen finden sich auf dem Vasenbilde zwei Speere, wie sie auch die Discordia bei Statius (s. oben S. 91) hat. Auch bei Quintus Smyrn. VI, 59 (s. oben S. 88) ist von einer Lanze die Rede. Auf dem Berliner geschnittenen

---

1) Ueber Apfel und Blume als Attribute der Aphrodite und die Beziehung des ersteren auf Hochzeit und Liebe vgl. Dilthey de Callimachi Cydippa p. 113 fg. und Helbig Ann. d. Inst. XXXVI, p. 463 fg. Die rundlichen Gegenstände, deren je einen die Sirene in Gerhard's Etr. Spiegeln Taf. CDXXIX, n. 2 in den Händen hält, sind gewiß nicht als »Eier«, sondern als Aepfel zu betrachten. Daß die Sirenen in Beziehung auf Hochzeit und Liebe standen, ist bekannt, wie auch ihre Verbindung mit Hera als Ehegöttin (Pausan. IX, 34, 2) und mit Aphrodite.

Steine kommt nur ein gewöhnlicher Schild zum Vorschein und ein solcher, aber von abweichender Form, zeigt sich auch auf der Vase von Milo (C 8) in der Linken der betreffenden Figur, welche in der Rechten eine Lanze hat. Der Schild wird bei der Eris nie ausdrücklich erwähnt, wohl aber kann er unter den τεύχεα bei Quintus Smyrn. X, 60 (s. oben S. 88) nebst dem Harnisch und dem Helm, von denen sich auf Bildwerken gar keine Spur findet, mitverstanden werden.

Das Schlangenattribut, welches bei den früheren und späteren Griechischen Schriftstellern nie ausdrücklich erwähnt wird, wohl aber bei Römischen, findet sich mit Sicherheit erst bei der Discordia auf dem geschnittenen Steine und auf dem Miniaturbilde (F)[1]) und zwar in beiden Fällen nur in Betreff der aus Schlangen bestehenden Haare. Schlangen als Haare sind bei dergleichen Wesen jünger als Schlangen im Haare. Jene kommen auf Bildwerken, wenn auch nur selten, bei der Gorgo vor. Sie werden unzweifelhaft erwähnt in der Beschreibung des dämonischen Wesens, welches man für eine Erinys hält, bei Achilles Tatius in Hercher's Erotici script. Graec. T. I, p. 41, 10 fg.: *γυνὴ φοβερὰ καὶ μεγάλη, τὸ πρόσωπον ἀγρία, ὀφθαλμὸς ἐν αἵματι, βλοσυραὶ παρειαί, ὄφεις αἱ κόμαι· ἅρπην ἐκράτει τῇ δεξιᾷ, ὃᾷδα τῇ λαιᾷ.* Ein Beispiel bietet zudem die Bellona bei Claudian in Eutrop. II, 110 fg. Auch Vergil dürfte, indem er der Discordia vipereum crinem zuschreibt, an Schlangen als Haare gedacht haben. Jedenfalls verstand ihn der Miniaturmaler so. Ob Gerhard Etr. Spiegel Th. III, S. 240 fg. der Figur des Spiegels von Kroton (D 1) mit Recht Schlangenhaar zuspricht, läßt sich bezweifeln. Sicher ist es, daß die Figur vor der Mitte des Körpers mit den Händen eine Schlange hält. Daß Eris gemeint sei, hat durchaus keine Wahrscheinlichkeit, zumal da die beiden sie umgebenden Vögel nicht Hähne zu sein scheinen, wie Minervini wollte, sondern Tauben, wie Gerhard annimmt. Unterhalb der nach rechts (vom Beschauer) hinlaufenden weiblichen Figur einer Vase, welche Passeri Pict. Etrusc. T. III, t. CCXCVII herausgegeben, Gerhard Flügelgest. Taf. II, n. 3 u. Ges. Abh. T. X, n. 3 unter den Darstellungen der Eris aufgeführt hat, gewahrt man eine Schlange, welche sich nach derselben Richtung hinbewegt. Wenn Gerhard in der Erkl. der Kupfertaf. S. 358 wegen der Schlange an Iris als Unterweltsbotin denkt, so ist das gewiß für minder wahrscheinlich zu halten. Aber auch gegen die Annahme einer Eris erhebt sich mehr als ein Bedenken (s. unten S. 111 fg.).

1) Wenn Creuzer der inschriftlich bezeugten Eris auf der Carlsruher Vase Schlangen zuschreibt, so ist das ein Irrthum. W. Fröhner »Die griech. Vasen und Terracotten zu Karlsruhe« erwähnt S. 25 nichts davon.

Zu den Attributen, welche am Körper haften, gehören außer den die Haare vertretenden Schlangen die Schulterflügel. Diese sind nach Maßgabe der mit der auf Eris lautenden Unterschrift versehenen Figur (B 1) den schwarzfigurigen Vasenbildern nicht abzusprechen. Die betreffende Figur hat zwei Schulterflügel, ebenso wie die Mehrzahl der anderen derselben Vasenart angehörenden, welche man auf Eris bezogen hat. Andere, in Betreff deren dasselbe statthat, erscheinen mit vier Flügeln, die gewiß der Beziehung auf Eris nicht im Wege stehen. Auch an den Füßen findet sich hie und da Beflügelung. Die auch anderen Schreckensdämonen der alten Kunst gegebene Beflügelung erklärt sich bei der Eris zur Genüge schon daraus, daß gerade in Betreff ihrer die Aufregung und das stürmische Dahineilen hervorgehoben wird.

Dagegen steht es mit der Annahme einer Eris mit Schulterflügeln auf Vasen mit hellen Figuren sehr mißlich. Das gilt besonders von der auf der früher Campana'schen Vase (C 7). Wenn wir auch den Einwendungen Stephani's gegen Brunn's Annahme, daß es sich nicht um die Eris aus der Parissage handeln könne, kein Gewicht beizulegen vermögen, so ist doch diese von Körte a. a. O. S. 77 fg. gebilligte Annahme schon an sich eine höchst gewagte. Conze, von dem die Beziehung der Darstellung auf jene Sage ursprünglich herrührt, betrachtet in den Ann. d. Inst. XXXIV, 1862, p. 269 die betreffende Figur come una specie di Furia, una *Ποινή*, un *δαίμων ἀλάστωρ*, qui accennando senza dubbio la punizione della guerra trojana, che avenne appunto in seguito del giudizio di Paride, come un inevitabile destino, secondo l'opinione volgare di quei tempi, voluto dal consiglio di Giove. Ihm schloß sich Conestabile Ann. d. Inst. XXXVIII, p. 363, A. 2 an. Aber was deutet denn auf eine Berathung der Götter über den Trojanischen Krieg auch nur mit einiger Sicherheit hin? Eine Erinys vermuthete zunächst auch Stephani im Cat. der Vasensamml. der Ermitage Th. I, S. 201, wie es scheint unabhängig von Conze, wenigstens erwähnt er dessen Aufsatz durchaus nicht. Er stellt aber die Deutung vorsichtig in Frage. Sollte nicht an Artemis zu denken sein, für welche die beiden Lanzen besonders gut passen? Die Göttin kommt nicht bloß in der ältesten Kunst beflügelt vor, sondern auch auf einem durch Herausgabe bekannten rothfigurigen Vasenbilde von etwas strengerem Stil (W. Fröhner Choix de vases Grecs inéd. d. prince Napoléon pl. I = Mus. de France, pl. 4), und auf anderen späteren, vgl. Fröhner Mus. p. 19 fg., anscheinend auch auf einem späteren von flüchtiger Zeichnung — ich meine das in der Vasensamml. des Mus. naz. zu Neapel bei Heydemann n. 3244 und zwar die S. 556 fg.

erwähnte unterhalb einer Darstellung des Parisurtheils »sitzende Flügelfrau, welche in der Linken einen Bogen hält und ihr Gesicht zu dem auf sie zugehenden Pan wendet« —, um von anderen späteren Bildwerken (Stephani Ann. d. Inst. XXXII, p. 3, 7, A. 1, Text zu Denkm. d. a. Kst. Th. II, H. 2, S. 247 d. dr. Ausg. zu n. 176, a) zu schweigen. Auch in dem jetzt in Berlin befindlichen Vasenbilde C 1 scheint mir die den Widder opfernde geflügelte Figur eher Nike als Eris sein zu sollen. Ueber das Innenbild der sogenannten Schale des Protomachos (C 2) ist es schwer genügend zu urtheilen, da der oberste Theil der betreffenden geflügelten Figur fehlt. Aber das läßt sich doch behaupten, daß kein zureichender Grund vorhanden ist eher an Eris als an Iris oder Nike zu denken namentlich an die letztere.

Was die Bekleidung betrifft, so erscheinen die hiehergezogenen Figuren auf den älteren Vasenbildern sowohl wie auch auf den jüngeren theils in langem theils in kurzem Chiton. Dieser ist auf einem späteren Vasenbilde, auf dem Eris sicher steht (B 4), mit langen Aermeln versehen, wie wir sie mehrfach auch bei den Erinyen finden; auf einem anderen späteren Vasenbilde (C 5) wird er von Kreuzbändern festgehalten, die ebenfalls nicht selten bei den Erinyen vorkommen. Auch die Stiefel dieser Figur erinnern an eine solche. Auf den älteren Vasenbildern findet sich namentlich über dem kurzen Chiton mehrfach ein umgeknüpftes Fell[1]), das in einem Falle als panther's skin bezeichnet wird (A 4). Daß in diesem Falle Eris gemeint sei, hat für uns sehr geringe Wahrscheinlichkeit. Was soll Eris unter dem Sitze des Zeus? Eine sichere Deutung zu geben, ist kaum möglich. Ganz besonders wird sich aber wegen des Platzes unter dem Throne der Gedanke an Iris empfehlen, namentlich wenn man vergleicht, was Callimachus Hymn. in Del. Vs 228 fg. über diese sagt:

ἦ, καὶ ὑπὸ χρύσειον ἐδέθλιον ἷζε κύων ὡς
Ἀρτέμιδος, ἥτις τε, θοῆς ὅτε παύσεται ἄγρης,
ἷζει θηρήτειρα παρ' ἴχνεσιν, οὔατα δ' αὐτῆς
ὀρθὰ μάλ', αἰὲν ἑτοῖμα θεῆς ὑποδέχθαι ὁμοκλήν.
τῇ ἰκέλη Θαύμαντος ὑπὸ θρόνον ἷζετο κούρη.
κείνη γ' οὐδέ ποτε σφετέρης ἐπιλήθεται ἕδρης,

1) Das Thierfell, bezw. die Nebris, über dem Chiton kommt auch sonst auf Vasen mit schwarzen Figuren bei beflügelten Weibern vor, z. B. bei Jahn Vasens. n. 158, 461, 464 (Micali Storia T. XCIX, n. 17), 465, denen Jahn vorsichtig keinen Namen giebt, in denen man aber mit gleichem oder noch größerem Rechte, als es in Betreff anderer geschehen ist, Eris voraussetzen kann.

οὐδ' ὅτε οἱ ληθαῖον ἐπὶ πτερὸν ὕπνος ἐρείσῃ·
ἀλλ' αὐτοῦ μεγάλοιο ποτὶ γλωχῖνα θρόνοιο
τυτθὸν ἀποκλίνασα καρήατα λέχριος εὕδει.

Hier ist der Thron allerdings der der Hera. Aber, daß Iris auch als Zeus' Botin galt, ist schon aus der Ilias bekannt. An der Felltracht der Botengöttin wird man um so weniger Anstoß nehmen dürfen, als dieselbe auch bei dem Botengott Hermes vorkommt. — Außerdem befindet sich unter den betreffenden Figuren eine, die entschieden eine Gorgone zu sein scheint. Das Fell zeigt sich auch als Tracht der vierflügeligen, rasch nach rechts dahineilenden Figur mit Gorgonengesicht auf der schwarzfigurigen Vase aus Vulci im Besitz des Marquis von Northampton bei Micali Monum. inediti, Firenze 1844, t. LI, n. 3, welche man zunächst für eine Gorgone halten wird. Die von vorn gesehene schreitende geflügelte Figur mit einem Thierfell unter dem kurzen Chiton auf einer schwarzfigurigen Vase der Sammlung K. Ludwigs (n. 11) erklärt auch Jahn ohne Bedenken als Gorgo. Bei der Medusa und ihren Schwestern steht die »Nebris« auf schwarzfigurigen Vasen sicher durch die Münchener bei Jahn n. 619 (Gerhard Auserl. Vasenbilder Taf. LXXVIII). Für die Felltracht der Eris fehlt ein gleich sicherer bildlicher Beleg. Doch scheint uns die Vase B 5b einen so gut wie sicheren zu bieten; vgl. auch A 4. Jedenfalls darf man die Möglichkeit derselben durchaus nicht in Abrede stellen. Die Tracht paßt für sie nicht bloß insofern, als sie ein furchtbares Wesen, sondern auch insofern, als sie Kriegsgöttin ist. Das Thierfell findet sich über dem kurzen Chiton liegend auch bei Kriegern z. B. auf der schwarzfigurigen Amphora, welche L. Urlichs in dem Verzeichn. der Antikensammlung der Univ. Würzburg, H. III, S. 46, n. 247 beschreibt. Auch auf der hellfigurigen Vase der Petersburger Ermitage C 5 hat die mit kurzem Chiton und Stiefeln bekleidete Figur ein Pantherfell, das aber nicht angethan ist, sondern vom linken Arm herabfällt, wie es sonst bei den Erinyen vorkommt, z. B. an der Münchener Vase von Canosa in den Denkm. d. a. Kunst I, 56, 275 a. Bei diesen findet sich auf den unteritalischen Vasen das Fell am häufigsten. Auf der von Altamura zu Neapel (Heydemann n. 2322) und der von Carlsruhe (Mon. ined. d. Inst. arch. Vol. II, t. XLIX = Arch. Ztg. 1843, Taf. XI, Creuzer Zur Archäologie III, Nr. 10) ist es augenblicklich über einen Fels gebreitet, auf welchem die Erinys sitzt; auf der ersteren wird es von einer anderen Erinys um den Hals geknüpft getragen [1]). Anderswo

1) Auf einer Etruskischen Urne sta in posizione tranquilla una Furia alata — munita di pelle di fiera sulla testa (Brunn Bullett. d. Inst. arch. 1859, p. 183).

erscheinen die Erinyen auch mit einem über dem Chiton liegenden gegürteten Thierfell, wie z. B. auf der eben erwähnten Vase von Carlsruhe [1]). Außer den Erinyen (denen schon Aeschylos Sept. 699 ein schwarzes Ziegenfell zuschreibt, wenn nicht der Ausdruck μελάναιγις auf die schwarze Sturmwolke zu beziehen ist) findet sich auf den späteren unteritalischen diese einige Male bei der Artemis vorkommende Tracht unter den weiblichen Schreckensdämonen nur noch bei der Lyssa, die außerdem darunter noch eine andere Felltracht hat (Mon. d. Inst. Vol. XI, t. XLII), vgl. Excurs VI. Daß die Felltracht auch auf den Vasen dieser Art der Eris gegeben werden konnte, darf schwerlich in Abrede gestellt werden, aber ebensowenig, daß dasselbe in Betreff der Enyo zulässig ist. Zunächst führt sie auf eine Erinys.

Auf der Vase von Milo (C 8) trägt die Eris, die als selbst sich am Kampfe betheiligend dargestellt ist, über dem langen Chiton eine Chlamys.

Der spätesten Zeit eigenthümlich ist die auf zweien der Griechisch-Römischen Werke, dem Knochenrelief E und dem geschnittenen Steine F, sowie auf dem Miniaturbilde G vorkommende gänzliche Nacktheit der Eris. Hinsichtlich des Knochenreliefs genügt es schon, an die Nacktheit der Nike in späteren Werken, Terracotten und Etruskischen Spiegeln, zu erinnern. In Betreff des geschn. Steines kann man etwa geneigt sein, dieselbe mit der Auffassungsweise Römischer Dichter (s. oben S. 89) in Zusammenhang zu bringen. Bei dem Miniaturbilde hängt die Nacktheit der Discordia gewiß mit dem Umstande zusammen, daß diese wie die bei ihr befindlichen Wesen als Unterweltsdämonen wie Schattenbilder von Todten (εἴδωλα, umbrae) dargestellt sind, welche dort und auch sonst auf Bildwerken dann und wann ganz nackt erscheinen.

Auch an weiblichem Schmuck fehlt es dem Körper sicherer Erisbilder auf bemalten Thongefäßen nicht ganz, nicht bloß bei der schönen Figur auf B 4, die im Haar und am Halse weiße Perlenschnüre hat, und bei dem Brustbild der Carlsruher Vase (B 3), an welchem sich Hals- und Ohr-Perlen zeigen, sondern auch bei der auf der alten Vase (B 1), welche mit einem Kopfschmuck und einem Armband versehen ist. Noch häufiger findet sich an dem Kopfe der als Eris gedeuteten Figuren ein irrelevanter Schmuck.

---

1) Nach Angabe von J. de Witte Notice sur quelques vases peints de la collect. de M. Al. Castellani, Paris 1866, p. 28, n. 37 hat auf einer Hydria mit der Darstellung des Orestes eine Erinys par-dessus de sa tunique une espèce de vêtement de cuir.

Dagegen kommt nur einmal eine eigentliche Bedeckung desselben vor, die in einer Art von Petasos besteht (B 6). Sie kann den Gedanken an Iris hervorrufen, die bekanntlich bei Sophokles und Aristophanes mit dem Petasos vorkommt (Aristoph. Av. Vs 1205 nebst dem Scholion p. 481 Dindorf). Eris wird auch als Abgesandte von höheren Göttern erwähnt, bei Homer Il. XI, 3 von Zeus, bei Antoninus Liberalis Transformat. XXXI von Hera. Aber es hat keinesweges Wahrscheinlichkeit, daß sie auf dem in Rede stehenden Vasenbilde gerade als solche gedacht werden soll. Noch unwahrscheinlicher ist die Meinung von Roulez a. a. O. p. 387, daß Eris in gewissen Fällen mit Iris identificirt sei: une raison peut-être qui aura favorisé le rapprochement de ces deux êtres allégoriques, c'est l'opinion répandue parmi les anciens que l'arc-en-ciel présageait la guerre, voy. Homer. Il. XVII, 547 sq.

Wir wollen nicht veranschlagen, daß sich auf Griechischen Bildwerken auch Krieger aus dem Leben mit dem Petasos dargestellt finden. Hinsichtlich der Eris, der Schwester und Gefährtin des Ares, bietet sich noch eine besondere Erklärungsweise. Die Kopfbedeckung gleicht sehr der Kausia, wie wir dieselbe auf Münzen Macedoniens und Thrakisch-Makedonischer Mischvölker finden. Ares galt als Gott der Thraker (Welcker Griech. Götterlehre I, S. 414). Schon in der Ilias XIII, 299 zieht er mit seinem Sohne Phobos von Thrake aus zu den Ephyrern oder den Phlegyern. Kallimachos nennt Hymn. in Del. Vs 64 u. 134 den Hämos und das Pangäon als seinen Sitz. Lateinische Dichter, deren Angaben sicherlich auf die früherer Griechischer zurückgehen, erwähnen auch die Discordia als im Thrakerlande hausend. Valerius Flaccus schreibt ihr Arg. II, 204 fg. Getica stabula zu. Statius läßt sie in der Theb. VII, 40 fg. im Palaste des Mars, den er Silv. I, 2, 53 als Geticus maritus Veneris bezeichnet, am Haemus wohnen. Durch die Kausia konnte also recht wohl die nordische Heimath der Eris angedeutet werden. Wir werden in Excurs V darzuthun versuchen, daß auf einem Vasenbilde aus der Diadochenzeit (C 8) etwas Aehnliches vorkommt, indem Eris mit einem Thrakischen Schilde versehen erscheint. Trifft diese Auffassungsweise in Betreff der Vase B 6 das Richtige, so enthält die Kopfbedeckung ein besonderes Indicium dafür, daß die in entsprechender Stellung, Handlung und Umgebung dargestellte Figur, wie sie namentlich auf schwarzfigurigen Vasenbildern vorkommt, auf Eris zu beziehen ist.

Die betreffende Darstellungsweise genügt übrigens schon an sich, um der Deutung auf Eris mehr als gewöhnliche Wahrscheinlichkeit zu verleihen. Die Stellung in der Mitte zwischen den beiden feind-

lichen Parteien, welche auch an der Lade des Kypselos vorkam, und das rasche Hineilen bald zu der einen bald zu der anderen, um sie zum Kampf anzureizen, erwähnen auch alte Schriftsteller, nicht bloß der oben S. 88 angeführte Quintus Smyrn. Die Vasenmaler haben die in Rede stehende Figur regelmäßig so dargestellt, daß sie nach der Partei rechts vom Beschauer laufend den Kopf nach der Partei links umwendet, und dadurch das Aneinanderhetzen beider Parteien besonders deutlich gemacht. Dazu kommen noch Geberden des Aufforderns, Aufreizens mit den Händen, namentlich einer, der linken. Die Geberden sind manchmal auffallend falsch gedeutet. So von Gerhard in den oben S. 95, A. 1 mitgetheilten Worten, sowie in dem, was er über die Vase B 6 sagt: »Eris, indem sie den herannahenden Wagen mit ihrer erhobenen Linken willkommen heißt, zugleich aber zurückblickt«. In beiden Fällen handelt es sich in Betreff der Geberde mit der Linken um ein Antreiben derer, nach welchen die *Ἔρις λαοσσόος* (Homer Il. XX, 48), *ἐποτρύνουσα ποτὶ κλόνον ἄσχετον ἀνδρας ἐλθέμεν* (Quintus Smyrn. V, 32 fg.), sich umblickt. Das Rückwärtswenden des Kopfes (nach rechts) findet sich auch bei der, wie es scheint, vereinzelt vorkommenden Figur auf der Vase B 7, von der man immerhin annehmen kann, daß sie aus einer entsprechenden größeren Kampfdarstellung entlehnt sei. Ob es sich hier um einen kriegerischen Kampf handelte, muß dahin gestellt bleiben. In derselben Haltung kommt Eris, wenn die Verfasser des Vasencatalogs des Brit. Mus. zu A 5 (s. oben S. 93) Recht haben, auch in Beziehung auf den Streit zwischen Agamemnon und Achilleus vor. Noch eigenthümlicher sind ein paar Fälle, die einen friedlichen Wettkampf betreffen, s. A 2 u. A 3. Beide Male befindet sich die in gleicher Haltung dargestellte Eris in der Mitte der beiden Wettstreitenden, während das Wettlaufen dort und das Wettfahren hier, wie es auf den ersten Blick scheinen kann, ganz unnatürlich nicht so dargestellt ist, daß Wettläufer und Wettfahrer sich nach derselben Richtung hin bewegen, sondern wie Krieger einander entgegen. Das ließe sich nur daher erklären, daß die in Rede stehende Compositionsweise ursprünglich für blutige Kämpfe erfunden und allmälich fast typisch geworden war. Doch ist es wohl wahrscheinlicher, daß man sich die Wettfahrt und den Wettlauf als auf zwei verschiedenen, aber dicht neben einander liegenden Bahnen ausgeführt denken soll um die Meta herum. Aber auch bei dieser Annahme drängt sich die Ansicht auf, daß den betreffenden Darstellungen solche der kriegerischen Eris zu Grunde liegen. — Daß das Sichumschauen und die Stellung in der Mitte aber selbst auf den schwarzfigurigen Vasenbildern für die zum Kampf aufreizende Eris nicht ausschließliches Motiv

war, geht schon aus der inschriftlich als Eris bezeichneten Figur auf dem Vasenbilde B 1 hervor. Das in eiligster Bewegung befindliche Weib hat man sich als nur einer Partei sich zuwendend zu denken, welche es mit der gehobenen Linken anfeuert, oder in die Flucht treibt, wie bei Quintus Smyrn. VIII, 325 fg. Wenn Welcker Gr. Götterlehre III, S. 209 nach Gerhard's Arch. Intelligenzblatt, Halle 1834, S. 27 von einer »schwarzen Eris mit Flügeln an den Schultern und Knöcheln, in schneidender Bewegung, die rechte Hand abwehrend erhoben«, spricht, so enthalten diese Worte nicht allein mehrere faktische Irrthümer, sondern in Betreff der Annahme einer abwehrenden Geberde auch etwas bei der Eris Unmögliches. Mit jener »Eris« hat große Aehnlichkeit die nicht nach rechts, sondern nach links hin gewendete und den rechten Arm hebende Figur auf dem Schilde an der Vase B 9, die man um so eher für Eris halten wird, als deren Darstellung auf Schilden auch durch Schriftstellen bekannt ist. Auch auf der Vase des Xenokles (B 8) kann Eris gemeint sein; aber die anderen an diesem Gefäße befindlichen Bilder deuten durchaus nicht auf sie hin.

Was endlich das Aussehen des Gesichts und des unbedeckten Körpers der uns erhaltenen Figuren betrifft, welche mit Sicherheit oder mit der größten Wahrscheinlichkeit auf Eris zu beziehen sind, so ist das Gesicht sowohl auf den früheren als auch auf den späteren Werken regelmäßig wesentlich ohne absichtliche Verzerrung und Häßlichkeit gebildet. Ja auf zweien der späteren Zeit angehörenden Vasenbildern, dem Petersburger B 4 und dem Pariser C 8, erscheint das Gesicht als ein schönes, auf jenem mit mehr sanftem, auf diesem mit mehr erhabenem Ausdruck. Ganz ähnlich findet man die Erinyen auf späteren Vasenbildern meist mit normalem, zuweilen schönem Gesichte dargestellt, wie auch Lyssa auf dem Vasenbilde in den Mon. ined. d. Inst. arch. Vol. XI, t. XLII mit keinesweges verbildetem erscheint. Aber die Erinyen sind doch auf Vasenbildern der späteren Zeit hie und da auch mit häßlichen, ja abschreckenden Gesichtern dargestellt, vgl. z. B. Denkm. d. a. Kst. II, 68, 862 u. II, 74, 957, sowie O. Jahn's Vasenbilder Taf. I, Stephani Compte rend. pour 1863, pl. 6. Von einer aufgestülpten oder einer großen krummen Nase, wie sie sonst zur Bezeichnung des Barbarischen auf Griechischen Werken angebracht sind (O. Jahn Arch. Beiträge S. 424, A. 33), findet sich bei der Eris auf Vasenbildern keine Spur. Selbst das späte Knochenrelief (E) zeigt nichts davon. Nur der Berliner Intaglio F zeigt sie mit offenbar häßlichem Gesichte. Hier steht die Darstellung der Eris unter dem Einflusse von Anschauungen, wie wir sie erst bei Lateinischen Dichtern finden, s. oben S. 89, die inzwischen in man-

chen Punkten an die Beschreibungen erinnern, welche Griechische Dichter, namentlich Aeschylos, auch Euripides, von den Erinyen geben. Mit dem furchtbaren Aussehen der Discordia geht es Hand in Hand, daß sie von den Lateinischen Dichtern als in der Unterwelt hausend gedacht wird, was sich bei keinem der erhaltenen Griechischen Schriftsteller findet. Man vergleiche Vergil Aen. VI, 273 fg. und Petronius Sat. p. 124 = 89, Vs 254 fg. (wo auch die der Discordia so nahe stehende Bellona als im Erebus wohnend erwähnt wird). Daß Eris auch in älterer Zeit nicht allein mit regelmäßigem, sondern auch mit sehr häßlichem Gesichte dargestellt ist, zeigen Pausanias' Worte über ihre Darstellung an der Lade des Kypselos zur Genüge, wenn auch Roulez a. a. O. p. 385, A. 5 es nicht glauben wollte. Ob aber die geflügelten Figuren mit Gorgonengesicht auf älteren Vasen (A 6, B 5 a, B 7, B 8) und dem Spiegel von Kroton (D 1), welche man auf Eris bezogen hat, diese in der That angehen, ist uns äußerst zweifelhaft[1]). Die betreffenden Figuren sind nie innerhalb eines Kampfes oder auch nur in entfernter Beziehung zu einem solchen dargestellt; ein paar von ihnen haben einen Bart; das Gesicht aller erscheint en face mit herausgereckter Zunge und meist auch mit gefletschten Zähnen. Die beiden letzterwähnten Umstände sind als charakteristische Eigenthümlichkeiten der Gorgonen bekannt. Hinsichtlich der Eris kann das Zeigen der Zähne und das Ausstrecken der Zunge nur dem als bezeugt gelten, welcher sich zu entschließen vermag, in der oben S. 89 angeführten Beschreibung des Petronius Vs 274 und 275 als auf der Anschauung älterer Bilder jener beruhend zu betrachten. Man hat gewiß an Medusa oder eine ihrer den Perseus verfolgenden Schwestern zu denken. Medusa zeigt sich auf einer von Micali Monum. ined., Firenze 1844, t. XLIV, n. 3 herausgegebenen schwarzfigurigen Vase des Marquis von Northampton in eiliger Flucht vor Perseus nach rechts hin laufend. Die Schwestern, die ebensowohl wie sie mit dem Kopf en face bärtig sowie unbärtig (Denkm. d. a. Kst. II, 71, 897 u. II, 72, 899) dargestellt sind, erblickt man auf einem Vasengemälde der Pinakothek zu München (Jahn Beschr. n. 910 u. Gerhard's Auserl. Vasenb. Taf. LXXXIX, 3. 4), sowie auf einem anderen des Mus. naz. zu Neapel (Heydemann n. 1767) den Perseus mit Schlangen in ihren beiden Händen verfolgend. Auch das Weib mit nicht entstelltem, aber en face dargestelltem Gesicht auf der oben S. 103 angeführten, von Passeri herausgegebenen Vase,

1) Wenn O. Jahn Vasensamml. K. Ludwigs S. CLII, A. 1070 von »weiblichen Gestalten mit gorgonenartigem Antlitz« spricht, »welche später durch die Inschrift ΕΡΙΣ bezeichnet werden«, so ist mir kein Beispiel davon bekannt.

welche trotz der schwarzen Farbe der Tracht, der Haare und der Flügel den hellfigurigen beizuzählen ist, kann recht wohl eine Gorgonenschwester sein. Die Schlange unterhalb der Figur, welche wie diese nach rechtshin eilt, ohne Zweifel in der Absicht einen Fliehenden zu verfolgen, hat auf den eben erwähnten Vasenbildern in den mit den Händen gehaltenen Schlangen der Schwestern der Medusa einen Pendant. Wie auf jener Vase die Schlange der Gorgone dieser selbstständig Hülfe leistet, so finden wir sonst die Schlange des Dionysos diesem im Gigantenkampfe beistehend und die Schlange oder die Schlangen der Athena mit dieser in den Kampf eilend. An der zuerst von Passeri abbildlich mitgetheilten Vase ist dieselbe Darstellung auf der Vorderseite und der Rückseite wiederholt. Ob aber deshalb zwei Gorgonen anzunehmen sind, muß dahingestellt bleiben. Daß sich mehrfach an den Seiten einer und derselben Vase dieselben Figuren wiederholen ohne zwei verschiedene Wesen derselben Art darstellen zu sollen, ist bekannt. Jedenfalls darf man in den Fällen, in denen nur eine gorgonenartige Figur dargestellt ist, die Möglichkeit, daß eine von den Gorgonenschwestern gemeint sei, nicht in Abrede stellen, wenn es zu Tage liegt, daß die Figur in der Verfolgung begriffen ist, wie auf der Vase bei Passeri, oder wenn sich annehmen läßt, daß sie klagend dargestellt sei, wie etwa auf der Vase A 6. Das Nächste ist allerdings, die eilig dahin laufende, hie und da auch mit einer Geberde des Entsetzens dargestellte einzelne Figur auf die von Perseus verfolgte Medusa zu beziehen.

Was den nackten Körper der Eris betrifft, so zeigt derselbe nicht einmal auf dem Berliner Intaglio, so viel man bei den geringen Dimensionen der Figur der Eris gewahren kann, Abnormitäten, wie das allerdings überhaupt die Regel ist[1]). Selbst die Charakteristik

1) Merkwürdig sind auf dem von Brunn in den Nuove Memorie d. Inst. di corrisp. arch. t. IV, t. 4 herausgegebenen Vasenbilde mit der inschriftlich bezeugten Gruppe der Dike und Adikia die kleinen Kreise mit je einem Punkte in der Mitte, welche sich an den Armen und Beinen der Adikia zeigen. Brunn hat p. 383 nichts Weiteres darüber zu sagen, als daß der Körper bedeckt sei di macchie che ricordano i cento occhi dell'Argo Panopte. Aber was sollen Augen am Körper der Adikia? Wollte man nun etwa an Flecken oder Geschwüre denken? Ich meines Theils kann mich nicht dazu entschließen, erinnere mich vielmehr der in den Jahrb. von Alterthumsfreunden im Rheinlande LIX, S. 83 zu Taf. IIII besprochenen, zum Theil sehr ähnlichen Beispiele der Tätowirung. Diese war bekanntlich bei den Thrakern und den ihnen verwandten Asiatischen Völkern üblich. Das häßliche Gesicht der Adikia hat eine große krumme Nase, das Zeichen des Barbarischen, und auf dieses sollte auch wohl die Tätowirung hindeuten, welche den Griechen gewiß nicht als schöner Schmuck erschien, so daß auch sie nach dem Gefühl dieser für eine γυναῖκα αἰσχράν (Pausan. V, 18, 1) sehr wohl paßt.

durch dunkele Hautfarbe, die uns auf dem Gebiete der Malerei schon seit Polygnots Zeiten bekannt ist und sich bei den Erinyen auf späteren Vasen, sowie bei ihnen und anderen furchtbaren Dämonen der Unterwelt auf späteren Etruskischen Wandgemälden (vgl. z. B. Denkm. d. a. Kunst I, 64, 336) findet, trifft man erst auf dem allerspätesten, an der äußersten Grenze des Alterthums stehenden Werke, dem Miniaturbilde G. Die dunkele Farbe der Discordia auf diesem rührt, wie die Nacktheit (oben S. 107), von den umbrae her. Daß dieselbe nicht auf Darstellungen aus früherer Römischer Zeit zurückzuführen ist, erhellt daraus, daß dem Dämon wie bei keinem Griechischen, so auch nicht einmal bei einem Lateinischen Schriftsteller dunkle Hautfarbe zugeschrieben wird; daß sie auch nicht von den Erinyen übertragen ist, daraus, daß sie sich bei diesen in jenen Miniaturen nicht findet.

Excurs I, zu S. 87.

Für den Umstand, daß die Annahme einer doppelten Eris nicht bloß dem Dichter der Werke und Tage zuzuschreiben sei, sondern auf der Anschauung des Griechischen Volkes beruhe, hat sich Stephani Compte rend. pour l'ann. 1860, p. 50 fg. ausgesprochen. Er meint, daß das »Räthsel« zweier Vasenbilder mit der Darstellung des Parisurtheils (s. unsere n. B 3 u. B 4), auf welchen beiden Eris »jedes äußeren Zeichens ihrer Furchtbarkeit entbehrt und die Gestalt einer zarten freundlichen Jungfrau angenommen hat«, und auf deren einem (B 4) außerdem »Themis, die Vorsteherin der göttlichen Ordnung und Rechtssprüche, einer mit ihrem eigenen Wesen in so feindlichem Gegensatz stehenden Göttin, wie Eris, vertraulich die Hand auf die Schulter legt«, sich nur durch die Annahme lösen lasse, »daß die Alten zwei ganz verschiedene Göttinnen desselben Namens unterschieden, die furchtbare, nur Unheil stiftende Schlachtengöttin und eine wohlwollende, den Menschen freundlich gesinnte Göttin des Wetteifers«, die in der Parissage anzuerkennen sei. Stephani scheint augenblicklich vergessen zu haben, daß die Vasenbilder aus einer Zeit stammen, in welcher auch die Erinyen in ihrer körperlichen Erscheinung meist nichts Furchtbares an sich haben, und daß andererseits ein späterer Griechischer Dichter selbst die Schlachtengöttin Eris der äußeren Erscheinung nach mit der Athena, der Artemis und der Amazone Penthesileia zusammenstellt (Quintus Smyrn. I, 363 fg., s. oben S. 89). Was aber die Verbindung von Eris und Themis betrifft, so sieht man überall nicht ein, was Themis auf dem Bilde soll, wenn es sich auf diesem bloß um »den Wetteifer dreier Göttinnen, von denen jede die übrigen an Schönheit zu übertreffen

hofft, um die Entscheidung eines ἀγὼν κάλλους« handelt. Denn wenn Stephani annimmt, die Handlung sei eine, durch welche Zeus »in Betreff der Schönheit der drei mächtigsten Göttinnen einen θεσμὸς feststellen lassen will«, so vermögen wir nicht uns dieser Annahme anzuschließen. Das traute Zusammenstehen von Eris und Themis und der Umstand, daß auch Zeus dargestellt ist, erklären sich daraus, daß das Vasenbild auf das Epos der Kypria zurückgeht, nach welchem Zeus in seinem weisen Rathe beschloß, die allnährende Erde von der Ueberzahl der Menschen zu erleichtern, indem er den großen Streit des Ilischen Krieges anfachte und dies zwar zunächst durch Eris bei der Hochzeit des Peleus und der Thetis. Nach den Kyprien ist also Eris hier Vollstreckerin von Zeus' Beschluß und daß die Repräsentantin der θέμιστες des Zeus ihr die Hand vertraulich auf die Schulter legt, erscheint als etwas ganz Natürliches. Dieselbe Auffassung findet sich auf der Karlsruher Vase mit der Darstellung des Parisurtheils, wie schon Welcker A. Denkm. V, S. 405, vgl. S. 381, dargethan hat. Die eine Eris der Griechischen Sage zeigt sich zweimal als eine solche, die zunächst harmlos scheinenden Wettstreit oder gar nützlichen Wetteifer zu Wege bringt, aus dem jedoch blutiger Krieg und Mord hervorgeht. Jenes hat statt in der Sage vom Schönheitswettstreite der drei Göttinnen; dieses in der auf Boios' Ornithogonie zurückgehenden Erzählung bei Antoninus Liberalis Transformat. XI. Beide Male (in der ersten Sage wenigstens nach der späteren Auffassung) ist es Rache, in Folge deren Eris ihre Thätigkeit entfaltet; dort Rache, welche sie ihrer selbst wegen nimmt, weil sie von der Hochzeit des Peleus und der Thetis ausgeschlossen wird (Tzetz. z. Lycophron 93, Servius z. Vergil. Aen. I, 27, Chariton I, 1, T. II, p. 6, 10 der Ausg. der script. erot. von Hercher), hier Rache im Auftrage der Hera, die darüber zürnt, weil Aëdon und Polytechnos geäußert hatten, sie liebten sich einander mehr als Hera und Zeus. Eris gehört, wie J. Langbehn »Flügelgestalten der ältesten griech. Kunst«, München 1881, S. 137 richtig bemerkt, zu den Wesen, welche von rein begrifflichem Ursprung sind und nachträglich erst einen mythischen Gehalt angenommen haben. Wie das Wort ἔρις, durch welches der Begriff des blutigen Streites ausgedrückt wird, ganz dasselbe ist, wie das Wort ἔρις, welches zur Bezeichnung des Wettstreites und Wetteifers dient, so hat man auch die personificirte Eris, die als Veranlasserin beider verschiedenen Thätigkeiten gilt, als ein und dasselbe Wesen zu fassen. Wie nahe auch im Menschenleben Groll und Zwietracht einerseits und Nacheiferung und Wetteifer andererseits stehen, braucht nicht erst bemerkt zu werden. Die Bedeutung der personificirten Ἔρις entwickelt sich in Zusammen-

hang mit der Bedeutung des Wortes ἔρις. Die älteste Beziehung der Eris, die, welche uns in der Ilias entgegentritt, ist die auf blutigen Streit. In der Ilias wird das Appellativ ἔρις durchaus in der Bedeutung von Krieg und Schlacht gebraucht. In der Odyssee bezeichnet es gewöhnlich den Wetteifer, Wettstreit. In der Stelle bei Hesiod in den Werken und Tagen bezieht sich von den Ἔριδες die eine auf Krieg und unblutigen Streit, die andere auf nützlichen Wetteifer. Hinsichtlich der ersteren vergleiche man Vs 14 fg.:

ἡ μὲν γὰρ πόλεμόν τε κακὸν καὶ δῆριν ὀφέλλει,
σχετλίη· οὔτις τήν γε φιλεῖ βροτός, ἀλλ' ὑπ' ἀνάγκης
ἀθανάτων βουλῇσιν Ἔριν τιμῶσι βαρεῖαν.

Unter δῆρις ist unblutiger Streit zu verstehen, namentlich der vor den Gerichten, zu welchem die Ἔρις κακόχαρτος (Vs 28) anreizt. Auch unter den Kindern der Eris in der Theogonie beziehen sich die, welche Vs 229 nennt:

Νείκεά τε ψευδέας τε Λόγους Ἀμφιλογίας τε,

hauptsächlich auf die Gerichte. Wenn Eris überhaupt einen Cultus hatte, wie man etwa geneigt sein könnte aus den Worten in den W. u. T. 14 fg. zu schließen — anderswo verlautet, so viel ich weiß, nichts darüber —, so hatte sie denselben gewiß nur als Kriegs- und Schlachten-Gottheit. Als solche erscheint sie auch ganz vorzugsweise auf den Werken der bildenden Künste. Auf den älteren treffen wir sie einige Male auch bei Wettkämpfen (s. S. 109, A 2 u. A 3). Die Fälle, in welchen sie als in der Parissage betheiligt auf Werken aus späterer Zeit dargestellt ist, gehören in die Kategorie des unblutigen Wettstreits und der des blutigen Streites zugleich. Von der Eris als Veranlasserin gerichtlichen Haders und nützlichen Wetteifers findet sich auf den Bildwerken keine sichere Spur.

Excurs II, zu S. 88.

Wenn Goettling noch in der Anmerkung zu Hesiod. scut. Herc. 339 seine schon früher vorgetragene Ansicht wiederholt hat, nach welcher unter πολέμοιο τέρας die Aegis zu verstehen sein soll, so ist das nicht so auffallend, als daß noch in der so eben erschienenen dritten Auflage von Nägelsbach's Homer. Theologie S. 96 die Goettling'sche Ansicht als allein der Berücksichtigung werthe mitgetheilt wird. Dieselbe ist aber ohne Zweifel ganz irrig. Die Aegis, um welche es sich hier handelt, findet sich sonst bei der Eris nie. Wenn diese nach Homer. Il. V, 740 auf der Aegis der Athena ist, so verschlägt das gar nichts. Daß das Wahrzeichen des Krieges bei Homer der Eris von Zeus zeitweilig verliehen sei, der diese allerdings absendet, wie Apollon die Aegis in der Ilias XV, 307 fg., 360 fg.

von Zeus hat, kann man doch nicht wohl sagen, und, selbst wenn man es doch wollte, wäre dagegen zu bemerken, daß die Aegis wohl zum Niederschmettern, nicht aber zum Anfachen des Kampfes dienen kann. Köppen wollte einen Speer oder eine Geißel verstanden wissen. An letztere, welche allerdings Bellona auf dem Schilde des Aeneas bei Vergil Aen. VIII, 703 führt und die auch bei Silius Ital. IV, 440 und bei Lucan Phars. VII, 568 als ihr Attribut erwähnt wird, ist aber ohne Zweifel nicht zu denken, wenn auch, wie es scheint, Eris selbst schon auf einem schwarzfigurigen Vasenbilde mit einem Treibstecken vorkommt. Eher würde der Speer passen, und zwar noch besser als das Schwert, welches alte Erklärer verstanden; vgl. etwa Quintus Smyrn. X, 59 (s. oben S. 88), und, wenn es erlaubt ist die Römische Symbolik zu berücksichtigen, die Lanze des Fetials (Preller Röm. Mythol. Bd. I S. 250 der dritt. Aufl.). Aber auch der Speer muß hinter der Fackel zurückstehen, die ebenfalls schon von alten Erklärern angenommen wurde. Zur Begründung dieses Urtheils kann freilich die Angabe des Scholiasten zu Euripides Phoen. 1377, Bd. V, p. 282 fg. der Ausg. von A. Matthiae nicht verwandt werden, welcher berichtet: *Ἐχρῶντο κατὰ τὸ παλαιὸν ἐν τοῖς πολέμοις ἀντὶ σαλπιγκτῶν πυρφόροις· οὗτοι δὲ ἱεροὶ ἦσαν Ἄρεως ἑκατέρας στρατιᾶς προηγούμενοι μετὰ λαμπάδος, ἣν ἀφιέντες εἰς τὸ μεταίχμιον ἀνεχώρουν ἀκίνδυνοι, καὶ οὕτως συνέβαλον αἱ στρατιαί*[1]), obgleich nicht bloß Meursius zu Lykophron's Al. 1295, sondern auch Welcker noch in der Archäol. Ztg. 1857, S. 52, A. 3, und Preller a. a. O. Anm. 1 jener Angabe Gehör schenkten. Welcker und nach ihm Preller schließen aus dieser sogar, daß zur Kriegsankündigung von dem *πυρφόρος* eine Fackel in das feindliche Land geworfen sei. Aber das, was die Scholiasten berichten, beruht einzig und allein auf Mißverständniß der Stelle des Euripides (über welche zu vergleichen J. Geel Eur. Phoen. p. 215, z. Vs 1382) und auf dem ganz irrthümlichen Herbeiziehen der Spartanischen *πυρφόροι*, über welche zu vergleichen Xenophon de rep. Laced. 13, 2 mit Haase's Anmerkung und was C. Fr. Hermann Lehrb. d. gottesdienst. Alterth. § 33, A. 9 anführt. Desgleichen beweist die von Welcker nach Meursius herbeigezogene Stelle des Lykophron Al. 1295, in welcher es von Europa und Asia heißt: *ἔχθρας δὲ πυρσὸν ἦραν*, durchaus nichts. Schon ein Scholiast erklärt richtig: *μάχης φλόγα ἀνῆψαν*. Ich kenne auch kein Bildwerk, auf welchem der *πυρφόρος* mit der Fackel als Kriegszeichen

1) Im cod. Aug. steht nach Matthiae A. 6: *πρὸ τῆς εὑρέσεως τῆς σάλπιγγος ἐν ταῖς μάχαις κἂν τοῖς μονομάχοις δὲν* (Matthiae leg. *κἂν τοῖς μονομάχοις δὲ*, richtiger: *μονομαχίοις*) *ἐν μέσῳ τις λαμπάδα κατομένην ἔῤῥιπτε, σημεῖον τοῦ κατάρξασθαι τῆς μάχης.*

dargestellt wäre. Freilich meint Welcker zu Müller's Handb. d. Archäol. § 322, A. 4, S. 461, das zu Wien befindliche Mosaikbild so deuten zu können, welches Arneth Beschr. d. zum K. K. Münz- und Ant.-Kab. gehörigen Statuen u. s. w., Wien 1845, S. 15, n. 101 aufführt. Arneth dachte an »Alexander Persepolis anzündend«. Das Werk ist seitdem besprochen in E. von Sacken's u. Fr. Kenner's Beschreibung der Wiener Sammlungen, W. 1866, S. 53 fg., n. 101: »Ein geharnischter, behelmter Krieger, eine Fackel schleudernd, hinter ihm drei andere mit phrygischen Mützen, Speer und Schild und ein wie es scheint fliehender, ebenfalls in Asiatischer Tracht (ein Bogenschütze?). Wahrscheinlich der Kampf bei den Schiffen (oder Alexander Persepolis anzündend?). Sehr gute Arbeit in der Art der Alexander-Schlacht«. Wer wird daran zweifeln können, daß Hektor und die Epinausimache gemeint ist? — Aber wenn auch das in den Euripideischen Scholien Vorgetragene auf Irrthum beruht, so steht es doch sicher, daß die Auffassung der brennenden Fackel und des lodernden Feuers als Symbol des Krieges und der Schlacht eine uralte und die am meisten verbreitete ist. Bezeichnet doch in der Griechischen Sprache schon bei Homer ein und dasselbe Wort *δαΐς* sowohl die brennende Fackel, den Feuerbrand, als auch Krieg und Schlacht. Genügend bekannt sind ferner die Homerischen Redensarten *ἐνοπή, ἔρις, μάχη, πόλεμος δέδηε*. Euripides gebraucht den Ausdruck *πολεμία φλόξ* (bei Lyc. 161). Florus Epit. II, 9, 1 spricht von faces belli. Noch ein später Lateinischer Schriftsteller, Eumenius, sagt im Panegyr. Constantin. Caes. XVII, 4 flagrat bellum. Daher wird die Fackel Kriegsgottheiten gegeben, nicht bloß der Römischen Bellona, wie man gewöhnlich annimmt, vgl. Statius Theb. IV, 6, X, 854, XI, 413, Sil. It. V, 220, Ammianus Marcellin. XXIV, 7. Auch Minerva kommt mit der Kriegsfackel vor, soviel ich weiß bloß auf Bildwerken. So auf dem Attischen Relief in der Arch. Ztg. 1870, Taf. 30, n. 2 und, besser, bei R. Schöne Griech. Reliefs Taf. XXII, n. 95. In der Statue bei Paciaudi Mon. Pelop. I, 35 und danach bei Millin Gal. myth. pl. XXXVII, n. 137 löscht die inschriftlich bezeugte Athena Eirenophoros die Fackel aus, wie nach Statius Theb. XI, 413 restinxit Bellona faces. Was Eris betrifft, so haben wir die Fackel bei derselben wenigstens bei Petronius (s. oben S. 89) sicher bezeugt gefunden und werden unten Exc. IV darthun, daß auf einem Vasenbilde aller Wahrscheinlichkeit nach die mit dem Fackelattribute versehene Figur auf sie zu beziehen ist.

Excurs III, zu S. 102.

Die Erinyen erscheinen auf entsprechenden Vasenbildern mit

Speeren versehen, zweien oder einem, vgl. z. B. Stephani Vasensammlung d. Erm. n. 419 u. 523, Arch. Ztg. 1843, Taf. XI. Hier hält eine von den Erinyen die Lanze in der Linken und in der Rechten, so daß sie, die zugleich eine Felltracht hat, sehr an die Figur auf dem Vasenbilde C 5 erinnert. Ja bei den Römischen und späteren Griechischen Dichtern findet man die Furien geradezu als Kriegsgöttinnen. In der Beschreibung des Schildes des Aeneas bei Vergil. Aen. VIII, 700 fg. heißt es:

Saevit medio in certamine Mavors
Caelatus ferro, tristesque ex aethere Dirae.

Auch auf dem Schilde des Achilles bei Quintus Smyrn. V, 31 finden sich die Erinyen zwischen Kriegsgottheiten. Speciell wird mehrfach Tisiphone genannt, z. B. bei Valerius Flaccus Argon. VI, 402 fg.:

Romanas veluti saevissima quum legiones
Tisiphone regesque movet u. s. w.

und bei Claudian de rapt. Proserp. I, 40 fg.:

Tisiphone quatiens infausto lumine pinum
Armatos ad castra movet pallentia manes.

Auch Allecto, z. B. von Vergil. Aen. VII, 454 fg.:

adsum dirarum ab sede sororum;
Bella manu letumque gero.

Diese sind bei Vergil Aen. XII, 845 fg. die im engeren Sinne sogenannten Dirae, welche

Iovis ad solium, saevique in limine regis
Apparent, acuuntque metum mortalibus aegris,
Si quando letum horrificum morbosque deûm rex
Molitur, meritas aut bello territat urbes.

Außer dem Krieg als verdienter Strafe gehört besonders in den Bereich der Erinyen der blutige Streit zwischen Verwandten, vgl. die interessante Stelle bei Statius Theb. XI, 403 fg., wo sie als Wagenlenkerinnen der Streitenden erscheinen, und der Bürgerkrieg, als dessen Anstifterin die civilis Erinys bei Statius Silv. V, 3, 195 und Lucanus Phars. IV, 187 erwähnt wird.

Daß Enyo ebensowohl wie Eris einer Erinys ähnlich dargestellt werden konnte, unterliegt nach den Worten des Quintus Smyrn. XI, 8 fg. (s. oben S. 88) keinem Zweifel. Auf Münzen der Lucaner und Bruttier findet man sie allerdings in langem Chiton mit Helm, Schild und Speer dargestellt (Poole Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 224 u. p. 323 fg.). Claudian giebt ihr de quart. cons. Honor. 12 fg. parmam et galeam. Bei Nonnos Dionys. XXI, 259 heißt sie *χαλκοχίτων*. Nach diesem Beiworte zu schließen, dachte der Dichter sie sich außer dem ehernen Harnisch gewiß auch mit dem Helm

und zudem vermuthlich mit Schild und Lanze bewehrt. Das schließt aber eine andere Darstellungsweise nicht aus. Römische Schriftsteller erwähnen sie als mit dem Wurfspieß oder der Lanze und mit einer oder zwei Fackeln ausgerüstet, vgl. den Exc. II, S. 117, Statius Theb. IV, 6 fg., VII, 73 fg.[1]). Eine wahrscheinlich aus Etrurien stammende Schale zeigt die Büste der Bellona ohne Helm mit Schlangen im Haare. S. Jordan zu Preller's Röm. Mythol. Bd. II, S. 248, Anm., d. dritt. Auflage, welcher vermuthet, daß die Darstellung von den Bildern der Griechischen Enyo entlehnt sei.

Excurs IV, zu S. 102.

Die Annahme, daß die Deutung der unbeflügelten Figur mit der Fackel in der Rechten und zwei Speeren in der Linken auf der jetzt in Petersburg befindlichen Vase (C 5), deren bildliche Darstellung von Rosenberg Erinyen S. 71, A. 52, von Körte a. a. O. S. 75 fg. und von Heydemann Gigantomachie auf einer Vase von Altamura, S. 13 fg. überzeugend besprochen ist, auf Eris die allerwahrscheinlichste sei, beruht nicht etwa auf dem Grunde, daß die betreffende Figur die Mitte zwischen den beiden Kämpfern einnimmt und, während sie nach links vom Beschauer hinschreitet, den Kopf etwas nach rechts wendet, was der Haltung der Eris auf den älteren Vasen entspricht (s. oben S. 109), sondern darauf, daß sie, genauer betrachtet, zu dem Kämpfer rechts gehört und diesen gegen den Kämpfer links, den Zeus, führt. Durch diese Erkenntniß verschwindet auch der Anstoß, den man daran nehmen kann, daß der Gegenkämpfer des Zeus gar keinen Begleiter hat, während neben Zeus Hermes erscheint. Da man nun in dem Feinde des Zeus jedenfalls einen Giganten vorauszusetzen hat, so bietet sich für den Dämon, welcher ihn in den Kampf führt, auch nach Maßgabe der in dem folgenden Excurse anzuführenden Stelle des Nonnos keine so wahrscheinliche Deutung als die auf Eris, wenn auch der Gigant des Vasenbildes keinesweges Typhon ist, sondern ein anderer Führer. Daß auch für Eris die Fackel ausdrücklich bezeugt ist, haben wir oben in Exc. II S. 117 bemerkt.

Excurs V, zu S. 102 u. 108.

Hinsichtlich der früher als Amazone gefaßten weiblichen Figur in gegürtetem Chiton und der Chlamys, hohen Stiefeln, mit carrirter Pelta in der Linken, Speer in der Rechten auf der Pariser Vase aus Milo (C 8) trifft ohne Zweifel Heydemann a. a. O. S. 15 fg. das

1) Im Bellonacultus wird auch die bipennis erwähnt (Tibull. El. I, 6, 47), die man gewiß auch der Göttin als Waffe zutheilte.

Richtige, wenn er Eris erkennt, welche die Giganten zum Kampf angetrieben und aufgestachelt hat und von Zeus zuerst überwältigt wird. Die gut begründete Ansicht Heydemann's erhält eine starke Stütze durch die von ihm nicht veranschlagte Stelle des Nonnos Dionys. II, 357 fg., wo es bezüglich des Kampfes zwischen Typhon und Zeus heißt:

καὶ μόθος ἀμφοτέροισιν ἐπέβρεμεν· ἦν δὲ κυδοιμοῦ
πόμπος Ἔρις Τυφῶνι, Διὸς δ' ἡγήσατο Νίκη
εἰς μόθον [1]).

Auch die Pelta der betreffenden Figur auf dem Vasenbilde, welche zunächst zu der Annahme einer Amazone verleitete, paßt zu der Eris vollkommen. Diese gilt ja als Thrakische Göttin (s. oben S. 108). Daß Eris von Zeus nicht getödtet, sondern nur niedergeschmettert und für diesen Kampf unschädlich gemacht wird, versteht sich von selbst. Auch zeigt die Darstellung durchaus nicht, daß es sich um eine Getödtete handele [2]). — Wir wollen schließlich noch bemerken,

---

1) Eris betheiligt sich bei Nonnos XXII, 177 und XXXIX, 384 fg. auch an dem Kampfe eines anderen Feindes des Zeus, des Deriades, gegen den Dionysos und hat auch hier nach XXXIX, 385 fg. die Nike als Gegenpart.

2) Gelegentlich mag hier auch die andere von Heydemann a. a. O. besprochene auf pl. II abgebildete Figur berücksichtigt werden, die des gegen die Giganten mit dem Bogen kämpfenden »zarten Phrygischen Jünglings« in langem Chiton, mit großer flatternder Chlamys, langem in den Rücken fallenden Haare, welchen Ravaisson auf Adonis bezog, was Heydemann Zeus im Gigantenkampf, Halle 1876, S. 8, Anm. 13 als ganz unwahrscheinlich betrachtete, während er nachher zugab, daß Ravaisson der richtigen Deutung wohl am nächsten gekommen sei, wenn man nicht etwa Ganymedes zu erkennen habe. Daß ein Asiat dargestellt sei, wird aus der Kopfbedeckung geschlossen, einer getüpfelten helmartigen Haube mit getüpfelten Schleifenbändern hinten, über welche Heydemann an der zuletzt angeführten Stelle bemerkt: »die nur ein wenig schärfer als sonst gezackte phrygische Mütze hat zur Seite eine emporstehende Verzierung, etwa zu vergleichen den hohen Federn an den Helmen auf unteritalischen Vasenmalereien; oder es ist, wie Ravaisson wohl richtiger annimmt, das eine Kinnband, das sich gelöst hat und emporfliegt«. Aber beide Annahmen entbehren aller Wahrscheinlichkeit. Die vermeintlichen bedeutungslosen »Zacken« sind offenbar Sonnenstrahlen und ebenso der längere Gegenstand zur Seite. Man vergleiche namentlich die Darstellung des Sonnengottes auf dem Relief in Lajard's Rech. sur le culte de Mithra pl. XCVII, 2. Sonst läßt sich allerdings die Aehnlichkeit der Kopfbedeckung mit der sogenannten Phrygischen Mütze nicht in Abrede stellen. Aber diese steht der Annahme eines Helios keinesweges entgegen. Schon die alten Iranier dachten sich ihren Mithras als Krieger mit goldenem Helm und silbernem Panzer. Auch nach Nonnos Dion. XXXVIII, 291 fg. hat Helios *χρυσείην τρυφάλειαν*, die er *Φαέθοντος ἐπεστήριξε καρήνῳ*. Sie kann ebensowohl wie die *βριαρὴ τρυφάλεια* des Thrakischen Lykurgos bei demselben Nonnos XXI, 7 als mützenähnlicher Helm betrachtet

Specifische moleculare Leitungsvermögen $\frac{k}{m}$.

Fig. 1. Neutrale Salzlösungen.

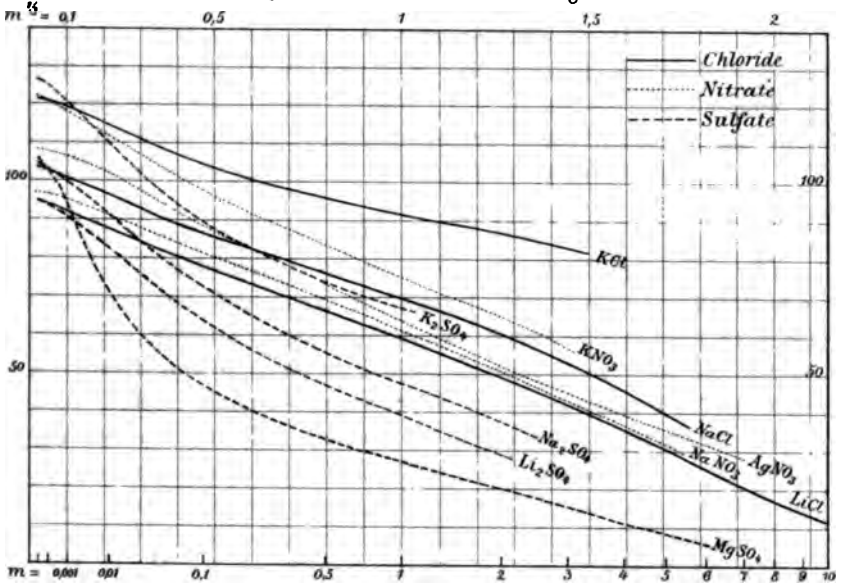
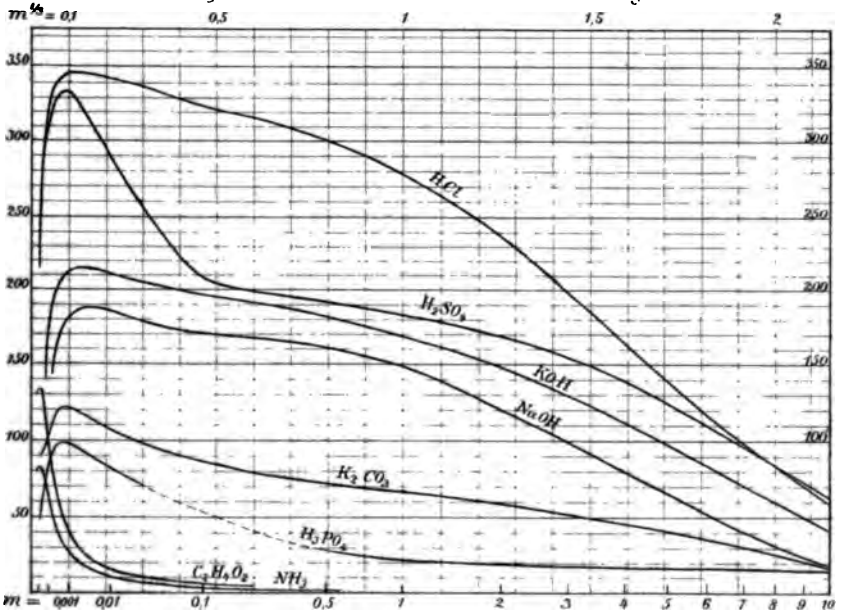


Fig. 2. Saure und alkalische Lösungen.



daß das Haar der Eris auf der in Rede stehenden Vase ähnlich gebildet ist wie auf der im vorhergehenden Excurs besprochenen, und zwar künstlerisch bezeichnender als auf anderen Darstellungen der kriegerischen Eris, indem es fast schlangenartig erscheint.

Daß auf dem Berliner Intaglio F Eris gemeint sei, habe ich in der nächstens erscheinenden dritten Abtheilung der akademischen Abhandlung über einige beachtenswerthe geschnittene Steine des vierten Jahrhunderts n. Chr. II, 2 darzuthun versucht.

Excurs VI, zu S. 107.

Hätte G. Körte Recht, wenn er a. a. O. S. 78 fg. auf der Vase von Altamura im Mus. naz. zu Neapel (Heydemann n. 3222) die vor dem das Felsstück emporwälzenden Sisyphos stehende Frau in hohen Stiefeln und kurzem gegürteten Chiton, welche in der vorgestreckten Linken einen Zweig und in der gesenkten Rechten eine Geißel hält, auf Ananke bezieht, so würde man wohl nicht umhin können auch die Figur in ähnlicher Tracht, welche mit einem Speer in der linken Hand und mit einem, wie es bei Jägern und Kriegern in Betreff der Chlamys vorkommt, von dem linken Arm herabfallenden Felle auf der Münchener Canosavase Denkm. d. a. Kst. I, 56, 275 a den Sisyphos mit der Geißel antreibend dargestellt ist, ebenso zu fassen. Aber die Figur auf der Vase von Altamura ist, wie diese, ohne Zweifel eine Erinys. So faßten sie auch U. Köhler Ann. d. Inst. XXXVI, 1864, p. 283 fg. und Heydemann a. a. O. Jener wollte die über dem Kopf der Figur erhaltene Inschrift *NAN*, von welcher Körte annimmt, daß

---

werden. Daß Mithras auf den Römischen Monumenten regelmäßig mit einer sogen. Phrygischen Mütze erscheint, ist bekannt. Schon in der Hellenistischen Culturperiode läßt sich sein Name von Syrien bis nach Athen und der Insel Thera nachweisen (Preller Oropos, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1852, S. 186). Es ist durchaus nicht unwahrscheinlich, daß zu dieser Zeit die helmartige Asiatische Kopfbedeckung von ihm auf Helios übergegangen ist. Dazu kommt die immer mehr hervortretende Identificirung des Perseus mit Helios, von denen jener auch mit der Phrygischen Mütze oder einem dieser nachgebildeten Helm dargestellt wird. Ja man kann vielleicht vermuthen, daß dann diese auch auf den mit Helios identificirten Apollon übertragen wurde, wie wir es auf dem Relief finden, welches E. Curtius in den Mon. ed Ann. d. Inst. arch. 1856, tav. 5 herausgegeben hat. Chiton und Chlamys sind bei Helios zur Genüge bekannt. Daß das Bogenschießen vortrefflich für ihn paßt, liegt auf der Hand. vgl. den bogenschießenden Helios auf der Münze von Philadelphia bei Combe Num. Brit. pl. XI, n. 7, die Pfeile hinter den Schultern des reitenden Helios auf den Münzen von Eriza in Karien, welche in Sallet's Ztschr. für Numismatik Bd. X, S. 56, n. 2 u. XII, S. 323 beschrieben sind, die erste mit beigefügter Abbildung. Auch Mithras hat auf dem Relief bei Lajard a. a. O. pl. CIII Bogen, Pfeile und Köcher neben sich.

sie *αΝΑΝη* zu lesen sei, in *ΜΑΝία* ergänzen, indem er auf die bei Megalopolis in Arkadien nach Pausanias VIII. 34. 1 als *Μανίαι* verehrten Erinyen hinwies. Hier stand der Name in Beziehung zu dem Wahnsinn des von ihnen verfolgten Orestes. Heydemann meint S. 516, A. 8, daß die Erinyen unter dem Namen *Μανίαι* auch erwähnt werden in der Stelle des Euripideischen Orestes Vs 390 fg. Kirchhoff, Vs 398 fg. Nauck:

ΟΡ. λύπη μάλιστά γ' ἡ διαφθείρουσά με,
ΜΕ. δεινὴ γὰρ ἡ θεός, ἀλλ' ὅμως ἰάσιμος.
ΟΡ. μανίαι τε, μητρός θ' αἵματος τιμωρίαι.

Aber mit Unrecht. Allerdings würde *λύπη* in Vs 390 = 398 mit großem Anfangsbuchstaben zu schreiben sein, wenn es wahrscheinlich wäre, daß *θεός* in Vs 391 = 399 von dem Dichter herrühre, und dann würde man auch geneigt sein können in Vs 392 = 400 (wo *θ'* sicherlich falsch ist) *Μανίαι* zu schreiben, aber nicht ohne Veränderung des *τιμωρίαι* in *τιμωρίᾳ*. Allein gewiß ist für *θεός* zu lesen: *νόσος*. Von einer *Λύπη* als *θεός* ist uns sonst nichts bekannt. Außerdem kommt der Name *Μανίη* mit Sicherheit bei Quintus Smyrn. V, 451 von einer Erinys vor in Beziehung auf den rasenden Aias:

καὶ τότε οἱ Τριτωνὶς ἀπὸ φρενὸς ἠδὲ καὶ ὄσσων
ἐσκέδασεν Μανίην βλοσυρήν, πνείουσαν ὄλεθρον·
ἡ δὲ θοῶς ἵκανε ποτὶ Στυγὸς αἰπὰ ῥέεθρα,
ᾗχι θοαὶ ναίουσιν Ἐρινύες, αἵτε βροτοῖσιν
αἰὲν ὑπερφιάλοισι κακὰς ἐφιᾶσιν ἀνίας.

Daß dennoch Körte's Zurückweisung des Verbesserungsversuches Köhler's berechtigt ist, erhellt ganz besonders aus dem Umstande, daß in dem Vasenbilde noch zwei Erinyen vorkommen und diese inschriftlich als *πΟΙΝΑΙ* bezeichnet werden. Darnach ist aber vorauszusetzen, daß auch in der Inschrift über der Erinys bei Sisyphos diese als *ποιΝΑ* bezeichnet war; ob durch den Accusativ *ποιΝΑΝ*, scheint mir mehr als zweifelhaft, wenn es auch an Beispielen auf Bildwerken nicht fehlt, in denen die Namensinschrift in diesem Casus abgefaßt ist; vielmehr würde ich eher eine Dittographie *ποιΝΑΝα* anzunehmen geneigt sein. Die Dorische Form des Namens befremdet durchaus nicht. Diese auf keiner anderen Vase als auf der in Rede stehenden *ΠΟΙΝΑΙ* genannten Unterweltswesen[1]) sind nicht verschieden von den strafenden Erinyen, während sie bei den Schriftstellern auch mehrfach als verwandte Wesen neben diesen erwähnt werden. Daß die Figur bei Sisyphos auf der Vase von Altamura nicht Ananke,

1) Wenn bei Welcker sowohl in den A. Denkm. III, S. 323 als auch in der Griech. Götterlehre III, S. 84, A. 16 angegeben wird, daß die Inschrift *ΠΟΙΝΑΙ* auch auf der Carlsruher Unterweltsvase vorkomme, so ist das ein Irrthum.

sondern nur eine Erinys sein kann, geht namentlich auch aus dem Attribute in der linken Hand hervor. Wie paßt der Zweig zu der Ananke? Unter der Voraussetzung einer Erinys bieten sich zwei Erklärungsweisen. Man könnte etwa daran denken, daß durch den Zweig die *ἐνέρων ἱερία* (Eurip. Orest. 261) bezeichnet werden solle. Viel wahrscheinlicher ist aber, daß dieser dem Thyrsoszweige der Bacchantinnen entspreche. Die Zusammenstellung der Erinyen mit diesen ist eine durch zahlreiche Beispiele bekannte. Heydemann spricht von einem Lorbeerzweige. Ist das richtig, so paßt es besonders gut. Den Bacchantinnen des Unterweltsgottes, der auf den Vasen dieser Art mit Dionysos verschmolzen wird, steht der Lorbeer sehr wohl zu.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

(Fortsetzung.)

Von der ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Almanach der Ungar. Academie der Wiss. für das Jahr 1884. Budapest 1884. 8.

Gedächtnissreden auf verstorbene Mitglieder der Ungar. Academie der Wissenschaften. Jahrg. 1882/83. Bd. I. Heft. 6—10. Bd. II. 1884. Heft. 1. 2. Budapest 1882—1884. 8.

Nachrichten von der ungarischen Akademie der Wisssenschaften. Jahrg. XVII. Heft 1—7. Budapest 1883. Jahrg. XVIII. Heft. 1. 2. ib. 1884 8.

Archaeologischer Anzeiger. Organ der archaeolog. Commission der Ungar. Acad. d. Wissensch. redig. von Karl Pulszky. Neue Folge. Band II. Heft 3. Budapest. 1883. Bd. III. Heft 1. 2. ib. 1884. 8.

Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger redig. von Julius Koenig. Bd. I. Heft 1—9. Budapest 1882—1883. Bd. II Heft 1—9. ib. 1883—84.

Jahrbücher der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Band XVII. Hft. 1. Budapest 1883. 4.

Sprachwissenschaftliche Mittheilungen redig. von Joseph Budenz. Bd. XVII. Heft 3. Budapest 1883. 8. Bd. XVIII. Heft. 1. ib. 1883.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Sprach- und schönen Wissenschaften redig. von Paul Gyulai. Bd. X Titel u. Inhalt. Budapest 1883. Bd. XI. Hft. 1—10. ib. 1884. 8.

Abhandlungen auf dem Gebiete der Staatswissenschaften redig. von Fr. Pesty. Bd. VII. Heft 7. Budapest 1884. 8.

Abhandlungen auf dem Gebiete der historischen Wissenschaften redig. von Fr. Pesty. Bd. X Titel. Bd. XI. Heft 1—6. ib. 1883—1884.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Nationalökonomie und Statistik redig. von Béla Földes. Bd. I. Heft 6—10 u. Titel. Budapest 1883. Bd. II. Heft 1—5. ib. 1884. 8.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik redig. von Joseph Szabó. Bd. IX. Heft 11—13. ib. 1882. 8.

Abhandlungen aus dem Gebiete d. Naturwissenschaften redig. von Joseph Szabó. Bd. XI Titel. Bd. XII. Heft 8—10. ib. 1882.

Monumenta Hungariae historica. Abth. I. Diplomataria: Codex diplomaticus Hungaricus Andegavensis hrsg. von Emmerich Nagy. Bd. III. 1333—1339. Budapest 1883. 8.

Archivum Rakocziauum. I. Abth. Bd. IX. Johann Bottyán's Briefwechsel und anderweitige ihn betreffende Akten und Urkunden 1685—1716 hrsg. von Koloman Thaly. Budapest 1883.

Monumenta Hungariae historica. 3. Abth. Monumenta comitialia: Monumenta comitialia regni Transsylvaniae hrsg. von Alexander Szilágyi. Bd. IX. 1629 — 1637. ib. 1883.

Károlyi, Arpad, der Hochverrathsprozess Stephan Illésházys. Budapest 1883. 8.

Finaly, Heinr., über antike Maasse und Gewichte. Budapest. 1883. 8.

Nationalökonomisches und statistisches Jahrbuch red. von Béla Földes. Jahrg. I. 1883. Budapest 1883. 8.

Ludw. Reissenberger und Emerich Henszlmann, die alten Kirchen von Herrmannstadt und Stuhlweißenburg. Budapest 1883. 4.

Ipólyi, Arnold, Erinnerung an Graf Stephan Károlyi. Budapest 1883. 8.

Kallay, Benjamin, Ungarn als Grenze des Morgen- und Abendlandes. Budapest 1883.

Wenzel, Gustav, Die Bedeutung der Fugger für die Geschichte Ungarn's. Budapest 1883. 8.

Deák, Wolfgang, Archiv der Rakóczy'schen Flüchtlinge. Aus dem Archiv der gräflich Telekischen Familie in Marosvásárhely. Budapest 1883. 8.

Ugrische Hefte. Beiträge zur Kenntniß und Vergleichung der Ugrischen Sprachen. Heft 2. Syrjänische Sprachproben mitgeth. von Joseph Budenz und Ignaz Halász. Budapest 1883. 8.

Kuun, Geza, Additamentorum ad codicem lumanum nov. series. Budapest 1883. 8.

Briefe und Urkunden zur Geschichte der orientalischen Besprechungen Georg Rakóczy I. hrsg. von Alexander Szilágyi. Budapest 1883. 8.

Pulszky, Franz, das Kupferzeitalter in Ungarn. Mit 21 Illustr. Budapest 1883. 4.

Szinnyei, Franz, Finnisch-Ungarisches Woerterbuch. Budapest 1884. 8.

Simonyi, Sigmund, die Ungarischen Bindewörter zugleich als Theorie des zusammengesetzten Satzes. Bd. III. Die unterordnenden Bindewörter. II. Budapest. 1883. 8.

Ungarische Revue hrsg. von Paul Hunfalvy v. Gust. Heinrich. Jahrg. 1883. Heft 4—10. Jahrg. 1884. Heft 1. 2. 3. 4. 5. 7.

November 1884.

Nature. Nr. 784. 785. 786.

Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Novbr.

Transactions of the roy. society of Edinburgh. Vol. XXX. P. 2. 3. Vol. XXXII. P. 1.

Proceedings of the roy. society of Edinburgh. Session 1881—82. 1882—83.

Resultados del observatorio nacional Argentino en Cordoba. Vol. III. IV.

6ter Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.

Monthly notices of the roy. astronomical society. Vol. XLIV. Nr. 9.

Leopoldina. Heft XX. Nr. 19. 20.

Oversigt over det kongelige danske Videnskabernes Selskabs forhandlingar, 1884. Nr. 2.

Mémoires de l'academie roy. de Kopenhague. 6. sér. Classe des sciences. Vol. I. Nr. 9. 10. Vol. II. Nr. 6.

Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVIII. Entr. 3.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London. 1884. P. 3.

L. Kronecker, Bemerkungen über die Multiplication der ellipt. Functionen. Berliner Sitzungsberichte. 1883. XXX.

Ders., Weitere Bemerkungen über die Multiplication der ellipt. Functionen. Ebendas. XXXVII.

Ders., Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadrat. Reste etc. Ebendas. 1884. XXIII. XXIV.

Ders., Ueber lineare Formen mit vier Variabeln. Abhandl. der preuß. Acad. 1883.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

18. März. **№ 3.** 1885.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1885.

Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Encyklopädie der theologischen Wissenschaften zur Einführung in das Studium der Theologie: Prof. *Knoke* vierstündig um 3 Uhr.

Alttestamentliche Theologie: Prof. *Schultz* fünfmal um 12 Uhr.

Geschichte des Volkes Israel: Prof. *Duhm* Montag, Dienstag, Donnerstag um 4 Uhr.

Erklärung der Genesis: Prof. *Bertheau* fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung der chaldäischen Abschnitte des Buches Daniel: *Derselbe* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr, öffentlich.

Erklärung des Buches Jesaia: Prof. *Duhm* fünfstündig um 10 Uhr.

Hebräische Gesellschaft s. *Orientalische Sprachen* S. 137.

Neutestamentliche Zeitgeschichte: Prof. *Knoke* Montag und Donnerstag um 4 Uhr.

Paulinische Eschatologie: Prof. *Duhm* Freitag 4 Uhr öffentlich.

Erklärung des Briefs Pauli an die Römer: Prof. *Lünemann* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung der paulinischen Briefe (mit Ausnahme des Römerbriefs und der Pastoralbriefe): Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der Apostelgeschichte: Lic. *Bornemann* dreistündig Montag, Dienstag, Donnerstag um 9 Uhr.

Erklärung der katholischen Briefe des N. T.: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr.

Kirchengeschichte der sechs ersten Jahrhunderte: Prof. *Reuter* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des achtzehnten und neunzehnten Jahrhunderts: Prof. *Wagenmann* fünfstündig um 8 Uhr.

Dogmengeschichte: Prof. *Wagenmann* fünfstündig um 7 Uhr.

Dogmengeschichte des Mittelalters seit der Zeit Anselms von Canterbury: Prof. *Reuter* zweimal, Dienstag und Freitag um 11 Uhr, öffentlich.

Patrologie oder altchristliche Literaturgeschichte: Lic. *Bornemann* dreistündig, Mittwoch, Freitag, Sonnabend um 8 Uhr.

Apologie des Christenthums: Prof. *Schultz* fünfmal um 10 Uhr.

Dogmatik II. Theil: Prof. *Ritschl* fünfmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Wiesinger* fünfstündig um 11 Uhr.

Kirchenrecht s. unter *Rechtswissenschaft.*

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Bertheau* Montags um 6; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Dienstags um 6; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Reuter* Donnerstags um 5; die dogmatischen Prof. *Ritschl* Freitags um 6 Uhr.

Die homiletischen Uebungen der praktischen Abtheilung des theologischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich; die katechetischen Uebungen Prof. *Wiesinger* am Mittwoch von 2—3 Uhr und Prof. *Knoke* Sonnabends 2—3 Uhr öffentlich; die liturgischen Uebungen *Derselbe* Sonnabends 9—10 und 11—12 Uhr öffentlich.

Rechtswissenschaft.

Encyklopädie der Rechtswissenschaft: Prof. *John* Montag, Mittwoch und Freitag von 11—12 Uhr.

Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Regelsberger* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 10—11 Uhr.

Institutionen des Römischen Rechts: Prof. *Regelsberger* sechsmal wöchentlich; Montag bis Freitag von 9—10 Uhr und Mittwoch von 10—11 Uhr.

Pandekten II. Theil (Familien- und Erbrecht): Prof. *Regelsberger* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Pandekten- Prakticum: Prof. *v. Ihering* Montag, Mittwoch und Freitag von 12—1 Uhr.

Vergleichendes Erbrecht: Prof. *Ziebarth* Mittwoch von 11—12 Uhr, öffentlich.

Deutsche Rechtsgeschichte: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Deutsches Privatrecht: Prof. *Schröder* täglich von 10—11 Uhr.

Deutsches Privatrecht nebst Lehnrecht: Prof: *Wolff* täglich von 8—9 Uhr.

Handels- Wechsel- und Seerecht: Prof. *Schröder* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Das Recht der Werthpapiere: Prof. *Schröder* einmal wöchentlich zu einer noch zu bestimmenden Stunde öffentlich.

Hauptlehren des preussischen Privatrechts: Prof. *Ziebarth* Dienstag und Freitag von 11—12 Uhr.

Grundbuchrecht: Prof. *Ziebarth* Sonnabend von 7—9 Uhr.

Strafrecht: Prof. *v. Bar* viermal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Deutsches Reichs- und Landesstaatsrecht: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöchentlich von 7—8 Uhr.

Evangelisches und katholisches Kirchenrecht: Prof. *Mejer* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Canonistische und kirchenrechtliche (exegetische und praktische) Uebungen: Prof. *Dove* Freitag von 6—8 Uhr Abends privatissime und unentgeltlich.

Civilprocess einschliesslich des Konkurs- und der summarischen Processe: Prof. *John* täglich von 9—10 Uhr.

Strafprocess: Prof. *John* viermal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Civilprocess-Prakticum: Prof. *v. Bar* Dienstag von 4—6 Uhr.

Criminalistische Uebungen: Prof. *Ziebarth* Donnerst. von 4—6 Uhr.

In Folge einer Neuberufung werden voraussichtlich die Vorlesungen über römisches Recht, namentlich bezüglich der Pandekten, noch vervollständigt werden.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Knochen- und Bänderlehre: Dr. *Schiefferdecker* am Dienstag, Donnerstag und Sonnabend von 11—12 Uhr priv.

Die Mechanik der Gelenke: Prof. *Krause* Donnerstag von 2—3 Uhr öffentlich.

Der systematischen Anatomie II. Theil, Gefäss- u. Nervenlehre, Prof. *Henle* täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie, Prof. *Henle* Montag, Mittwoch, Freitag, von 11—12 Uhr.

Specielle Gewebelehre trägt Prof. *Krause* Dienstag und Donnerstag von 11—12 Uhr vor.

Mikroskopische Uebungen hält Dr. *Schiefferdecker* für Anfänger (normale Histologie) vierstündlich und für Geübtere (specielle mikroskopische Anatomie) gleichfalls vierstündlich priv.

Mikroskopische Curse in normaler Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr oder zu andern passenden Stunden.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Versuche und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil: Prof. *Meissner* täglich um 10 Uhr.

Physiologie der Zeugung und Embryologie: Prof. *Meissner* Freitag von 5—7 Uhr.

Arbeiten im physiol. Institut leitet Prof. *Meissner*.

Ein Medicinisch-chemisches Praktikum hält Prof. *Flügge* sechsstündig.

Arbeiten im Institut für medicinische Chemie und Hygiene leitet Prof. *Flügge*.

Patholog. Anatomie der Knochen und Muskeln lehrt Prof. *Orth* Mittwoch 2—3 Uhr öffentlich.

Specielle patholog. Anatomie lehrt Prof. *Orth* täglich ausser Sonnabend 12—1 Uhr.

Praktische Uebungen in der patholog. Histologie hält Prof. *Orth* privatissime Dienstag und Freitag 2—4 Uhr.

Sections- und diagnostischen Cursus leitet Prof. *Orth* in passenden Stunden privatissime.

Einen Cursus der bakteriologischen Methoden hält Prof. *Flügge* in zu verabredenden Stunden.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 4—5 Uhr. Dasselbe trägt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später zu bestimmenden Stunden vor.

Ueber physikalische Heilmethoden mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotherapie, mit Uebungen am Krankenbett trägt Prof. *Damsch* dreimal wöchentlich vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Diagnostik des Harns lehrt Prof. *Ebstein* in Verbindung mit Dr. *Deichmüller* Mittwoch von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und Demonstrationen sowie mit practischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Montag, Dienstag und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* fünfstündlich von 3—4 Uhr vor.

Specielle Toxicologie, I. Th., für ältere Mediciner lehrt in Verbindung mit Experimenten zweimal wöchentlich von 2—3 Uhr Prof. *Marmé*.

Die giftigen Verfälschungen unserer Genussmittel demonstrirt einmal wöchentlich von 6—7 Uhr Prof. *Marmé* öffentlich.

Ueber essbare und giftige Pilze trägt Prof. *Husemann* öffentlich Montags von 4—5 Uhr vor.

Ein pharmacognostisches Practicum mit mikroskopischen Uebungen hält für vorgeschrittenere Pharmaceuten Prof. *Marmé* Sonnabend von 9—11 und von 11—1 Uhr.

Arbeiten im pharmacologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich.

Specielle Pathologie und Therapie I. Hälfte: Prof. *Ebstein* täglich, ausser Montag, von 7—8 Uhr.

Ueber Kinderkrankheiten Prof. *Damsch*, Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Ebstein* täglich, und zwar fünfmal von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_4$—$10^3/_4$ Uhr.

Poliklinische Referatstunde, hält Prof. *Damsch* einmal wöchentlich publice.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Rosenbach* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Specielle Chirurgie: Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *König* täglich mit Ausnahme des Sonnabends von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr.

Chirurgische Poliklinik hält Prof. *König* gemeinsam mit Prof. *Rosenbach* Sonnabend $10^3/_4$ Uhr, öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* zweimal wöchentlich, Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Operationscursus an Leichen hält Prof. *König* täglich mit Ausnahme des Sonnabends von 5—7 Uhr Abends.

Ueber Hernien trägt Dr. *W. Müller* einmal wöchentlich vor in später zu bestimmender Stunde öffentlich.

Functionsprüfungen des Auges lehrt Prof. *Deutschmann* einmal wöchentlich, Sonnabend von 8—9 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Deutschmann* zweimal wöchentlich, Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Augenoperationskursus hält Prof. *Leber* Mittwoch von 8—9 Uhr Sonnabend von 7—8 Uhr.

Ueber die practisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Einschluss der Anatomie des Ohrs und mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) an zwei noch zu bestimmenden Tagen von 12—1 Uhr.

Ueber die Fehler des Beckens, Prof. *Schwartz*, öffentlich und einmal wöchentlich zu gelegener Zeit.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr.

Ueber Frauenkrankheiten liesst Dr. *Droysen* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freytag von 3—4 Uhr.

Gynäkologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 8—9 Uhr.

Psychiatrische Klinik mit systematischen Vorlesungen über Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* wöchentlich in vier Stunden, Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Gerichtliche Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen hält Prof. *Meyer* wöchentlich in zwei nach Verabredung festzusetzenden Stunden.

Die äusseren Krankheiten der Hausthiere und Beurtheilungslehre des Pferdes und Rindes trägt Prof. *Esser* wöchentlich fünfmal von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale wird *Derselbe* öffentlich in zu verabredenden Stunden halten.

Philosophie.

Geschichte der Philosophie: Prof. *Rehnisch*, 6 Stunden, 12 Uhr.

Geschichte der Naturphilosophie: Prof. *G. E. Müller*, Mittwoch 10 Uhr, öffentlich.

Ueber Kants kritische Philosophie: Prof. *Peipers*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Logik: Prof. *G. E. Müller* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr.

Erkenntnisstheorie und Metaphysik: Prof. *Baumann*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 4 Uhr.

Psychologie: Prof. *Peipers*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Geschichte und System der Paedagogik: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Die Uebungen des K. paedagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, öffentlich.

Mathematik und Astronomie.

Differentialrechnung mit Uebungen: Prof. *Schwarz*, 5 St., 8 Uhr.

Theorie und Anwendung der Determinanten: Prof. *Enneper*, Dienstag und Donnerstag, 12 Uhr, öffentlich.

Reihentheorie: Dr. *Hölder*, 1 Stunde, unentg.

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen: Dr. *Hölder*, Mont. Dienst. Freit. 12 Uhr.

Analytische Geometrie der Oberflächen 2. Ordnung: Dr. *Schönflies*, Mittw. 10 Uhr, unentg.

Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Curven: Dr. *Schönflies*, Mont. Dienst. Donnerst. 10 Uhr.

Ueber krumme Flächen und Curven doppelter Krümmung: Prof. *Schwarz*, Mont. Dienst. Donnerst. Freitag, 11 Uhr.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen: Prof. *Schering*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag, 9 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Enneper*, Mont. bis Freit.

Potential-Functionen und deren Anwendungen: Prof. *Schering*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 6 Uhr Nachmittag.

Mechanische Wärmetheorie: Prof. *Voigt*, Dienstag bis Freitag, 8 Uhr.

Hydrodynamik: Prof. *Voigt*, Donnerst. und Freit. 10 Uhr.

Mathematische Geographie: Dr. *H. Meyer*, Dienst. und Freitag, 12 Uhr.

Erdmagnetische Beobachtungen in Gauss' Observatorium leitet Prof. *Schering* privatissime, unentg., Mittwoch Nachmittag.

Berechnungen der Reductionen von Beobachtungen: Prof. *Schering* Sonnabend Nachmittag, unentg.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* wie bisher privatissime, unentgeltlich, einmal zweiwöchentlich leiten.

In dem K. mathematisch-physikalischen Seminar leitet Prof. *Schering* mathematische Uebungen, zu geeigneter Stunde; leitet Prof. *Schwarz* mathematische Uebungen, Mittwoch 12 Uhr. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 133.

Naturwissenschaften.

Zoologie, Uebersicht des Gesammtgebietes: Prof. *Ehlers*, tägl., 8 Uhr.

Zootomischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Mittw. und Donnerst. 11—1 Uhr.

Naturgeschichte der Protozoen: Dr. *Hamann*, Donnerst. 4 Uhr.

Geschichte der Keimblätterlehre: Dr. *Hamann*, Freit. 5 Uhr, öffentl.

Vergleichend-histologisches Practicum: Dr. *Hamann*, Mont. und Dienst. 4 Uhr.

Zoologische Uebungen: Prof. *Ehlers*, wie bisher, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends) von 9—1 Uhr.

Grundzüge der gesammten Botanik: Prof. *Graf zu Solms*, 5 Stunden, früh 7 Uhr.

Experimentalphysiologie: Prof. *Berthold*, Dienst. Donn. Freit. 4 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Pflanzen: Prof. *Falkenberg*, Dienstag und Freitag 6 Uhr.

Demonstrationen im botanischen Garten: Prof. *Graf zu Solms*, Mittwoch 3 Uhr, öffentlich.

Anleitung zu täglichen Arbeiten im Laboratorium des botanischen Gartens, wesentlich für Vorgeschrittenere: *Derselbe*, privatissime, in zu bestimmenden Stunden.

Mikroskopisch botanischer Kursus, Sonnabend von 9—1 Uhr (für Pharmaceuten 2stündig): Prof. *Berthold*.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: *Derselbe*.

Botanische Societät: Prof. *Falkenberg*, Donnerstag 6 Uhr.

Uebungen im Bestimmen der Kryptogamen in zwei zu bestimmenden Stunden: Prof. *Berthold*, öffentlich.

Mineralogie: Prof. *Klein*, Mont. bis Freit. 11 Uhr.

Petrographie: Prof. *Klein*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 9 Uhr.

Palaeontologie: Prof. *von Koenen*, 5 Stunden, Mont. bis Freit., 7 Uhr.

Ueber die geologischen Verhältnisse des nördlichen Deutschlands: Prof. *von Koenen*, 1 Stunde, öffentlich, verbunden mit Excursionen und Uebungen.

Mineralogische Uebungen: Prof. *Klein*, Sonnabend 10—12 Uhr, öffentlich.

Krystallographische Uebungen: Prof. *Klein*, privatissime, aber unentgeltlich, in zu bestimmenden Stunden.

Palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, erster Theil (Mechanik, Akustik, Optik): Prof. *Riecke*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5—6 Uhr.

Einleitung in die praktische Physik für Pharmaceuten: Prof. *Riecke*, Sonnabend, 11—1 Uhr.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Institute leiten die Proff. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Meyer* und Dr. *Krüger*, Dienstag, Donnerstag, Freitag 2—4 Uhr, Sonnabend 9—1 Uhr.

Mechanische Wärmetheorie u. Hydrodynamik: s. *Mathematik* S. 8.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar behandelt Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik, Montag 2 Uhr, behandelt ausgewählte Probleme der Elasticitätslehre Prof. *Voigt*, Mittw. 10 Uhr — Vgl. *Mathematik* S. 132.

Allgemeine Chemie (s. g. unorganische Chemie): Prof. *V. Meyer*, 6 Stunden, 9 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Analytische Chemie: Dr. *Buchka*, Mittw. u. Sonnab. 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (anorgan. Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Chemie der aromatischen Verbindungen, II. Theil, mit besonderer Berücksichtigung der Theerfarbenindustrie: Dr. *Leuckart*, Dienst. und Freit. 12 Uhr.

Chemie der seltneren Metalle: Dr. *Jannasch*, Mont. Dienst. Mittw. 9 Uhr.

Ueber die Verunreinigungen und Verfälschungen der Nahrungs- und Genussmittel und deren Erkennung: Prof. *Polstorff*, Dienstag und Freitag, 8 Uhr.

Pflanzenernährungslehre (Agriculturchemie): Prof. *Tollens*, Montag, Dienstag, Mittwoch, 10 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 3 Uhr. — S. unter *Medicin* S. 129.

Titrirmethoden: Dr. *Pfeiffer*, einmal, unentgeltlich.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akademischen Laboratorium leitet Prof. *V. Meyer*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *Polstorff*, Dr. *Jannasch*, Dr. *Buchka* und Dr. *Leuckart*, täglich (mit Ausschluss des Sonnabends) von 8 bis 12 und von 2½ bis 5 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium (Stumpfebiel II), täglich (ausser Sonnabend), 8—12 und 2—4 Uhr.

Praktisch-chemische Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium leitet Prof. *Tollens*, in Gemeinschaft mit dem Assistenten des agr. chem. Lab., Montag—Freitag, 8—12 und 2—4 Uhr.

Repetitorische Besprechungen ausgewählter Capitel aus dem Gesammtgebiete der Chemie: Dr. *Leuckart*, privatissime, in zu verabredenden Stunden.

Uebungen in der Maassanalyse: Dr. *Pfeiffer*, Sonnabend 8—12 Uhr.

Medicinisch-chemisches Practicum s. S. 128.

Historische Wissenschaften.

Urkundenwesen der älteren deutschen Herrscher: Prof. *Steindorff*, Mont. Dienst. Mittw. Donnerst. 10 Uhr.

Palaeographische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Sonnabend, 9—11 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Geschichte der römischen Kaiserzeit (von Cäsar an): Prof. *Volquardsen*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr.

Epochen der Geschichte des Papstthums bis zur Gegenwart: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Geschichte des preussischen Staats: Prof. *von Kluckhohn*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Geschichte des Welthandels von der Entdeckung Amerikas bis auf unsere Zeit: Prof. *von Kluckhohn*, Mont. Dienst. Freit. 4 Uhr.

Geschichte Italiens seit dem Anfang des Mittelalters: Dr. *Th. Wüstenfeld*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit., 11 Uhr, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienst. 6 Uhr, öffentl.

Historiche Uebungen leitet Prof. *von Kluckhohn*, Donnerstag, 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen für Anfänger: Dr. *v. Kap-herr*, 2 Stunden unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 126.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie von Asien mit besonderer Berücksichtigung der Entdeckungsgeschichte: Prof. *Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr.

Geographische Uebungen für Vorgeschrittenere: Prof. *Wagner*, privatissime, unentgeltlich, Sonnabend, von 9 oder 10 Uhr an.

Mathematische Geographie: s. *Mathematik* S. 131.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Politik: Dr. *Sartorius von Waltershausen*, 4 Stunden, 12 Uhr.

Praktische Nationalökonomie und Verwaltungslehre: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Volkswirthschaftslehre (theoretische Nationalökonomie nebst Geschichte derselben): Dr. *Eggert*, 4 Stunden, 3—4 Uhr.

Finanzwissenschaft, insbesondere die Lehre von den Steuern: Prof. *Hanssen*, 4 Stunden, 4 Uhr.

Finanzwissenschaft: Dr. *Sartorius v. Waltershausen*, 4 St. 4 Uhr.

Sozialpolitik: Prof. *Cohn*, Dienstag und Donnerstag, 4 Uhr.

Staatswissenschaftliches Seminar: Prof. *Cohn*, einmal wöchentlich, privatissime, unentgeltlich.

Volkswirthschaftliche Uebungen: Prof. *Soetbeer*, privatissime, unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 St., öffentlich.

Ackerbaulehre, specieller Theil: *Derselbe*, 4 Stunden, 12 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines): Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 5 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag, 11 Uhr, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, in zwei später zu bestimmenden Stunden.

Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Die Lehre von der Futterverwerthung (II. Theil der landw. Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Montag und Dienstag, 11 Uhr.

Uebungen in Futterberechnungen: Prof. *Henneberg*, Mittwoch, 11 Uhr, öffentlich.

Kraftfutterstoffe und künstliche Düngemittel, ihre Herkunft, Zusammensetzung und Beurtheilung: Dr. *E. Kern*, 2 Stunden.

Landwirthschaftliches Practicum, 1. Uebungen im landwirthschaftlichen Laboratorium, Freitag 2—6 Uhr, Sonnabend 9—1 Uhr, unter Leitung des Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler*; 2. Uebungen in landwirthschaftlichen Berechnungen, Mont. u. Donn. 6 Uhr: Prof. *Drechsler*.

Landwirthschaftliche Excursionen und Demonstrationen im Versuchsfelde: Prof. *Drechsler*, Mittwoch Nachmittag.

Krankheiten der Hausthiere: s. *Medicin* S. 130.

Agriculturchemie, Agriculturchemisches Practicum: s. *Naturwissenschaften* S. 134.

Literatur- und Kunstgeschichte.

Geschichte der epischen Dichtung bei den Griechen: Prof. *Fick*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 8 Uhr.

Sophokles Leben und Dichtungen, s. *Griech. u. Lat. Sprache* S. 14.

Griechische Literaturgeschichte von Alexander ab: Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, Montag bis Freitag, 10 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur von Opitz bis Lessing: Prof. *Heyne*, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 5 Uhr.

Ueber Schillers Leben und Schriften: Prof. *Goedeke*, Donnerstag 4 Uhr, öffentlich.

Geschichte der französischen und provenzalischen Literatur bis zum 12. Jahrhundert: Prof. *Vollmöller*, Mittwoch, 10—12 Uhr.

Ueber Chaucers Leben und Werke: vgl. *Neuere Sprachen* S. 14.

Allgemeine Kunstgeschichte des Mittelalters und der Neuzeit (als zweiter Theil der Einleitung): Prof. *Schmarsow*, 3 Stunden, 11 Uhr.

Geschichte des Kirchenbaues in Deutschland, mit Uebungen für Anfänger (ev. Excursionen mit einer Gesellschaft): Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden öffentlich.

Kunsthistorische Uebungen, mit Interpretation italienischer Quellenschriften: Prof. *Schmarsow*, privatissime, unentg.

Geschichte der Philosophie: vgl. *Philosophie* S. 130.

Alterthumskunde.

Alte Länder-, Völker-, und Denkmälerkunde von Griechenland: Prof. *Gilbert*, 3 Stunden, Mittw. 7 Uhr, Sonnabend 7 und 12 Uhr.

Archäologie der griechischen und römischen Kunst: Prof. *Wieseler*, 4 Stunden, 12 Uhr.

Ausgewählte Kunstwerke lässt im K. archäolog. Seminar erklären Prof. *Wieseler*, Sonnabend, 12 Uhr, öffentlich.

Die Abhandlungen der Mitglieder des K. archäol. Seminars wird Prof. *Wieseler* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Ausgewählte Kapitel der deutschen Alterthumskunde: Prof. *Heyne*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Lautlehre mit besonderer Rücksicht auf das Griechische: Prof. *Fick*, Mittwoch und Sonnabend, 8 Uhr, öffentlich.

Einleitung in das Studium der vergleichenden Sprachwissenschaft Prof. *Bechtel*, Mittwoch und Sonnabend, 9 Uhr, öffentlich.

Oskische und umbrische Sprachdenkmäler: Prof. *Bechtel*, zweimal wöchentlich.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. u. *Theologie* S. 125.

In einer hebräischen Gesellschaft lässt Prof. *de Lagarde* die Makamen des Harizi nach seiner Ausgabe erklären, zweimal, 3 Uhr.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Syrisch lehrt Prof. *de Lagarde*, dreimal, 10 Uhr.

Anfangsgründe der Geezsprache und Erklärung der äthiopischen Chrestomathie von Dillmann: Prof. *Haupt*, Montag und Donnerstag, 5 Uhr.

Assyrische Grammatik (für Anfänger) und Erklärung leichter Keilschrifttexte: Prof. *Haupt*, Mont. und Donnerst., 6 Uhr, öffentlich.

Assyriologische Uebungen (Cursorische Lektüre bilinguer Texte im IV. Racol.): Prof. *Haupt*, Freitag, 5 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Grammatik der Sanskritsprache für Anfänger: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch, Sonnabend, 10 Uhr.

Erklärung ausgewählter Hymnen des Rigveda mit dem Kommentare des Sâyaṇâchârya: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch, Sonnabend, 11 Uhr, öffentlich.

Uebungen in der Erklärung indischer Inschriften: Prof. *Kielhorn*, 2 Stunden, privatissime, unentgeltlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Geschichte der griechischen Literatur von Alexander ab, s. *Literaturgeschichte* S. 136.

Geschichte der epischen Dichtung bei den Griechen: s. *Literaturgeschichte* S. 136.

Erklärung von Sophokles König Oedipus, mit Einleitung über Sophokles Leben und Dichtungen: Prof. *Dilthey*, 4 Stunden, 12 Uhr.

Demosthenes Rede vom Kranze: Prof. *Sauppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Gedichte des Catullus: Prof. *von Leutsch*, 2 St., 12 Uhr, öffentl.

Lateinischer Stil, mit praktischen Uebungen: Prof. *Sauppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 7 Uhr Morgens.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, Mittwoch 11 Uhr, lässt Lysias Rede 13 erklären Prof. *Sauppe*, Montag und Donnerstag, 11 Uhr, lässt Horaz Brief an Augustus erklären Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar lässt den Prometheus des Aeschylos erklären und leitet die Disputationen über die eingereichten schriftlichen Arbeiten Prof. *Dilthey*, Mittw. u. Sonnab., 10 Uhr, alles öffentl.

Deutsche Sprache.

Alt- und Mittelhochdeutsche Grammatik mit besonderer Berücksichtigung der Dialecte: Dr. *Schröder*, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 4 Uhr.

Alt- und Mittelhochdeutsche Dichtungen nach W. Wackernagels kleinerem altdeutschem Lesebuche erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 3 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*, Dienstag, 6 Uhr.

Altdeutsche Uebungen: Prof. *Heyne*, 1 St., privatissime, unentg.

Neuhochdeutsche Uebungen: Dr. *Schröder*, 1 Stunde.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literaturgeschichte* S. 136.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Literatur: s. *Literaturgesch.* S. 136.

Historische Grammatik der französischen Sprache II: Prof. *Vollmöller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Erklärung provenzalischer Sprachdenkmäler nach Bartschs Chrestomathie: Dr. *Andresen*, Dienstag, Mittwoch, Freitag, 8 Uhr.

Chaucers Leben und Werke, nebst Erklärung der Canterbury Tales: Prof. *Napier*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 7 Uhr Morgens.

Im Seminar für neuere Sprachen leiten Uebungen Prof. *Vollmöller* (Erklärung von Robert Garniers Bradamante), Mittwoch 12 Uhr, und Prof. *Napier*, Mont. u. Donnerst. 8 Uhr; Dr. *Andresen* erklärt (Montag 6 Uhr) die altfranzösische Uebersetzung der Predigten des h. Bernhard.

L. Kœune: Histoire de la littérature française au XVIIIe S. Dienstag—Freitag 8 Uhr; Cours de littérature, Dienstag 5 Uhr; — Schillers Geschichte des dreissigjährigen Kriegs, Montag 8 Uhr, öffentlich; — Exercices de style et de composition, Montag und Freitag 9 Uhr; Lecture, récitation, conversation, Donnerstag 10 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Morgens von 7—11 und Nachm. (ausser Sonnabend) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke* (Mont. und Donnerst 8 bis 10 Uhr Abends).

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* ist Dienstag von 2—4 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist dem Publikum täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind während des Sommerhalbjahrs Sonnabends v. 1—2 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publikum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerstag von 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, der *Bibliothek des k. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Bartels* (Kleperweg 2), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Henle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. März. **№ 4.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 7. März 1885.

Frensdorff, Bemerkungen über die Stellung des Deutschenspiegels in der Geschichte der Rechtsbücher.

Dedekind, ausw. Mitglied, zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen.

Bezzenberger, Corresp., die indogermanische Endung des Locativs Sing der u-Declination.

Enneper, über ein Euler'sches Integral. Ueber einige bestimmte Integrale. Ueber das Maximum eines Vierecks von gegebenen Seiten.

M. Falk, Beweis des Multiplications-Theorems für die Determinanten (vorgelegt von E. Schering).

F. Huth, Beitrag zur Kenntniß der sympathischen Nerven (vorgelegt von F. Merkel, Corresp.).

Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen.

Von

R. Dedekind, ausw. Mitgl.

Der unter der gleichen Ueberschrift in No. 10 des Jahrgangs 1884 dieser Nachrichten veröffentlichte Brief des Herrn Weierstrass an Herrn Schwarz behandelt einen Gegenstand, mit welchem ich mich ebenfalls vorübergehend beschäftigt habe. Die Untersuchung derjenigen Zahlgebiete, die ich Körper nenne, gab mir hierzu die unmittelbare Veranlassung, weil die analytische Behandlung, wel-

che die Theorie der endlichen Körper verlangt, sich fast wörtlich auf die Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten übercomplexen Größen anwenden läßt; man braucht nur den Körper der rationalen Zahlen, auf welchen bei jener Untersuchung die Coordinaten beschränkt waren, zu ersetzen durch den Körper aller reellen oder lieber durch den Körper aller complexen Zahlen, unter welchem Namen ich im Folgenden immer die gewöhnlichen, jetzt allgemein eingeführten complexen Zahlen verstehe. Die betreffenden analytischen Untersuchungen sind im § 159 der zweiten, im Jahre 1871 erschienenen Auflage der Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie veröffentlicht; in die dritte Auflage sind sie nicht wieder aufgenommen, weil sie für die Theorie der algebraischen Zahlen entbehrlich sind, und weil ich diese Theorie mit den geringsten Hülfsmitteln zu begründen wünschte. Bei der genannten Uebertragung ergab sich nun, daß wahrhaft neue Zahlindividuen auf diesem Wege nicht zu gewinnen sind; in der That, jedes System von n Haupteinheiten $e_1, e_2 \ldots e_n$ kann immer aufgefaßt werden als ein System von n gewöhnlichen complexen Zahlen oder vielmehr als Collectiv-Repräsentant von n solchen Systemen; derartige mehrwerthige Größen-Systeme sind aber in unserer höheren Algebra längst eingebürgert. Mit diesem Resultate begnügte ich mich, weil ich in ihm die Bedeutung und die volle Bestätigung der bekannten Bemerkung von Gauss gefunden zu haben glaubte. Da nun diese Auffassung der Haupteinheiten in dem Briefe des Herrn Weierstrass[1]) zwar gestreift, aber doch nicht so, wie sie es mir zu verdienen scheint, als der eigentliche Kern der ganzen Frage deutlich hervorgehoben ist, da ferner z. B. die Erscheinung, daß ein Product von zwei nicht verschwindenden übercomplexen Größen verschwinden kann, bei dieser Auffassung wohl ihre natürlichste Erklärung findet, so erlaube ich mir, im Folgenden eine Darstellung derselben mitzutheilen, wobei sich zugleich eine kleine Vereinfachung der von Herrn Weierstrass aufgestellten Zulässigkeits-Bedingungen ergeben wird.

Ich mache zunächst darauf aufmerksam, daß alle Beziehungen zwischen den übercomplexen Größen, soweit es sich nicht bloß um Addition und Subtraction handelt, vollständig bestimmt werden durch die von Herrn Weierstrass mit $\varepsilon_{t,r,s}$, von mir im Folgenden mit $\eta_{t,rs}$ bezeichneten Coefficienten, welche in der Gleichung (5) seiner Abhandlung als Coordinaten des Productes

$$e_r e_s = \sum e_t \eta_{t,rs}$$

1) S. 410—411. Der daselbst ausgesprochenen, auf die Meinung von Gauss bezüglichen Vermuthung kann ich mich nicht anschließen.

auftreten. (Ich bezeichne in der Folge mit $\iota, \iota', \iota'' \ldots$ stets Summationsbuchstaben, welche die n Werthe $1, 2 \ldots n$ durchlaufen sollen, und ein einfaches Summenzeichen Σ bezieht sich immer auf alle, hinter demselben auftretenden $\iota, \iota', \iota'' \ldots$, während $r, s \ldots$ constante Indices aus derselben Reihe bedeuten). Da das System der Haupteinheiten von vornherein als irreductibel vorausgesetzt wird, oder mit anderen Worten, da jede übercomplexe Zahl

$$x = \sum e_\iota \xi_\iota$$

nur ein einziges, völlig bestimmtes System von n Coordinaten ξ_ι besitzt, so ergiebt sich, wie Herr Weierstrass erwähnt, aus den Forderungen

$$e_r e_s = e_s e_r, \quad (e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$$

eine Anzahl von Bedingungen, denen die Zahlen $\gamma_{\iota t, rs}$ genügen müssen. Dieselben lauten offenbar folgendermaßen

$$\gamma_{\iota t, rs} = \gamma_{\iota t, sr} \tag{1}$$

$$\sum \gamma_{u, t\iota} \gamma_{\iota\iota, rs} = \sum \gamma_{\iota u, s\iota} \gamma_{\iota\iota, rt}, \tag{2}$$

wo r, s, t, u irgend welche Indices aus der Reihe $1, 2 \ldots n$ bedeuten. Diese Bedingungen, zu welchen Herr Weierstrass im Verlaufe seiner Untersuchung noch einige, später zu erwähnende hinzufügt, stimmen, wie es in der Natur der Sache liegt, vollständig mit denjenigen überein, welche in der Theorie der endlichen Körper bei der Forderung auftreten, daß die Zahlen sich durch Multiplication reproduciren sollen.

Ich will nun im ersten Theile meiner Darstellung einen Weg angeben, auf welchem man nach Belieben unendlich viele solche Systeme von Zahlen $\gamma_{\iota t, rs}$ erzeugen kann, und im zweiten Theile beweisen, daß umgekehrt auf diese Weise auch alle solche Systeme erzeugt werden. Hierbei bemerke ich, daß von jetzt ab ausschließlich von den bis jetzt allgemein eingeführten complexen Zahlen die Rede sein wird.

Es sei ein System E von n^2 Zahlen $e_r^{(s)}$ nach Belieben angenommen, welche nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, daß ihre Determinante

$$e = \sum \pm e_1' e_2'' \ldots e_n^{(n)} \tag{3}$$

von Null verschieden ist. Ich betrachte nun ein System von n Größen

$$e_1, e_2 \ldots e_n \tag{4}$$

welches insofern als mehrwerthig anzusehen ist, als es fähig sein soll,

durch n verschiedene Substitutionen in die n bestimmten Special-Systeme

$$e_1^{(s)},\ e_2^{(s)} \ldots e_n^{(s)} \tag{5}$$

überzugehen, welche den n verschiedenen Werthen des Index s entsprechen; diese Substitutionen sind natürlich so zu verstehen, daß gleichzeitig jede der n Größen e_r den mit gleichem Index r behafteten Werth $e_r^{(s)}$ annimmt. Andere Specialisirungen der Größen e_r sollen gänzlich ausgeschlossen sein. Wir stellen uns die Aufgabe, alle rationalen Beziehungen zwischen diesen mehrwerthigen Größen e_r und den völlig bestimmten, einwerthigen Zahlen aufzufinden, nämlich alle solche Beziehungen, welche für jedes einzelne der n Special-Systeme (5) gültig sind; nur von diesen Beziehungen wird im Folgenden gesprochen werden.

Zu diesem Zweck betrachten wir das Gebiet G aller mit bestimmten Zahlcoefficienten behafteten ganzen rationalen Functionen der n Größen e_r. Jede solche Function x wird durch die Substitution (5) einen entsprechenden Werth annehmen, den wir mit $x^{(s)}$ bezeichnen wollen. Sind diese n Werthe $x', x'' \ldots x^{(n)}$ bekannt oder auch willkürlich angenommen, so läßt sich die mehrwerthige Größe x immer und nur auf eine einzige Weise als homogene lineare Function der Größen e_r, also in der Form

$$x = \sum e_\iota \xi_\iota \tag{6}$$

darstellen, wo die n Zahlen ξ_ι einwerthig bestimmt sind; sie sollen die Coordinaten der Größe x in Bezug auf die Basis (4) heißen. In der That, die vorstehende Gleichung soll nach dem Obigen nichts Anderes bedeuten, als daß die, den n verschiedenen Indices s entsprechenden n Gleichungen

$$x^{(s)} = \sum e_\iota^{(s)} \xi_\iota \tag{7}$$

bestehen; da nun die Determinante (3) von Null verschieden ist, so ergeben sich hieraus durch Umkehrung für die n Coordinaten Ausdrücke von der Form

$$\xi_r = \sum f_r^{(\iota)} x^{(\iota)}; \tag{8}$$

das System F der hier auftretenden n^2 Zahlen $f_r^{(s)}$ ist das Complement des gegebenen Systems E. Wir setzen im Folgenden stets

$$(r, s) = 1 \text{ oder } = 0, \tag{9}$$

je nachdem die Indices r, s gleich oder ungleich sind; dann bestehen zwischen den beiden complementären Systemen E, F bekanntlich die Relationen

$$\sum e_r^{(t)} f_s^{(t)} = \sum e_t^{(r)} f_t^{(s)} = (r, s). \tag{10}$$

In der eben bewiesenen völligen Bestimmtheit der zu einer Größe x gehörenden Coordinaten ξ_r liegt auch die Irreductibilität der Basis (4), insofern die Gleichung

$$\sum e_t \xi_t = 0$$

durch n bestimmte Zahlen ξ_t nicht anders befriedigt werden kann, als wenn diese sämmtlich verschwinden. Jedes einzelne Special-System (5), für sich allein betrachtet, besitzt natürlich, sobald $n > 1$ ist, diese Irreductibilität niemals [1]).

Nach dem Vorhergehenden ist es nun auch erlaubt, die n Zahlen $f_r, f_r' \dots f_r^{(n)}$ als die Specialwerthe einer demselben Gebiet G angehörenden Größe f_r anzusehen, und man erhält so eine zu der Basis (4) complementäre, ebenfalls n-werthige Basis

$$f_1, f_2 \dots f_n. \tag{11}$$

Bezeichnen wir ferner mit dem Symbol $S(x)$ die aus allen Specialwerthen von x gebildete Summe

$$S(x) = \sum x^{(t)}, \tag{12}$$

so kann die Beziehung (10) zwischen den beiden Basen auch durch

$$S(e_r f_s) = (r, s) \tag{13}$$

dargestellt werden, und da die Coordinaten ξ_r der Größe x zufolge (8) die Form

$$\xi_r = S(x f_r) \tag{14}$$

besitzen, so ist allgemein

$$x = \sum e_t S(x f_t). \tag{15}$$

Man erhält endlich, wenn man nach den Specialwerthen $x^{(s)}$ ordnet und die n Größen

$$c_r = \sum e_t f_t^{(r)} \tag{16}$$

einführt, die folgende Darstellung

$$x = \sum c_t x^{(t)}. \tag{17}$$

Die demselben Gebiete G angehörenden n Größen c_r bilden gewissermaßen eine Normal-Basis desselben und sind durch

---

1) Der Fall $e = 0$, und allgemeiner die Untersuchung solcher mehrwerthiger Systeme $e_1, e_2 \dots e_n$, für welche die Anzahl der erlaubten Substitutionen (5) kleiner oder größer als n ist, läßt sich leicht auf den hier behandelten Fall zurückführen.

$$c_r^{(s)} = (r, s) \tag{18}$$

definirt. Die einzelnen n Bestandtheile $c_s x^{(s)}$, welche den einzelnen Substitutionen entsprechen, kann man mit Herrn Weierstrass die Componenten der Größe x nennen. Versteht man ferner unter einem Theiler der Null jede Größe x, von deren Specialwerthen $x^{(s)}$ mindestens einer verschwindet, so sind, falls $n > 1$ ist, die Größen c_r solche Theiler der Null.

Da nach dem Obigen alle Größen x des Gebietes G, d. h. alle ganzen rationalen Functionen der n Größen e_r sich als homogene lineare Functionen derselben darstellen lassen, so kann man jedes Product

$$e_r e_s = \sum e_t \gamma_{tt,rs} \tag{19}$$

setzen, wo die Coordinaten $\gamma_{tt,rs}$ nothwendig den sämmtlichen Bedingungen (1) und (2) genügen müssen, welche aus den Gleichungen $e_r e_s = e_s e_r$ und $(e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$ entspringen. In der That ergibt sich aus dem obigen allgemeinen Ausdruck (14) für die Coordinaten einer Größe x, daß

$$\gamma_{tt,rs} = S(e_r e_s f_t) \tag{20}$$

ist, und aus dieser Darstellung der Zahlen $\gamma_{tt,rs}$ durch das gegebene System E der Zahlen $c_r^{(s)}$ folgt sofort, daß alle jene Bedingungen identisch erfüllt sind, weil die Summe

$$\begin{aligned} \sum \gamma_{uu,tt}\, \gamma_{tt,rs} &= \sum e_t^{(t')} c_t^{(t')} f_u^{(t')} e_r^{(t'')} e_s^{(t'')} f_t^{(t'')} \\ &= \sum e_t^{(t')} f_u^{(t')} e_r^{(t'')} e_s^{(t'')} (t', t'') = \sum e_r^{(t')} e_s^{(t')} e_t^{(t')} f_u^{(t')} \\ &= S(e_r e_s e_t f_u), \end{aligned} \tag{21}$$

also symmetrisch in Bezug auf die drei Indices r, s, t ist.

Am einfachsten gestaltet sich natürlich die Multiplication, wenn man alle Größen x des Gebietes G in der Form (17) durch die Normalbasis darstellt. Die Größen c_r haben nämlich, wie aus ihrer Definition (16) oder auch unmittelbar aus (18) hervorgeht, die Eigenschaften

$$c_r c_s = (r, s) c_r, \tag{22}$$

und hieraus folgt, wenn y ebenfalls eine beliebige Größe des Gebietes G bedeutet,

$$xy = \sum c_t x^{(t)} y^{(t)}, \tag{23}$$

was ohnehin wegen

$$(xy)^{(s)} = x^{(s)} y^{(s)} \tag{24}$$

selbstverständlich ist. Ebenso leuchtet ein, daß, falls $n > 1$, ein Product xy von zwei von Null verschiedenen Größen x, y sehr wohl verschwinden kann; in der That bedeutet die Gleichung $xy = 0$ nichts Anderes, als das gleichzeitige Bestehen der den n Substitutionen entsprechenden Gleichungen $x^{(s)}y^{(s)} = 0$, und diesen kann immer so genügt werden, daß einige Specialwerthe von jeder der Größen x, y verschwinden, aber mindestens einer derselben von Null verschieden ist. Ist x eine gegebene Größe, so ist die Mannichfaltigkeit der Wurzeln y der Gleichung $xy = 0$ hiernach sofort zu überblicken. Auf die Folgerungen, welche sich hieraus für die Division der Größen des Gebietes G und hinsichtlich der Mannichfaltigkeit der Wurzeln von Gleichungen höheren Grades ergeben, will ich hier nicht mehr eingehen, weil sie von Herrn Weierstrass ausführlich besprochen sind. —

Ich gehe nun im zweiten Theile zu meiner Hauptaufgabe über, welche darin besteht, zu zeigen, daß umgekehrt jedes gegebene System von Zahlen $\eta_{it,rs}$, welches die Bedingungen (1) und (2) und eine sogleich aufzustellende Zusatz-Bedingung erfüllt, immer auf die im Vorhergehenden beschriebene Weise (20) aus einem und nur einem System E von n^2 Zahlen $e_r^{(s)}$ mit nicht verschwindender Determinante e entspringt. Die erwähnte Zusatz-Bedingung besteht darin, daß, wenn man zur Abkürzung

$$\sigma_r = \sum \eta_{it,rt} \tag{25}$$

und

$$\tau_{rs} = \tau_{sr} = \sum \sigma_t \eta_{it,rs} \tag{26}$$

setzt, die Determinante

$$\Delta = \sum \pm \tau_{11}\tau_{22}\dots\tau_{nn} \tag{27}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt; es wird sich später, ohne daß ich besonders darauf zurückzukommen brauche, von selbst ergeben, daß diese einzige Bedingung vollständig aequivalent mit den drei Forderungen ist, auf welche Herr Weierstrass durch seine Untersuchung über die Zulässigkeit der übercomplexen Größen geführt wird (S. 403). Ihre Bedeutung für unsere Aufgabe ist leicht zu erkennen; ist nämlich das System der Zahlen $\eta_{it,rs}$ in der oben angegebenen Weise (20) wirklich aus einem System E entsprungen, so ist

$$\sigma_r = \sum S(e_r e_t f_t) = \sum e_r^{(t')} e_t^{(t')} f_t^{(t')} = S(e_r) \tag{28}$$

und

$$\tau_{rs} = \sum S(e_\iota) S(e_r e_s f_\iota) = \sum e_\iota^{(\iota')} e_r^{(\iota'')} e_s^{(\iota'')} f_\iota^{(\iota'')} = S(e_r e_s) \quad (29)$$

und folglich

$$\Delta = e^2, \quad (30)$$

woraus die Nothwendigkeit unserer Bedingung unmittelbar einleuchtet. Des leichteren Verständnisses wegen empfehle ich dem Leser, auch im Folgenden immer die Bedeutung anzumerken, welche die einzuführenden Größen besitzen würden, falls die Abstammung der Zahlen $\eta_{\iota,rs}$ aus einem System E schon bewiesen wäre.

Die Bedingungen (1) und (2) lassen sich am einfachsten und mit dem besten Erfolge zusammenfassen, wenn man n unabhängige Variabele $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ und n homogene ganze Functionen zweiten Grades $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ durch die Definition

$$2\eta_\iota = \sum \eta_{\iota,\iota'\iota''} \xi_{\iota'} \xi_{\iota''} \quad (31)$$

einführt. Die Bedingungen (1) sind dann durch

$$\eta_{\iota,rs} = \frac{\partial^2 \eta_\iota}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \quad (32)$$

ausgedrückt. Setzt man ferner

$$\eta_{\iota r,s} = \frac{\partial \eta_{\iota r}}{\partial \xi_s} = \sum \eta_{\iota r,s\iota} \xi_\iota, \quad (33)$$

so ist

$$2\eta_{\iota r} = \sum \eta_{r,\iota} \xi_\iota \quad (34)$$

und, wenn d das Zeichen für eine Variation (d. h. eine totale Differentiation) bedeutet,

$$d\eta_r = \sum \eta_{r,\iota} d\xi_\iota = \sum \xi_\iota d\eta_{r,\iota}. \quad (35)$$

Die Bedingungen (2) werden ferner, wenn d' ebenfalls eine willkürliche Variation ist, zusammengefaßt in

$$\sum d\eta_{r,\iota} d'\eta_{\iota,s} = \sum d'\eta_{r,\iota} d\eta_{\iota,s}. \quad (36)$$

Alles Folgende beruht auf diesen Bedingungen und der freiesten Ausnutzung des Begriffes einer Variation. Man kann diesen Bedingungen noch verschiedene andere Formen geben, in denen sie ebenfalls zur Anwendung kommen werden. Multiplicirt man mit ξ_s und summirt nach s, so folgt nach (35)

$$\sum d\eta_{r,\iota} d'\eta_\iota = \sum d'\eta_{r,\iota} d\eta_\iota. \quad (37)$$

Setzt man ferner $d'\xi_\iota = \xi_\iota$, so folgt aus (36)

$$\sum \eta_{\iota,s} d\eta_{r,\iota} = \sum \eta_{r,\iota} d\eta_{\iota,s}. \quad (38)$$

Wir führen noch folgende Functionen ein, die lineare

$$\sigma = \sum \eta_{\iota,\iota} = \sum \sigma_\iota \xi_\iota, \tag{39}$$

die quadratische

$$2\tau = 2 \sum \sigma_\iota \eta_\iota = \sum \tau_{\iota\iota'} \xi_\iota \xi_{\iota'}, \tag{40}$$

die linearen

$$\tau_r = \frac{\partial \tau}{\partial \xi_r} = \sum \sigma_\iota \eta_{\iota,r} = \sum \tau_{r\iota} \xi_\iota \tag{41}$$

und beginnen nun unsere Untersuchung.

Da die aus den Zahlen τ_{rs} gebildete Determinante (27) nach unserer Annahme nicht verschwindet, so kann man eine specielle Variation δ vollständig definiren durch die für alle n Indices r geltende Forderung

$$\delta\tau_r = \sigma_r, \tag{42}$$

und zwar sind die hieraus folgenden Werthe der Differentiale $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2 \ldots \delta\xi_n$ bestimmte constante Zahlen. Multiplicirt man nun (36) mit σ_r und summirt nach r, so folgt mit Rücksicht auf (41)

$$\sum d\tau_\iota \, d'\eta_{\iota,s} = \sum d'\tau_\iota \, d\eta_{\iota,s}, \tag{43}$$

und wenn man hierin $d' = \delta$ setzt und (42) beachtet,

$$\sum d\tau_\iota \, \delta\eta_{\iota,s} = \sum \sigma_\iota \, d\eta_{\iota,s} = d\tau_s;$$

da nun, weil Δ nicht verschwindet, die n Differentiale $d\tau_1$, $d\tau_2 \ldots d\tau_n$ gänzlich unabhängig von einander sind, so folgt hieraus offenbar

$$\delta\eta_{r,s} = (r,s), \quad \delta\eta_r = \xi_r, \quad \delta\tau = \sigma. \tag{44}$$

Hieraus ergiebt sich die wichtige Folgerung, daß die Functional-Determinante

$$\varphi = \frac{d(\eta_1 \ldots \eta_n)}{d(\xi_1 \ldots \xi_n)} = \sum \pm \eta_{1,1} \eta_{2,2} \ldots \eta_{n,n} \tag{45}$$

nicht identisch verschwinden kann; legt man nämlich jeder Variabelen ξ_r den entsprechenden Werth $\delta\xi_r$ bei, so geht $\eta_{r,s}$ in $\delta\eta_{r,s} = (r,s)$ über, und folglich nimmt die homogene ganze Function $n$ten Grades φ den Werth

$$\frac{\delta^n \varphi}{\Pi(n)} = 1 \tag{46}$$

an (diese Determinante φ geht in die von Herrn Weierstrass auf S. 397 mit ε bezeichnete Größe über, wenn die $\xi_r = \beta_r$ gesetzt werden).

Hieraus folgt wieder, daß nicht bloß für jede positive, sondern auch für jede negative ganze Zahl p eine entsprechende Variation δ_p

vollständig definirt werden kann durch die für alle n Indices r geltende Recursion

$$\delta_{p+1}\xi_r = \delta_p\eta_r, \tag{47}$$

mit der Anfangsbedingung $\delta_0 = \delta$. Die merkwürdigen Eigenschaften der hierdurch definirten Functionen $\delta_p\xi_r$ (welche von Herrn Weierstrass mit $\xi_r^{(p)}$ bezeichnet sind) ergeben sich leicht aus unseren Grundbedingungen (37); setzt man $d' = \delta_p$, so erhält man zufolge (47)

$$\sum \delta_p\eta_{r,t}\, d\eta_t = \sum d\eta_{r,t}\,\delta_{p+1}\xi_t = \sum \delta_{p+1}\eta_{r,t}\, d\xi_t$$

und hieraus, wegen der Willkürlichkeit von d,

$$\delta_{p+1}\eta_{r,s} = \sum \eta_{t,s}\,\delta_p\eta_{r,t} = \sum \eta_{r,t}\,\delta_p\eta_{t,s}. \tag{48}$$

Setzt man hierin $p = -1$, so folgt nach (44), daß

$$\sum \eta_{t,s}\,\delta_{-1}\eta_{r,t} = \sum \eta_{r,t}\,\delta_{-1}\eta_{t,s} = (r,s), \tag{49}$$

mithin das Product

$$\varphi\,\delta_{-1}\eta_{r,s} \tag{50}$$

der Coefficient des Elementes $\eta_{s,r}$ in der Determinante φ ist.

Allgemeiner folgt aus (48) leicht durch den Schluß von q auf $q+1$, daß für je zwei ganze Zahlen p, q der Satz

$$\delta_{p+q}\eta_{r,s} = \sum \delta_p\eta_{r,t}\,\delta_q\eta_{t,s} \tag{51}$$

gilt, woraus man beiläufig schließt, daß

$$\begin{vmatrix} \delta_p\eta_{1,1} \dots \delta_p\eta_{1,n} \\ \dots\dots\dots \\ \delta_p\eta_{n,1} \dots \delta_p\eta_{n,n} \end{vmatrix} = \varphi^p \tag{52}$$

ist, was aber auch schon aus (48) folgt.

Multiplicirt man (51) mit ξ_s und summirt nach s, so folgt nach (35)

$$\delta_{p+q}\eta_r = \sum \delta_p\eta_{r,t}\,\delta_q\eta_t, \tag{53}$$

also zufolge (47) auch

$$\delta_{p+q}\xi_r = \sum \delta_p\eta_{r,t}\,\delta_q\xi_t. \tag{54}$$

Ebenso findet man aus (47) und (48) durch den Schluß von p auf $p \pm 1$ die Allgemeingültigkeit des für $p = 0$ evidenten Satzes

$$d\,\delta_p\xi_r = p\Sigma\,\delta_{p-1}\eta_{r,t}\,d\xi_t = p\Sigma\, d\eta_{r,t}\,\delta_{p-1}\xi_t \tag{55}$$

und hieraus die Functional-Determinante

$$\frac{d(\delta_p\xi_1 \dots \delta_p\xi_n)}{d(\xi_1 \dots \xi_n)} = p^n\varphi^{p-1}. \tag{56}$$

Setzt man $d = \delta_q$, so folgt aus (55), (54)

$$\delta_q \delta_p \xi_r = p\, \delta_{p+q-1} \xi_r, \tag{57}$$

also auch

$$\delta_q \delta_p \lambda = p \delta_{p+q-1} \lambda, \tag{58}$$

wenn λ eine willkürliche homogene lineare Function bedeutet. Setzt man $q = 0$, so folgt

$$\delta \delta_p \lambda = p \delta_{p-1} \lambda \tag{59}$$

und durch Wiederholung der Variation δ

$$\delta^m \delta_p \lambda = p(p-1) \ldots (p-m+1)\, \delta_{p-m} \lambda, \tag{60}$$

speciell

$$\delta^m \delta_{-1} \lambda = (-1)^m \Pi(m)\, \delta_{-1-m} \lambda. \tag{61}$$

Ich wende mich jetzt zur näheren Betrachtung der Determinante φ. Zufolge der oben gefundenen Bedeutung des Productes (50) ist nach einem bekannten Satze

$$d\varphi = \varphi \Sigma \delta_{-1} \eta_{\iota,\iota'} d\eta_{\iota',\iota} = \varphi \Sigma \delta_{-1} \eta_{\iota,\iota'} \eta_{\iota',\iota''} d\xi_{\iota''};$$

aus den Grundbedingungen (36) folgt aber

$$\sum \delta_{-1} \eta_{r,\iota'} \eta_{\iota',rs} = \sum \eta_{r,r\iota'} \delta_{-1} \eta_{\iota',s},$$

und hierdurch vereinfacht sich mit Rücksicht auf (39), (41) das vorstehende Differential in folgender Weise

$$d\varphi = \varphi \sum \eta_{\iota,\iota'} \delta_{-1} \eta_{\iota',\iota''} d\xi_{\iota''} = \varphi \sum \sigma_{\iota'} \delta_{-1} \eta_{\iota',\iota''} d\xi_{\iota''} = \varphi \sum \delta_{-1} \tau_{\iota''} d\xi_{\iota''}$$

oder also

$$d\varphi = \varphi \sum \delta_{-1} \tau_\iota d\xi_\iota = \varphi \sum d\tau_\iota\, \delta_{-1} \xi_\iota, \tag{62}$$

oder, wenn die n Differentiale $d\xi_r$ constant sind, noch kürzer

$$d\varphi = \varphi\, \delta_{-1} d\tau, \tag{63}$$

wo nun $d\tau$ jede beliebige homogene lineare Function bedeutet, weil Δ von Null verschieden ist. Hieraus geht hervor, daß die n Functionen $\delta_{-1} \xi_r$ sich durch die Derivirten von $\log \varphi$ ausdrücken lassen, und umgekehrt diese durch jene. Ferner ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung

$$\varphi_\mu = \frac{(-1)^\mu}{\Pi(\mu)} \delta^\mu \varphi \tag{64}$$

setzt, durch wiederholte Anwendung der Operation δ, unter Berücksichtigung von (61), der Satz

$$d\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \varphi_\mu\, \delta_{\mu-m-1} d\tau. \tag{65}$$

Bedenkt man, daß zufolge (46)

$$\varphi_n = (-1)^n, \tag{66}$$

und daß alle folgenden φ_{n+1}, φ_{n+2} ... verschwinden, so ergiebt sich

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} d\tau = 0, \text{ wenn } m \geqq n,$$

und da $d\tau$, wie schon bemerkt, jede der n Variabelen ξ_r bedeuten kann, so ergiebt sich, wenn ψ eine willkürliche Function ist, immer

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \psi = 0, \text{ wenn } m \geqq n;$$

nimmt man hierin, wenn p eine willkürliche ganze Zahl ist,

$$\psi = \delta_{p+m+2} \xi_r,$$

so folgt mit Rücksicht auf (57)

$$(p+m+2) \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu+p} \xi_r = 0, \text{ wenn } m \geqq n;$$

da nun für jede gegebene ganze Zahl p eine ganze Zahl $m \geqq n$ stets so gewählt werden kann, daß $(p+m+2)$ nicht verschwindet, so folgt, daß immer

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu+p} \xi_r = 0, \tag{67}$$

also auch immer die Recursion

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu+p} \psi = 0 \tag{68}$$

gilt, wo ψ eine willkürliche Function.

Nehmen wir jetzt in (65) an, es sei $m < n$, so folgt mit Rücksicht auf (68)

$$d\varphi_m = -\sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} d\tau$$

oder auch

$$d\varphi_m = -\sum_{\mu=0}^{\mu=n-m-1} \varphi_{\mu+m+1} \delta_\mu d\tau.$$

Setzt man hierin $d = \delta$, und bedenkt, daß $\delta\tau = \sigma$ und $\delta\varphi_m = -(m+1)\varphi_{m+1}$ ist, so erhält man, wenn man noch m durch $m-1$ ersetzt,

$$m\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m} \varphi_{\mu+m} \delta_\mu \sigma. \tag{69}$$

Dieser Satz gilt für die Zahlen $m = 1, 2 \ldots n$ und offenbar auch für $m = 0$ zufolge (68); seine Bedeutung wird sich sogleich ergeben.

Wir führen jetzt eine Charakteristik ε ein, welche folgenden Sinn hat. Ist ψ eine beliebige Function der n Variabelen ξ_r, so soll $\varepsilon(\psi)$ diejenige Function von den ξ_r und von einer neuen Variabelen ξ bedeuten, welche aus ψ dadurch hervorgeht, daß jede Variabele ξ_r durch die entsprechende Größe $(\xi_r - \xi\delta\xi_r)$ ersetzt wird. Da die $\delta\xi_r$ constant sind, so ist nach dem Taylor'schen Satze, wenigstens für ganze Functionen ψ,

$$\varepsilon(\psi) = \psi - \xi\frac{\delta\psi}{1} + \xi^2\frac{\delta^2\psi}{1.2} - \xi^3\frac{\delta^3\psi}{1.2.3} + \ldots \tag{70}$$

und allgemein, wenn die Differentiale $d\xi_r$ constant sind,

$$d\varepsilon(\psi) = \varepsilon(d\psi) - \varepsilon(\delta\psi)\,d\xi. \tag{71}$$

Da φ eine ganze Function $n$ten Grades ist, so ist mit Rücksicht auf (64)

$$\varepsilon(\varphi) = \varphi + \varphi_1\xi + \varphi_2\xi^2 + \ldots + \varphi_n\xi^n; \tag{72}$$

da ferner φ die Determinante der linearen Functionen $\eta_{r,s}$, und zufolge (44)

$$\varepsilon(\eta_{r,s}) = \eta_{r,s} - (r,s)\xi \tag{73}$$

ist, so ergiebt sich auch

$$\varepsilon(\varphi) = \begin{vmatrix} \eta_{1,1} - (1,1)\xi & \ldots & \eta_{1,n} - (1,n)\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n,1} - (n,1)\xi & \ldots & \eta_{n,n} - (n,n)\xi \end{vmatrix} \tag{74}$$

Wir denken uns nun $\varepsilon(\varphi)$ als ganze Function $n$ten Grades der Variabeln ξ in n Factoren ersten Grades zerlegt und setzen demgemäß, weil $\varphi_n = (-1)^n$ ist,

$$\varepsilon(\varphi) = \prod(x - \xi), \tag{75}$$

wo das Productzeichen sich auf die nWurzeln

$$x = x', x'' \ldots x^{(n)} \tag{76}$$

bezieht, welche Functionen von den n Variabelen ξ_r sind und nach dem Fundamentalsatze von Gauss im Körper der complexen Zahlen stets existiren. Dann ergiebt sich durch Vergleich von (68), (69), (72) mit den Newton'schen Formeln der Algebra, daß für jede ganze Zahl p

$$\delta_p\sigma = \delta_{p-1}\tau = S(x^p) \tag{77}$$

ist, wo die Summation S sich auf alle n Werthe von x bezieht. Be-

zeichnet man ferner mit D die Discriminante von $\varepsilon(\varphi)$, d. h. das Quadrat des Productes aus allen Differenzen der n Größen x, so ist nach einem ebenfalls bekannten Satze

$$D = \begin{vmatrix} \delta\sigma, & \delta_1\sigma \ldots \delta_{n-1}\sigma \\ \delta_1\sigma, & \delta_2\sigma \ldots \delta_n\sigma \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n-1}\sigma, & \delta_n\sigma \ldots \delta_{2n-2}\sigma \end{vmatrix}, \tag{78}$$

welcher Ausdruck sich noch umformen läßt. Multiplicirt man die Determinante

$$\rho = \begin{vmatrix} \delta\xi_1 & \ldots \delta\xi_n \\ \delta_1\xi_1 & \ldots \delta_1\xi_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n-1}\xi_1 & \ldots \delta_{n-1}\xi_n \end{vmatrix} \tag{79}$$

mit der aus den Zahlen τ_{rs} gebildeten Determinante Δ, und bedenkt, daß

$$\sum \tau_{rt}\,\delta_p\xi_t = \delta_p\tau_r$$

ist, so erhält man das Product

$$\Delta\rho = \begin{vmatrix} \delta\tau_1 & \ldots \delta\tau_n \\ \delta_1\tau_1 & \ldots \delta_1\tau_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n-1}\tau_1 & \ldots \delta_{n-1}\tau_n \end{vmatrix};$$

multiplicirt man abermals mit ρ, und bedenkt, daß mit Rücksicht auf (41) und (54)

$$\sum \delta_p\xi_t\,\delta_q\tau_t = \sum \delta_p\xi_t\,\sigma_{t'}\,\delta_q\eta_{t',t} = \sum \sigma_{t'}\,\delta_{p+q}\xi_{t'} = \delta_{p+q}\sigma$$

ist, so ergiebt sich offenbar der Satz

$$D = \Delta\rho^2. \tag{80}$$

Auf ähnliche Weise findet man leicht aus (74)

$$\rho\varepsilon(\varphi) = \begin{vmatrix} 1, & \delta\xi_1 \ldots \delta\xi_n \\ \xi, & \delta_1\xi_1 \ldots \delta_1\xi_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi^n, & \delta_n\xi_1 \ldots \delta_n\xi_n \end{vmatrix}. \tag{81}$$

Aus unserer Annahme, daß die Determinante Δ von Null verschieden ist, läßt sich nun — worauf ich unten zurückkommen werde — in aller Strenge beweisen, daß die Determinante ρ und folglich auch die Discriminante D nicht identisch verschwindet. Man kann daher den n Variabelen ξ_r solche bestimmte Zahlwerthe

beilegen, daß die n Wurzeln x sämmtlich von einander verschieden ausfallen. Nachdem dies geschehen, definiren wir für jede dieser n Wurzeln x ein entsprechendes System von n Zahlen $e_1, e_2 \ldots e_n$ durch diejenigen n Gleichungen

$$x^p = \sum e_\iota \delta_p \xi_\iota, \tag{82}$$

welche den n Werthen $p = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ entsprechen; die n Größen e_r sind hierdurch in ihrer Abhängigkeit von der Wurzel x vollständig bestimmt, weil die Determinante ρ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es ergiebt sich zunächst, daß die Gleichung (82) nun für jede positive ganze Zahl p besteht (auch für jede negative, wenn φ von Null verschieden ist); in der That, da $\varepsilon(\varphi)$ für $\xi = x$ verschwindet, so genügt x^p zufolge (72) derselben Recursion

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu x^{\mu+p} = 0,$$

welche zufolge (67) für die Größen $\delta_p \xi_r$ gilt; nimmt man daher an, unser Satz (82) sei für n auf einander folgende Werthe

$$p = m, m+1 \ldots m+n-1$$

bewiesen, so ergiebt sich aus dieser Uebereinstimmung, und weil φ_n von Null verschieden ist, daß er auch für $p = m+n$ gilt, wodurch er offenbar allgemein bewiesen ist.

Hierauf führen wir für je zwei Indices r, s aus der Reihe $1, 2 \ldots n$ eine entsprechende, ebenfalls von der Wahl der Wurzel x abhängende Zahl

$$c_{rs} = e_{sr} = \sum e_\iota \eta_{\iota, rs} \tag{83}$$

ein; multiplicirt man mit $\delta_p \xi_r \delta_q \xi_s$ und summirt über alle Werthe r, s, so folgt mit Rücksicht auf (54) und (82)

$$\sum e_{\iota\iota'} \delta_p \xi_\iota \delta_q \xi_{\iota'} = \sum e_\iota \eta_{\iota, \iota'\iota''} \delta_p \xi_{\iota'} \delta_q \xi_{\iota''} = \sum e_\iota \delta_p \xi_{\iota'} \delta_q \eta_{\iota, \iota'}$$
$$= \sum e_\iota \delta_{p+q} \xi_\iota = x^{p+q} = x^p x^q = \sum e_\iota \delta_p \xi_\iota e_{\iota'} \delta_q \xi_{\iota'},$$

also

$$\sum (e_{\iota\iota'} - e_\iota e_{\iota'}) \delta_p \xi_\iota \delta_q \xi_{\iota'} = 0;$$

setzt man hierin für p und q alle Werthe aus der Reihe

$$0, 1, 2 \ldots (n-1),$$

und bedenkt, daß die Determinante ρ von Null verschieden ist, so folgt leicht, daß immer $e_{\iota\iota'} = e_\iota e_{\iota'}$, also zufolge (83)

$$e_r e_s = \sum e_\iota \eta_{\iota, rs} \tag{84}$$

ist, wodurch wir zu der Gleichung (19) unseres ersten Theiles zurückgekehrt sind.

Substituirt man endlich für x alle n verschiedenen Wurzeln und bezeichnet mit $e_r^{(s)}$ denjenigen Werth von e_r, welcher durch die Wurzel $x = x^{(s)}$ erzeugt wird, so erhält man, wenn man die Determinante der n^2 Zahlen (82) bildet, die den Werthen

$$p = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$$

entsprechen, das Resultat

$$\sqrt{D} = \rho \sum \pm e_1' e_2'' \ldots e_n^{(n)} = \rho e$$

und hieraus mit Rücksicht auf (80)

$$\Delta = e^2; \tag{85}$$

das auf diese Weise aus dem System der Zahlen $\eta_{t,rs}$ berechnete System E der Zahlen $e_r^{(s)}$ besitzt daher eine von Null verschiedene Determinante e.

Da die Gleichungen (84) für jede der n Substitutionen $x = x^{(s)}$ gelten, so ist hiermit aus den gegebenen Zahlen $\eta_{t,rs}$ ein n-werthiges System von n Größen $e_1, e_2 \ldots e_n$ construirt, aus welchem umgekehrt auf die im ersten Theile angegebene Art unser jetzt gegebenes System von Zahlen $\eta_{t,rs}$ erzeugt wird. Hiermit ist der Beweis geliefert, daß jedes System von n Haupteinheiten, wie es in der Untersuchung des Herrn Weierstrass auftritt, stets aufgefaßt werden darf als ein n-werthiges System von n gewöhnlichen Zahlen, in der Weise, daß jede rationale Gleichung zwischen den n Haupteinheiten dann und nur dann wahr ist, wenn sie für jedes der von uns hergeleiteten Special-Systeme $e_1^{(s)}, e_2^{(s)} \ldots e_n^{(s)}$ gilt. Will man daher überhaupt noch von solchen übercomplexen Größen als von neuen Zahlen sprechen, (was ich für unzweckmäßig halte, weil in unserer höheren Algebra beständig mehrwerthige Größensysteme genau in der hier beschriebenen Weise auftreten), so kann dies doch nur in einem ganz anderen und zwar unendlich viel schwächeren Sinne geschehen, als bei der gewaltigen Bereicherung des Körpers der reellen Zahlen durch die Hinzufügung der imaginären Zahlen, oder auch bei der Einführung der Hamilton'schen Quaternionen, die, wenn ihr Nutzen auch auf ein sehr kleines Feld beschränkt zu sein scheint, doch auf den Character der Neuheit gegenüber den anderen Zahlen unbedingten Anspruch erheben dürfen.

Es ist nun auch leicht zu zeigen, daß das gefundene System E der Zahlen $e_r^{(s)}$ — abgesehen von der Freiheit, die den einzelnen Substitutionen entsprechenden oberen Indices nach Belieben mit ein-

ander zu vertauschen — ein einziges, vollständig bestimmtes, d. h. immer dasselbe ist, wie auch die numerischen Werthe der Variabeln ξ_r, denen ein von Null verschiedener Werth ρ entspricht, sonst gewählt sein mögen. Denn wenn wir, nachdem wir ein bestimmtes solches System gefunden und uns dadurch auf die im ersten Theile unserer Untersuchung angenommene Grundlage gestellt haben, den Größen ξ_r ihre volle Variabilität wiedergeben und, ohne Rücksicht auf die bisherige Bedeutung von x, diese Größe jetzt, wie im ersten Theile (6), als n-werthige lineare Function

$$x = \sum e_\iota \xi_\iota \tag{86}$$

definiren, so folgt aus (19) oder (84)

$$xe_r = \sum e_{\iota'} \eta_{\iota' r} \xi_\iota = \sum e_\iota \eta_{\iota, r}, \tag{87}$$

und wenn ξ eine willkürliche einwerthige Größe bedeutet,

$$(x - \xi) e_r = \sum e_\iota (\eta_{\iota, r} - (\iota, r) \xi); \tag{88}$$

wendet man hierauf alle n Substitutionen an, setzt für r alle n Indices und bildet die Determinante, so erhält man nach Division durch die von Null verschiedene Determinante e und mit Rücksicht auf (74) das Resultat

$$\prod (x - \xi) = \varepsilon(\varphi); \tag{89}$$

da nun die Function $\varepsilon(\varphi)$ schon durch das System der Zahlen $\eta_{\iota, r\iota}$ vollständig bestimmt ist, so gilt dasselbe von der Gesammtheit der der n linearen Functionen x in (86), also auch von dem System E ihrer Coefficienten $e_r^{(s)}$. Zugleich ergiebt sich hierbei das Resultat, in welchem rückwärts alles Uebrige enthalten ist, daß $\varepsilon(\varphi)$ und also auch

$$\varphi = \prod x \tag{90}$$

ein Product von n linearen Factoren ist. —

Bei dem vorstehenden Beweise der Existenz des erzeugenden Systems E und der Zerlegbarkeit der Function φ in lineare Factoren habe ich denjenigen Weg gewählt, welcher die meisten Berührungspuncte mit den Entwickelungen des Herrn Weierstrass darbietet. Hierbei habe ich die besondere Voraussetzung machen müssen, daß die in (79) definirte Determinante ρ nicht identisch verschwindet; in Wahrheit ist dies, wie ich schon oben bemerkt habe, eine nothwendige Folge unserer Grundannahme, daß die Determinante Δ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, aber es hat mir trotz mancher zeitraubenden Versuche nicht gelingen wollen, diesen nicht unwichti-

gen Satz kurz und zwar lediglich mit denjenigen Hülfsmitteln zu beweisen, welche in der obigen Darstellung vor seiner Benutzung, also bis (81), entwickelt sind. Da die analoge Frage für die Function φ oben in (46) auf die leichteste Weise erledigt ist, nämlich durch die wirkliche Angabe eines aus den Zahlen $\eta_{t,rs}$ rational abgeleiteten Werthsystems $\xi_r = \delta\xi_r$, für welches φ nicht verschwindet, so befremdet mich diese Schwierigkeit, und ich würde mich sehr freuen, wenn es einem anderen Mathematiker gelänge, sie zu überwinden.

Daß wirklich ρ nicht identisch verschwindet, wenn Δ von Null verschieden ist, kann man nun — freilich post festum — auf einem ganz anderen Wege beweisen, nämlich so, daß man vorher die Zerlegbarkeit der Function φ in lineare Factoren darthut. Der Kürze halber will ich mich aber hier darauf beschränken, nur die Hauptpuncte dieses Beweises anzugeben (vergl. den oben citirten § 159 der zweiten Auflage von Dirichlet's Zahlentheorie). Unter der im Folgenden immer geltenden Annahme constanter Differentiale $d\xi_r$, $d'\xi_r$ findet man aus (62) durch abermalige Differentiation unter Berücksichtigung von (55) und der aus (36) oder (43) leicht abzuleitenden Gleichung

$$\sum d\tau_t d'\eta_t = \sum \tau_t dd'\eta_t$$

das Resultat

$$dd' \log\varphi = -\delta_{-2}\sum \tau_t dd'\eta_t; \tag{91}$$

definirt man die von d und d' abhängige Variation d'' durch die ebenfalls constanten Differentiale

$$d''\xi_r = dd'\eta_r, \tag{92}$$

so nimmt dasselbe die einfachere Form

$$dd' \log\varphi = -\delta_{-2} d''\tau \tag{93}$$

an, woraus leicht der Satz

$$dd' \log\varphi = d''\delta \log\varphi \tag{94}$$

folgt, welcher die Grundlage des Beweises bildet (beiläufig bemerkt, folgt hieraus schon, daß aus der Function φ und der Variation δ sich das ganze System der Zahlen $\eta_{t,rs}$ rückwärts ableiten läßt). Man zeigt zunächst leicht, daß jeder ganze rationale Factor ψ der Function φ dieselbe Eigenschaft

$$dd' \log\psi = d''\delta \log\psi \tag{95}$$

besitzt. Da ferner

$$\delta\left(\frac{\psi^2 d''\delta\log\psi}{\delta\psi}\right) = \psi\,\delta\left(\frac{d''\delta\psi}{\delta\psi}\right) \tag{96}$$

ist, so ergiebt sich, daß die ganze Function

$$\delta\psi^2 d^2\psi - 2\delta\psi\, d\psi\,\delta d\psi + d\psi^2\delta^2\psi \tag{97}$$

durch ψ theilbar ist, und hieraus läßt sich, wenn man für ψ ein Product von lauter von einander verschiedenen irreductibelen oder Primfunctionen nimmt, auf verschiedene Art beweisen, daß $\varepsilon(\psi)$ und also auch ψ ein Product von lauter linearen Factoren ist. Dasselbe gilt daher auch von $\varepsilon(\varphi)$ und φ. Ist endlich

$$x = \sum e_\iota \xi_\iota \tag{98}$$

irgend einer dieser linearen Factoren von φ, so kann man ihn immer so wählen, daß $\delta x = 1$ wird, und dann giebt der auch für ihn gültige obige Satz

$$dd'\log x = d''\delta\log x \tag{99}$$

unmittelbar das Resultat $dx\,d'x = d''x$, d. h.

$$e_r e_s = \sum e_\iota \eta_{\iota,rs}, \tag{100}$$

womit das erstrebte Ziel erreicht ist. Daß aber die Function ρ nicht identisch verschwindet, daß also die n linearen Functionen x von einander verschieden sind, ergiebt sich jetzt sofort daraus, daß, wie aus (77) oder auch auf andere Weise leicht folgt, $2\tau = S(x^2)$ ist, und daß die Discriminante Δ dieser Function einen von Null verschiedenen Werth hat. —

Zum Schluß noch folgende Bemerkung. Ich habe der Untersuchung von vornherein den Körper der complexen Zahlen zu Grunde gelegt, weil hierdurch die Darstellung sehr erleichtert wird. Will man, wie es in der Abhandlung des Herrn Weierstrass geschieht, nur reelle Zahlen $\eta_{\iota,rs}$ und ξ_r zulassen, so hat dies auf das mehrwerthige System $e_1, e_2 \ldots e_n$ lediglich den Einfluß, daß, wenn ein Specialsystem (5) imaginäre Zahlen enthält, immer ein zweites Specialsystem vorhanden ist, welches aus den mit ihnen conjugirten imaginären Zahlen besteht.

Braunschweig, 13. Februar 1885.

Die indogermanische Endung des Locativs Sing. der *u*-Declination.

Von

A. Bezzenberger in Königsberg i. Pr.

Durch J. Schmidt's Abhandlung »Der Locativus Singularis und die griechische *i*-Declination« (Kuhns Zeitschrift XXVII. 287) scheint mir erwiesen zu sein, »daß der Locativ von *i*-Stämmen in der indog. Ursprache auf *ē* gebildet ist«, und daß die indogermanische Endung des Locativs Sing. der *u*-Declination *ēu* oder *ōu* war. Die Entscheidung über dies entweder — oder bietet, wie ich glaube, das Litauische, welches ja auch jene Endung *ē* sehr treu bewahrt hat.

Die grundsprachliche Endung des Dativs Sing. der *o*-Declination, *ōi*, ist in dieser Sprache zunächst zu *ûi* geworden (vgl. meine Beiträge zur Geschichte der lit. Sprache S. 127 f.). Hieraus entstand, indem das *i* *ἀνεκφώνητον* wurde, in einem Theile des litauischen Sprachgebietes *û*. Diese Endung ist auf das bestimmteste zu erkennen in *didesniuojuj (prisakimuj)*, welches ich in dem żemaitischen Giwenimas żmogaus krikszczionies (Wilniuje 1861) S. 53 finde[1]), sowie in preußisch-nordlitauischen Dativen Sing. wie *gíro-jū*[2]), *výrū* (Prökuls; vgl. Beitr. z. Kunde d. indog. Sprachen VIII. 120[1]), 122[1])) und in den żemaitischen auf *ou* (*ōu*), welche in dem von Geitler Lit. Studien S. 21 ff. veröffentlichten Märchen aus Andrjewo (*neužkęntamôujôu súnôu, neteisìngam wyrèsniôujôu, teisìngôujôu jaunikáitsiôu*) und in Dowkontschen oder Dowkont zugeschriebenen (Geitler a. a. O. S. 74, Karłowicz O języku litewskim S. 336) Büchern begegegnen (z. B. *tretioujou bernuželuj* Dajnes Żiamajtiû S. 92 No. 69, *óż kžjmou* Budą senowęs Lëtuwiû etc. S. 30, *óż raktou* das. S. 171[3]), *iżodiou* das. S. 18, *kakaliou* das. S. 25, *żmôgou* das. S. 27, *wiskupou* das.,

1) Aus diesem Text hebe ich beiläufig heraus *baźnincze* »Kirche« (sehr häufig), *petnincze* »Freitag« S. 172 f. (*petnicziomis* S. 173) und *pertnincze* dass. S. 73 (vgl. *pertniczio* Dowkont Dajnes S. 112 No. 85), *kozonincze* »Kanzel« S. 31, *munka* »Leiden« S. 15, 66, 172 (neben *muczelninkaj* S. 38), *tunsi* »in den« S. 69 (neben *dajktusi liuosusi* das.). Für *trys* »drei« erscheint in ihm nicht *trins*, sondern *tris* S. 27. Vgl. Beitr. z. Kunde d. indog. Sprachen IX. 333. Auch die von Smith Beitr. z. vergl. Sprachforschung III. 107 erwähnten Formen *baltynjey, wiresnynjey* zeigen *yn* für *y*.

2) *Gâdrâju, pèlkâju*, wie ich Beitr. z. Kunde d. indog. Sprachen VIII. 110[1]), 132[3]) geschrieben habe, sind zweifellos in *gâdroju, pèlkoju* zu ändern.

3) Vgl. *óż darżams* das. S. 30, *óż bałtam stałui* Dowkont Dajnes S. 87, *óż undīnelems* das. S. 100 f.

swetiou das., *melagiou* das. S. 35, *gywenīmou* das. S. 167, *dīdiouiou kunegaiksztiou* das. S. 168, *skolīnikou* das. S. 169, *Wilelmou wiskupou* das., *siuntīniou* das. S. 170, »*wirou* arba *wirui*« Prasmą Łotinû kałbôs etc. S. 14, »puero, *wakou*, *ui*« das. S. 25, »tecto, *stogou*, *ui*« das. S. 26, »patri, *tiewou*, *ui*« das. S. 27 u. s. w.) und mir bei einem Manne aus Saťanty entgegengetreten sind (z. B. *svĕeto*^{u}); endlich auch in den an die letzteren sich anschließenden Dativen *vėinàkio*, *vàkaro*, *kàlvio*, *dàktaro*, *pó*^{e}*no*, *výro*, welche ich von Żemaiten aus Kule und Płunge und von dem erwähnten Mann aus Saťanty gehört habe. Das für *û* eintretende żemaitische *o*^{u} klingt, namentlich wenn es unbetont ist, oft wie *o* (immer aber anders als der für *o* eintretende Laut).

Setzt man nun *ou* als den grundsprachlichen Ausgang des Locativs Sing. der *u*-Declination voraus, so ist nach dem vorstehenden zu erwarten, daß dasselbe im Litauischen zunächst zu *ûu* geworden, und daß dies da, wo *-ûi* in *-û* verwandelt ist, in *û* übergegangen sei. Dieser Erwartung entspricht der Thatbestand insofern nicht, als sich ein *ûu* nirgends im Litauischen findet. Trotzdem trifft sie zu, da *û* als Endung des Locativs Sing. der *u*-Declination — und zwar nur dieses Locativs — im Żemaitischen und Preußisch-nordlitauischen mit Sicherheit zu erkennen ist und da es als solche doch nur aus *ûu* hervorgegangen sein kann. Zur Begründung der ersten Hälfte dieses Satzes verzeichne ich — indem ich daran erinnere, daß im Preußisch-nordlitauischen *û* durch *o*, *o* durch *ā* vertreten wird — die folgenden Locative:

Wilnuo »in Wilna«, das sich nicht selten in Wołonczewski's Wiskupiste findet, z. B. II. 69 (die Schreibung der Form ist polnisch);

danguoje Dawatku kninga (Wilniuje 1864) S. 203 (das. S. 67 *dąnguj*);

qmžiouie Dowkont Dajnes S. X (neben dem Genit. *qmžiaus* das. S. IX), *Karalauczіouie* das., *Wīlniouie* (neben dem Genit. *Wīlniaus*) das. S. XI, *paskou* (neben *paskuj*) das. S. 155 (vgl. Beitr. z. Kunde d. indog. Sprachen II. 109, 116, Baranowski und Weber Ostlit. Texte I. 16 v. 227);

qmžiouie Budą senowęs Lëtuwiû S. 6, 8, 166, *paskou* das. S. 31, 35, 168 u. ö., *klosztoriouie* das. S. 27, *pakajou* das. S. 159[1]);

»*dongou*, *je*« Prasmą Łotinû kałbôs S. 15, »*skaisteme dongou je*« das. S. 17;

pakàjo^{o} »im Frieden«, *dą̀ngo*^{u} »im Himmel«, *pàsko*^{u} »nach«, *vèrszo*

1) Nicht ganz sicher bin ich, ob ich *užgajniou* das. S. 8, 167 u. ö., *apsókou* das. S. 20 = *apsukou* das. S. 167, *aplinkou* das. S. 29 hierher, oder zum Dativ ziehen soll; vgl. Beitr. z. Geschichte d. lit. Sprache S. 110, »*apsukaĩ* od. *apsu kuĩ*« Kurschat Wörterb. S. 19.

»oben«, welche ich von dem oben erwähnten Mann aus Saĩanty gehört habe;

dọ̀ngo, *pàsko* (daneben *pàskun* und *pàskūn*), *vịdó* »drinnen« in Erzählungen, welche mir einer der oben erwähnten Żemaiten aus Kule dictiert hat (in ihnen auch z. B. *ùgnë* = *ùgnė* »im Feuer« und *nùmėin* = *namẽ-n*[*a*] »nach Haus«);

vèrszo und *verszó*[1]) Beitr. z. Kunde d. indog. Sprachen VIII. 120[1]), 128;

dengó und *dèngoje* »im Himmel«, *paskó*, *vedó* »drinnen«, welche mir in und um Prökuls[2]) wiederholt begegnet sind (ebenda *skyriù* »besonders« und *vèltu* »umsonst«[3]), die also Instrumentale sind).

Ist hiernach *û* als ehemalige Endung des Locativs Sing. im Preußisch-nordlitauischen und Żemaitischen anzusetzen, so ist damit die Richtigkeit der Voraussetzung, daß der indogermanische Ausgang dieses Casus *ōu* gewesen sei, erwiesen; denn nur hierauf, nicht auf *ēu*, kann nach dem gegenwärtigen Stand der litauischen und der indogermanischen Lautlehre jenes *û* zurückgeführt werden.

In den litauischen Grammatiken endigt der besprochene Locativ auf *-ŭje*, *-ūje* oder *-ui* (vgl. Kurschat Laut- und Tonlehre S. 104, Grammatik §§ 111, 688, 705, Leskien und Brugman Lit. Volkslieder u. s. w. S. 300). Ich habe diese Endungen im vorstehenden bei Seite gelassen, weil sie nach keiner Seite hin von Belang sind. Sollte sich einmal herausstellen, daß *-ūje* ursprünglicher als *-ŭje* ist, so würde es sich leicht auf *-ōu* zurückführen lassen (als *-uu* + *je*). — Das Lettische kommt für die hier behandelte Frage nicht in Betracht, und das Altpreußische fördert sie nicht. Wenn altpreuß. *pansdau*, *pirsdau*, *sirsdau* überhaupt hier zu erwägende Formen sind, so fügen sie sich dem gewonnenen Resultate ohne weiteres.

Gegen die Sprache Dowkonts, aus der ich oben mehreres citiert habe, ist man im allgemeinen mißtrauisch, und dies Mißtrauen ist nicht ohne Berechtigung. Es sollte aber nicht so weit getrieben werden, daß man seine Schriften überhaupt nicht liest, oder daß man Formen, die man nur in ihnen findet, einfach ignoriert. Die Rechtfertigung, welche die von ihm schon vor fast fünfzig Jahren gebrauchten, trotzdem aber bisher völlig unbeachteten Locative auf *-ou(je)*, hier gefunden haben, werden davon in Zukunft hoffentlich abhalten.

1) Diese Form habe ich auch von einem Mann aus Petrellen (Kr. Heydekrug, Kirchsp. Saugen) gehört (daneben *paskùi*).

2) Der Locativ ist dort im allgemeinen ungebräuchlich; *dengó* wird im Vater-Unser, *dèngoje* wohl nur in religiösen Vorträgen gebraucht.

3) Budą senowęs Lĕtuwiû S. 169 steht *weltou*.

Ueber ein Euler'sches Integral.

Von

A. Enneper.

Die »Mémoires présentés par divers savans à l'Académie des Sciences de l'Institut de France« enthalten im Tome I (Paris 1827, p. 599—799) die Abhandlung: Cauchy: »Mémoire sur les intégrales définies«, welche für die Theorie der bestimmten Integrale von hervorragender Bedeutung ist. Namentlich zeichnet sich der erste Theil, welcher den Titel führt »Des équations qui autorisent le passage du réell à l'imaginaire« durch eine Reihe sehr allgemeiner Theoreme aus. Von diesen Theoremen möge das folgende in Erinnerung gebracht werden.

Bedeutet y eine Function von x und z, so ist:

$$d\frac{f(y)\frac{dy}{dx}}{dz} = d\frac{f(y)\frac{dy}{dz}}{dx}.$$

mittelst dieser Gleichung folgt:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{z_0}^{z_1} d\frac{f(y)\frac{dy}{dx}}{dz}\,dz = \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{x_0}^{x_1} d\frac{f(y)\frac{dy}{dz}}{dx}\,dx.$$

Durch Ausführung der Integrationen erhält man:

I.
$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\left\{f(y)\frac{dy}{dx}\right\}_{z=z_1} - \left\{f(y)\frac{dy}{dx}\right\}_{z=z_0}\right]dx =$$
$$\int_{z_0}^{z_1}\left[\left\{f(y)\frac{dy}{dz}\right\}_{x=x_1} - \left\{f(y)\frac{dy}{dz}\right\}_{x=x_0}\right]dz.$$

Es ist selbstverständlich, daß bei den verschiedenen Integrationsordnungen, die zu integrirende Function innerhalb der Grenzen der Integrationsvariabeln als endlich und stetig angenommen wird.

Es sei $y = x(a+zi)$, wo $i = \sqrt{-1}$ und a eine positive, von Null verschiedene, Constante bedeutet. Man nehme in I. $x_0 = a$, $z_0 = 0$ und $z_1 = b$. Macht man weiter die Annahme, daß

(1) $$xf[x(a+zi)] = 0, \text{ für } x = 0,$$

welchen Werth auch z haben möge, so nimmt die Gleichung I. folgende einfachere Form an:

II.
$$\int_0^{x_1}(a+bi)f[x(a+bi)]\,dx-\int_0^{x_1}af(ax)\,dx=$$
$$i\int_0^b x_1 f[x_1(a+si)]\,ds$$

Man nehme weiter $x_1=\infty$ und mache die Annahme:

(2) $$xf[x(a+si)]=0,\text{ für }x=\infty,$$

welchen Werth auch s haben möge. Die Gleichung II. vereinfacht sich in:

$$(a+bi)\int_0^\infty f[x(a+b)]\,dx=a\int_0^\infty f(ax)\,dx,$$

oder rechts x statt ax gesetzt:

III. $$(a+bi)\int_0^\infty f[x(a+bi)]\,dx=\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Wegen der Ableitung dieser Gleichung muß a wesentlich positiv und von Null verschieden sein. Es sei

(3) $$f(x)=\frac{x^{p-1}}{1+x},$$

dann ist:

(4) $$xf[x(a+bi)]=(a+bi)^{p-1}\frac{x^p}{1+x(a+bi)}.$$

Für die Annahme (3) ist die Gleichung (1) nach (4) offenbar erfüllt, wenn $p>0$ ist. Da ferner:

$$\frac{x^p}{1+x(a+bi)}=\frac{1}{x^{1-p}}\frac{1}{\frac{1}{x}+a+bi},$$

so ist auch die Bedingung (2) erfüllt, wenn $1-p$ positiv, also $1>p$ ist. Es werde in der Gleichung (3) $0<p<1$ angenommen. Für den Werth von $f(x)$ aus (3) gibt die Gleichung III:

(5) $$(a+bi)^p\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x(a+bi)}\,dx=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx.$$

Man setze hierin $a=\cos\alpha\,b=\sin\alpha$ und zur Abkürzung:

(6) $$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=P.$$

Die Gleichung (5) läßt sich dann auf folgende Form bringen:

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+xe^{\alpha i}}\,dx = Pe^{-p\alpha i}.$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Theile folgt:

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}(1+x\cos\alpha)}{1+2x\cos\alpha+x^2}\,dx = P.\cos p\alpha,$$

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{x^p \sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2}\,dx = P.\sin p\alpha.$$

Es sei:

$$(10) \qquad S = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{p-1}(1+x\cos\alpha)}{1+2x\cos\alpha+x^2}\,\frac{t^p\sin\alpha}{1+2t.\cos\alpha+t^2}\,dxdt.$$

Es ist S gleich dem Product zweier Integrale. Mittels der Gleichungen (8) und (9) findet man:

$$(11) \qquad S = P^2\cos p\alpha\sin p\alpha = P^2\frac{\sin 2p\alpha}{2}.$$

Sieht man S als Doppelintegral an, so läßt sich t durch eine Variabele z mittels der Gleichung

$$t = \frac{z}{x}$$

ersetzen. Hierdurch nimmt S folgende Form an:

$$(12) \qquad S = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(1+2x\cos\alpha)z^p\sin\alpha}{(1+2x\cos\alpha+x^2)(z^2+2xz\cos\alpha+x^2)}\,dx\,dz.$$

Nun ist:

$$\frac{(1+x\cos\alpha)\sin\alpha}{(1+2x\cos\alpha+x^2)(z^2+2xz\cos\alpha+x^2)} =$$

$$\frac{(x+\cos\alpha)\cos\alpha+\dfrac{z+1}{z-1}\sin^2\alpha}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2}$$

$$+\frac{-(x+z\cos\alpha)\cos\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha(-z^2+3z)-(z+1)}{z-1}}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{z^2+2xz\cos\alpha+x^2}.$$

Wird in der Gleichung (12) die Integration nach x ausgeführt, so folgt:

$$(13)\quad S = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha\cos\alpha\, z_p \log z}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\,dz + \int_0^\infty \frac{\alpha(1-z\cos 2\alpha)\,z^{p-1}}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\,dz.$$

Die Gleichungen (8) und (9) geben $\pi-2\alpha$ statt α und z statt x gesetzt:

$$(14)\quad \int_0^\infty \frac{z^{p-1}(1-z\cos 2\alpha)}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\,dz = P.\cos p(\pi-2\alpha).$$

$$(15)\quad \int_0^\infty \frac{z^p \sin 2\alpha}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\,dz = P.\sin p(\pi-2\alpha).$$

Die Gleichung (15) nach p differentiirt gibt:

$$\int_0^\infty \frac{z^p \log z.\sin 2\alpha}{1-2z\cos 2\alpha+z^2}\,dz = d\frac{P.\sin p(\pi-2\alpha)}{dp}.$$

Mittels dieser Gleichung und der Gleichung (14) läßt sich die Gleichung (13) auf folgende Form bringen:

$$S = \frac{1}{2}d\frac{P\sin p(\pi-2\alpha)}{dp} + \alpha.P\cos p(\pi-2\alpha),$$

d. i.:

$$S = \frac{\sin p(\pi-2\alpha)}{2}\frac{dP}{dp} + \frac{\pi\cos p(\pi-2\alpha)}{2}P.$$

Setzt man hierin für S seinen Werth aus (11) ein, so folgt:

$$\sin 2p\alpha.P^2 = \sin p(\pi-2\alpha)\frac{dP}{dp} + \pi\cos p(\pi-2\alpha).P$$

oder auch:

$$(16)\quad \begin{aligned}&\cos 2p\alpha.\left[\sin p\pi\frac{dP}{dp} + \pi\cos p\pi.P\right]\\ &+\sin 2p\alpha\left[-\cos p\pi\frac{dP}{dp} + \pi\sin p\pi.P - P^2\right] = 0.\end{aligned}$$

Da nun α innerhalb bestimmter Grenzen ein beliebiger Winkel ist, ferner P von α unabhängig, so zerfällt die Gleichung (16) in die beiden folgenden:

$$(17)\quad \begin{aligned}\sin p\pi\frac{dP}{dp} + \pi\cos p\pi.P &= 0,\\ -\cos p\pi\frac{dP}{dp} + \pi\sin p\pi P - P^2 &= 0.\end{aligned}$$

Die Elimination von $\frac{dP}{dp}$ gibt:

$$\pi P - \sin p\pi \,.\, P^2 = 0$$

oder:

$$\pi - \sin p\pi \,.\, P = 0,$$

also:

$$P = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Für diesen Werth von P werden die Gleichungen (17) erfüllt.

Man kann nach Cauchy eine ähnliche Gleichung wie die Gleichung III. aufstellen, für welche $\alpha = 0$ ist, nur hat dann $f(x)$ anderen Bedingungen, wie den in (2) und (3) enthaltenen, zu genügen. Man nehme in I. $y = x + \varepsilon i$, ferner: $x_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$. Es folgt dann:

IV. $$\int_0^{x_1} [f(x+\varepsilon_1 i) - f(x)]\,dx = i\int_0^{\varepsilon_1} [f(x_1+\varepsilon i) - f(\varepsilon i)]\,d\varepsilon.$$

Ist nun $f(x+\varepsilon i) = 0$ für $x = \infty$, welchen Werth ε haben möge und $f(x+\varepsilon i) = 0$, wenn $\varepsilon = \infty$ für alle Werthe von x, so reducirt sich die Gleichung IV. für $x_1 = \infty$ und $\varepsilon_1 = \infty$ auf:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = i\int_0^{\infty} f(\varepsilon i)\,d\varepsilon$$

oder umgekehrt:

V. $$i\int_0^{\infty} f(\varepsilon i)\,d\varepsilon = \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Den an die Function $f(t)$ gestellten Bedingungen genügt für $o < p < 1$

$$f(t) = \frac{t^{p-1}}{1+t}.$$

Die Gleichung V gibt dann:

$$i^p \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{p-1}}{1+\varepsilon i}\,d\varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,$$

oder $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ gesetzt:

(18) $$\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{p-1}}{1+\varepsilon i}\,d\varepsilon = P\,.\,e^{-\frac{p\pi i}{2}},$$

wo wieder P durch die Gleichung (6) definirt ist. Die Trennung der reellen und imaginären Theile in der Gleichung (18) gibt:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{1+z^2}dz = P.\cos\frac{p\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{z^p}{1+z^2}dz = P.\sin\frac{p\pi}{2}.$$

Es ist dann:

$$S = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{1+z^2}\frac{t^p}{1+t^2}dz\,dt \tag{19}$$

gesetzt,

$$S = P^2\cos\frac{p\pi}{2}\sin\frac{p\pi}{2} = P^2\frac{\sin p\pi}{2}. \tag{20}$$

Führt man in S x statt t mittels der Gleichung

$$t = \frac{x}{z}$$

ein, so nimmt die Gleichung (19) folgende Form an:

$$S = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+z^2)(x^2+z^2)}dz.$$

Durch Ausführung der Integration nach z folgt:

$$S = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$$

d. i.:

$$S = \frac{\pi}{2}P.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung (20) gibt:

$$\pi P = P^2\sin p\pi$$

und hieraus:

$$P = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Diese Herleitung des Werthes von P ist etwas kürzer wie die erste, führt aber auch nicht auf die allgemeine Gleichung (5) oder (7).

Ueber einige bestimmte Integrale.

Von

A. Enneper.

In dem Aufsatz »Ueber einige elliptische Integrale« (Nachrichten v. d. K. G. d. Wissenschaften 1884 p. 175—194) sind zwei Methoden angegeben zur Herstellung einiger Relationen zwischen elliptischen Integralen. Eine genauere Untersuchung des Gegenstandes, namentlich mit Beziehung auf Verification erhaltener Resultate, hat den Verfasser noch zu weiteren Gleichungen geführt, die vielleicht der Beachtung nicht unwerth sind, mit Rücksicht auf die Einfachheit der angewandten Deductionen.

Es sei:

$$(1) \qquad P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \log\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \log\frac{(1+\sin\varphi)(1-k\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)(1+k\sin\varphi)}\,d\varphi.$$

Es läßt sich auf folgende Art nachweisen, daß P von k, wo $0 \leqq k \leqq 1$, unabhängig ist. Zu diesem Zweck gehe man von der Gleichung aus:

$$d\frac{1+k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+k)\sin\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1-k}\,d\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Man differentiire die Gleichung (1) nach k, multiplicire mit $1-k$. Wegen der vorstehenden Gleichung folgt dann:

$$(1-k)\frac{dP}{dk} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot \log\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\,d\varphi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k)(1+k\sin^2\varphi)}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi.$$

Im ersten und zweiten Integrale rechts wende man die integratio per partes an. Man erhält dann:

$$(1-k)\frac{dP}{dk} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k)(1+k\sin^2\varphi)}{(1-k\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi.$$

Durch Vereinigung der rechts stehenden Integrale folgt:

$$(1-k)\frac{dP}{dk} = 0, \text{ d. i. } \frac{dP}{dk} = 0.$$

Es ist also P von k unabhängig. Für $k = 0$ gibt die Gleichung (1):

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi} \log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi} \log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\,d\varphi,$$

oder $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = z$ gesetzt:

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{z} \log\frac{1-z}{1+z}\,dz,$$

d. i.:

$$P = \frac{\pi^2}{2}. \tag{2}$$

Mittels der Gleichungen (1) und (2) läßt sich die Gleichheit der beiden folgenden Integrale nachweisen. Es sei:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta} \log\frac{1+k\sin^2\theta+\cos\theta\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+k\sin^2\theta-\cos\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta - \frac{\pi^2}{2}. \tag{3}$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta} \log\frac{\sqrt{(1+k)^2-4k\sin^2\theta}+(1-k)\sin\theta}{\sqrt{(1+k)^2-4k\sin^2\theta}-(1-k)\sin\theta}\,d\theta - \frac{\pi^2}{4}. \tag{4}$$

Man setze in A:

$$\sin\theta = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Die Gleichung (3) nimmt dann folgende Form an:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \log\frac{(1+\sin\varphi)(1-k\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)(1+k\sin\varphi)}\,d\varphi - \frac{\pi^2}{2}. \tag{5}$$

Mittels der Substitution:

$$\sin\theta = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi},$$

geht die Gleichung (4) in folgende über:

$$(6)\quad B = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \log\frac{(1+\sin\varphi)(1-k\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)(1+k\sin\varphi)}\,d\varphi - \frac{\pi^2}{4}$$

Die Gleichungen (5) und (6) geben:

$$2(A-B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \log\frac{(1+\sin\varphi)(1-k\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)(1+k\sin\varphi)}\,d\varphi - \frac{\pi^2}{2}.$$

Wegen der Gleichungen (1) und (2) verschwindet die rechte Seite der vorstehenden Gleichung. Es ist also $2(A-B)=0$ oder

$$A = B.$$

Man kann diese Gleichung auch auf folgende einfache Art beweisen. Durch Differentiation nach k geben die Gleichungen (3) und (4):

$$(7)\quad \frac{dA}{dk} = -\frac{2}{1+k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

$$(8)\quad \frac{dB}{dk} = -\frac{2}{1+k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1+k)^2-4k\sin^2\theta}}.$$

Mittels der Substitution:

$$\sin\theta = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi},$$

läßt sich die Gleichung (8) auf die Form bringen:

$$\frac{dB}{dk} = -\frac{2}{1+k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung (7) gibt:

$$(9)\quad \frac{dA}{dk} = \frac{dB}{dk}.$$

Da nun aus (3) und (4) für $k=0$ sowohl $A=0$ wie $B=0$ ist, so folgt durch Integration der Gleichung (9) wieder

$$A = B.$$

Auf ähnliche Art läßt sich die Gleichheit der beiden folgenden Integrale M und N nachweisen, wo

$$(10) \qquad M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi} + [1-(1+k)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi} - [1-(1+k)\sin^2\varphi]}\, d\varphi.$$

$$(11) \qquad N = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin\left(\frac{1-k}{1+k}\sin\varphi\right)}{\sin\varphi}\, d\varphi.$$

Es sind k und k' durch die Gleichung $k^2+k'^2 = 1$ verbunden. Die Gleichung (11) läßt sich auch schreiben

$$N = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\frac{\log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}{d\varphi} \cdot \arcsin\left(\frac{1-k}{1+k}\sin\varphi\right) d\varphi.$$

Durch Anwendung der integratio per partes läßt sich N auf folgende Form bringen:

$$(12) \qquad N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1-k}{1+k}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2\sin^2\varphi}} \log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \cdot d\varphi.$$

Da nun allgemein:

$$\int_0^{\pi} F(\cos\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(\cos\varphi) + F(-\cos\varphi)]\, d\varphi,$$

so läßt sich die Gleichung (12) auch auf folgende Art schreiben:

$$(13) \qquad N = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{(1-k)\cos\varphi}{\sqrt{(1+k)^2-(1-k)^2\sin^2\varphi}} \log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \cdot d\varphi.$$

Die Gleichungen (10) und (11) nach k differentiirt geben:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{dM}{dk} = -\dfrac{2}{1+k}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \\[2ex] \dfrac{dN}{dk} = -\dfrac{4}{1+k}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+k)^2-(1-k)^2\sin^2\varphi}}, \end{cases}$$

oder auch

$$(15) \qquad \frac{dN}{dk} = -\frac{2}{1+k}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+k)^2-(1-k)^2\sin^2\varphi}}.$$

Mittels der bekannten Substitution:

$$\sin\varphi = -\frac{(1+k)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}} \tag{16}$$

nimmt die Gleichung (15) die Form an:

$$\frac{dN}{dk} = -\frac{2}{1+k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}.$$

Nach (14) ist also:

$$\frac{dM}{dk} = \frac{dN}{dk}.$$

Hieraus folgt:

$$M = N,$$

da für $k = 0$ sich M und N auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\, d\varphi$$

reduciren.

Mittelst der Substitution (16) läßt sich der Werth von N aus (13) wie folgt darstellen:

$$N = \frac{1-k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(1+k)\sin^2\theta}{1-k'^2\sin^2\theta} \log\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}+[1-(1+k)\sin^2\theta]}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}-[1+(1+k)\sin^2\theta]}\, d\theta.$$

Es werde wieder rechts φ statt θ gesetzt und dann mittels der so erhaltenen Gleichung und der Gleichung (10) $M - N = 0$ gebildet. Durch Division mit $\frac{1+k}{2}$ folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(1-k)\sin^2\varphi}{1-k'^2\sin^2\varphi} \log\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}+[1-(1+k)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}-[1-(1+k)\sin^2\varphi]}\, d\varphi = 0.$$

Man kann diese Gleichung auch direct beweisen, sie folgt aus dem evidenten Resultate:

$$\int_0^{\pi} \log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\, d\theta = 0,$$

mit Hülfe der Substitution:

$$\sin\vartheta = \frac{(1+k)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Setzt man:

$$\sin\vartheta\,\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi},$$

so geht die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\vartheta}\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\pi^2}{2}$$

über in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi$$
$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Diese Gleichung mit den Gleichungen (1) und (2) durch Addition und Subtraction combinirt gibt die beiden folgenden Relationen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\,d\varphi$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Ueber das Maximum eines Vierecks von gegebenen Seiten.

Von

A. Enneper.

Die Seiten eines Vierecks mögen bestimmte Längen haben, um ihre Endpuncte aber drehbar sein, so daß das Viereck verschiedene Formen annehmen kann. Es bieten sich hierbei einige geometrische Fragen dar, die nicht ohne Interesse sind. So bildet z. B. der Ort der Schnittpuncte der Diagonalen des Vierecks eine algebraische Curve; die Verbindungslinie der Mitten beider Diagonalen hat zur Enveloppe eine algebraische Curve u. s. w. Von diesen Fragen soll nur die dem Inhalt des Vierecks in Beziehung auf den Maximalwerth behandelt werden, da sich eine sehr einfache Lösung ergiebt, welche in dem folgenden Satz enthalten ist:

> Sind die Seiten von bestimmter Länge eines Vierecks um ihre Endpuncte drehbar, so ist der Inhalt des Vierecks ein Maximum, wenn sich dasselbe einem Kreise einbeschreiben läßt.

Eine möglichst einfache Herleitung dieses Satzes bildet den Gegenstand der folgenden Zeilen. In Beziehung auf ein orthogonales Coordinatensystem kann immer angenommen werden, daß eine Seite des Vierecks auf der Axe der x liege. Die Coordinaten der Endpuncte der Seite seien a, o und a_1, o, wo der Einfachheit halber $a_1 > a$ sei. Die Coordinaten der beiden anderen Eckpuncte seien x, y und x_1, y_1. Die Länge der Verbindungslinie der Puncte (a, o) und (x, y) sei gleich b, die Distanz der Puncte (x, y) (x_1, y_1) sei gleich c, die Distanz der Puncte (x_1, y_1) und (a_1, o) sei gleich b_1. Endlich setze man $a_1 - a = c_1$. Es sind dann b, b_1, c und c_1 die Seiten des Vierecks. In Folge der getroffenen Bezeichnungen finden nun folgende Gleichungen statt.

$$(x-a)^2+y^2 = b^2. \tag{1}$$

$$(x_1-a_1)^2+y_1^2 = b_1^2. \tag{2}$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = c^2. \tag{3}$$

$$a_1-a = c_1. \tag{4}$$

Wird der Inhalt des Vierecks durch S bezeichnet, so ist:

$$2S = \pm \begin{vmatrix} y & x-a_1 \\ y_1 & x_1-a \end{vmatrix}, \tag{5}$$

wo rechts das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Werth der Determinante positiv oder negativ ist.

Die Gleichungen (1) und (2) von der Gleichung (3) subtrahirt geben:

$$(6) \qquad b^2 + b_1^2 = (a^2 + a_1^2) - c^2 = 2yy_1 + 2xx_1 - 2ax - 2a_1x_1.$$

Setzt man zur Abkürzung nach (4) $a_1 - a = c_1$ und:

$$(7) \qquad \frac{b^2 + b_1^2 - c_1^2 - c^2}{2} = \rho,$$

so läßt sich die Gleichung (6) auf folgende Form bringen:

$$(8) \qquad yy_1 + (x - a_1)(x_1 - a) = \rho.$$

Die Gleichungen (1) bis (5) enthalten die Variabeln x, y, x_1, y_1, von denen aber nur eine arbiträr bleibt. Man bilde das Quadrat der Gleichung (5), setze für y^2, y_1^2, yy_1 ihre Werthe aus (1), (2) und (8) ein. Es folgt dann:

$$(9) \qquad 4S^2 = \begin{vmatrix} b^2 + a_1^2 - a^2 - 2(a_1 - a)x, & \rho \\ \rho, & b_1^2 - a_1^2 + a^2 + 2(a_1 - a)x \end{vmatrix}.$$

Führt man die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$(10) \qquad \begin{aligned} b^2 + a_1^2 - a^2 - 2(a_1 - a)x &= p, \\ b_1^2 - a_1^2 + a^2 + 2(a_1 - a)x_1 &= p_1, \end{aligned}$$

so läßt sich die Gleichung (9) auf die einfache Form:

$$(11) \qquad 4S^2 = pp_1 - \rho^2.$$

bringen. Mittels der Gleichungen (1) und (2) findet man leicht, daß die in (10) definirten Quantitäten die Quadrate der Verbindungslinien der Puncte (x, y), (a_1, o) und (x_1, y_1), (a, o) sind, oder kürzer, es sind p und p_1 die Quadrate der Diagonale des Vierecks. Zwischen p und p_1 erhält man auf folgende Art eine Relation. Die Gleichung (8) gibt:

$$yy_1 = \rho - (x - a_1)(x_1 - a).$$

Man bilde das Quadrat dieser Gleichung, substituire die Werthe von y^2 und y_1^2 aus (1) und (2). Es folgt dann:

$$[b^2 - (x - a)^2][b_1^2 - (x_1 - a_1)^2] = [\rho - (x - a_1)(x_1 - a)]^2,$$

oder entwickelt:

$$(12) \qquad \begin{aligned} b^2b_1^2 - b^2(x_1 - a_1)^2 - b_1^2(x - a)^2 + (x_1 - x)(a_1 - a)[2xx_1 - (a_1 + a)(x + x_1) + 2aa_1] \\ = \rho^2 - 2\rho(x - a_1)(x_1 - a). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) geben, $a_1 - a = c_1$ gesetzt:

$$(13)\quad 2c_1(x-a) = b^2 + c_1^2 - p, \quad -2c_1(x_1 - a_3) = b_1^2 + c_1^2 - p_1.$$

Hieraus durch Addition:

$$(14)\qquad 2c_1(x_1 - x) = p + p_1 - (b^2 + b_1^2).$$

Es ist ferner, mit Rücksicht auf (13):

$$(15)\qquad \begin{aligned} &2xx_1 - (a+a_1)(x+x_1) + 2aa_1 = 2(x-a)(x_1-a_1) - c_1(x_1 - x) = \\ &\qquad -\frac{1}{2c_1^2}\,[pp_1 - pb_1^2 - p_1 b^2 + b^2 b_1^2 + c_1^4]. \end{aligned}$$

Mittels der Gleichungen (13), (14) und (15) nimmt die Gleichung (12) folgende Form an:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &-pp_1(p+p_1) + 2pp_1(b^2 + b_1^2 - \rho) - p(b_1^2 - c_1^2)^2 - p_1(b^2 - c_1^2)^2 \\ &= 4\rho^2 c_1^2 + 2\rho(b^2 - c_1^2)(b_1^2 - c_1^2) - 2\rho p_1(b^2 - c_1^2) - 2\rho p(b_1^2 - c_1^2). \end{aligned}$$

Nun ist nach (7):

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{c} 2(b^2 + b_1^2) - 2\rho = b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2, \\ b_1^2 - c_1^2 - 2\rho = c^2 - b^2, \quad b^2 - c_1^2 - 2\rho = c^2 - b_1^2, \\ 2\rho c_1^2 + (b^2 - c_1^2)(b_1^2 - c_1^2) = b^2 b_1^2 - c^2 c_1^2. \end{array}\right.$$

Man setze zur Vereinfachung:

$$(18)\qquad \begin{aligned} b^2 + b_1^2 - \rho &= A, \\ (b_1^2 - c_1^2)(c^2 - b^2) = B, \quad (b^2 - c_1^2)(c &- b_1^2) = B_1. \end{aligned}$$

Mittels der Gleichungen (17) und (18) läßt sich die Gleichung (16) einfacher auf folgende Art schreiben:

$$(19)\quad pp_1(p+p_1) - 2pp_1 A + p_1 B_1 + pB + 2\rho(b^2 b_1^2 - c^2 c_1^2) = 0.$$

In Folge dieser Gleichung kann man eine der Quantitäten p und p_1 als Function der anderen ansehn, so daß der in (11) aufgestellte Ausdruck für S^2 nur noch eine Variabele enthält. Man sehe p und p_1 beide als Functionen einer dritten Variabel w an. Die Gleichung (19) giebt dann nach w differentiirt:

$$\frac{dp}{dw}(p_1^2 + 2pp_1 - 2p_1 A + B) + \frac{dp_1}{dw}(p^2 + 2pp_1 - 2pA + B_1) = 0.$$

Bedeutet λ eine Unbestimmte, so läßt sich diese Gleichung durch die beiden folgenden ersetzen:

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dw} = \lambda(p^2 + 2pp_1 - 2pA + B_1), \\ \dfrac{dp_1}{dw} = -\lambda(p_1^2 + 2pp_1 - 2p_1 A + B). \end{array}\right.$$

Nimmt man $w = p$, so gibt die erste Gleichung:

$$1 = \lambda(p^2 + 2pp_1 - 2pA + B_1).$$

Die Gleichung (11) nach w differentiirt gibt:

$$4\frac{dS^2}{dw} = p_1\frac{dp}{dw} + p\frac{dp_1}{dw},$$

d. i. nach (20):

$$4\frac{dS^2}{dw} = \lambda[-p(pp_1 + B) + p_1(pp_1 + B_1)]. \tag{21}$$

Für ein Maximum oder Minimum ist:

$$p(pp_1 + B) = p_1(pp_1 + B_1). \tag{22}$$

Diese Gleichung mit der Gleichung (19) combinirt giebt:

$$\begin{aligned} p(pp_1 + B) &= pp_1 A - \rho(b^2 b_1^2 - c^2 c_1^2), \\ p_1(pp_1 + B_1) &= pp_1 A - \rho(b^2 b_1^2 - c^2 c_1^2). \end{aligned} \tag{23}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Werthe von p und p_1 zu bestimmen. Man bilde das Product der Gleichungen (23), substituire aus (18) die Werthe von A, B und B_1. Es ist dann:

$$\begin{aligned} pp_1[pp_1 - (b_1^2 - c_1^2)(b^2 - c^2)][pp_1 - (b^2 - c_1^2)(b_1^2 - c^2)] \\ = [pp_1(b^2 + b_1^2 - \rho) - \rho(b^2 b_1^2 - c^2 c_1^2)]^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Setzt man weiter:

$$pp_1 = (bb_1 + cc_1)^2 + t, \tag{25}$$

so ergiebt sich aus (24) für t folgende cubische Gleichung:

$$\begin{aligned} [t + (bb_1 + cc_1)^2][t + (b_1 c + b c_1)^2][t + (bc + b_1 c_1)^2] \\ = [t(b^2 + b_1^2 - \rho) + (bb_1 + cc_1)(b_1 c + b c_1)(bc + b_1 c_1)^2. \end{aligned}$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $t = 0$. Die beiden andern folgen aus:

$$\left[t + \frac{(bb_1 + cc_1)^2 + (b_1 c + b c_1)^2 + (bc + b_1 c_1)^2 - (b^2 + b_1^2 - \rho)^2}{2}\right]^2 =$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}[(bb_1 + cc_1)^2 + (b_1 c + b c_1)^2 - (bc + b_1 c_1)^2 - (b^2 + b_1^2 - \rho)^2)]^2 \\ - [(bb_1 + cc_1)(b_1 c + b c_1) - (bc + b_1 c_1)(b^2 + b_1^2 - \rho)]^2. \end{aligned}$$

Wird der Werth von ρ aus (7) eingesetzt, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Form an:

$$\left[t+\frac{-(b^2-b_1^2)^2-(c^2-c_1^2)^2+2(b^2+b_1^2)(c^2+c_1^2)+24bb_1cc_1}{8}\right]^2=$$

$$\tfrac{1}{64}(b+b_1+c+c_1)^2(b-b_1+c-c_1)^2(b-b_1-c+c_1)^2(b+b_1-c-c_1)^2=$$

$$\tfrac{1}{64}[(b^2-b_1^2)^2+(c^2-c_1^2)^2-2(b^2+b_1^2)(c^2+c_1^2)+8bb_1cc_1]^2.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$t=-4bb_1cc_1,$$

$$t=\frac{(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2}{4}-(bb_1+cc_1)^2.$$

Fügt man noch die Wurzel $t=0$ hinzu, so entsprechen nach (25) der Gleichung (24) folgende drei Werthe von pp_1:

(26) $$pp_1=(bb_1+cc_1)^2.$$

(27) $$pp_1=(bb_1-cc_1)^2.$$

(28) $$pp_1=\frac{(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2}{4}.$$

Da b und b_1, sowie c und c_1 gegenüberliegende Seiten des Vierecks, p und p_1 die Quadrate der Diagonalen sind, so drückt die Gleichung (26) aus, daß die Eckpuncte des Vierecks auf dem Umfang eines Kreises liegen. Die Gleichung (27) folgt aus (26) durch Vertauschung von c_1 mit $-c_1$, oder von a mit a_1. Nach (7) läßt sich die Gleichung (28) schreiben $pp_1=\rho^2$, dann ist aber nach (11) $S^2=0$, also auch $S=0$.

In die Gleichungen (23) setze man den Werth von pp_1 aus (26), ferner die Werthe von ρ, A, B und B_1 aus (7) und (18). Es ergeben sich dann für p und p_1 die folgenden Werthe:

(29)
$$p(b_1c+bc_1)=(bb_1+cc_1)(bc+b_1c_1),$$
$$p_1(bc+b_1c_1)=(bb_1+cc_1)(b_1c+bc_1).$$

Mittels der Gleichungen (7), (11) und (26) folgt für das Quadrat des Inhalts S der Ausdruck:

(30) $$16S^2=4(bb_1+cc_1)^2-(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2.$$

Daß den Werthen von p und p_1 aus (29) nach (30) ein Maximum von S entspricht ergiebt sich auf folgende Art. Man bilde aus (26) $\frac{d^2S^2}{dw^2}$ und lasse die Terme weg, welche nach (22) verschwinden. Es ist dann:

$$4\frac{d^2S^2}{dw^2}=\lambda\left[(p_1^2-2pp_1-B)\frac{dp}{dw}-(p^2-2pp_1-B_1)\frac{dp_1}{dw}\right].$$

Wegen der Gleichungen (20) wird die vorstehende Gleichung:

$$2\frac{d^2S^2}{dw^2} = \lambda^2 Z, \tag{31}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} Z = &-3p^2p_1^2 - 2pp_1(B+B_1) - BB_1 \\ &+ Ap(pp_1+B) + Ap_1(pp_1+B_1). \end{aligned}$$

Nach (23) läßt sich dieser Ausdruck auch schreiben:

$$\begin{aligned} Z = &-(pp_1+B)(pp_1+B_1) - pp_1(pp_1+B) - pp_1(pp_1+B_1) \\ &+ 2pp_1A^2 - 2\rho(b^2b_1^2 - c^2c_1^2)A. \end{aligned} \tag{32}$$

Man setze hierin nach (26) $pp_1 = (bb_1+cc_1)^2$, substituire die Werthe von A, B und B_1 aus (18). Es ist dann wegen des Werthes von ρ aus (7):

$$\begin{aligned} 2pp_1A - 2\rho(b^2b_1^2 - c^2c_1^2) &= 2pp_1(b^2+b_1^2) - 4\rho bb_1(bb_1+cc_1) = \\ &2(bb_1+cc_1)[(b^2+b_1^2)cc_1 + (c^2+c_1^2)bb_1]. \end{aligned}$$

Da ferner

$$2A = b^2+b_1^2+c^2+c_1^2,$$

so läßt sich der in (32) für Z aufgestellte Ausdruck wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} Z = \\ &-(b_1c+bc_1)^2(bc+b_1c_1)^2 - (bb_1+cc_1)^2(b_1c+bc_1)^2 - (bb_1+cc_1)^2(bc+b_1c_1)^2 \\ &+ (b^2+b_1^2+c^2+c_1^2)(bb_1+cc_1)[(b^2+b_1^2)cc_1 + (c^2+c_1^2)bb_1], \end{aligned}$$

oder einfacher:

$$Z = bb_1cc_1[(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2 - 4(bb_1+cc_1)^2]$$

d. i. nach (30):

$$Z = -16bb_1cc_1S^2.$$

Die Gleichung (31) wird hierdurch:

$$\frac{d^2S^2}{dw^2} = -8bb_1cc_1\lambda^2S^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Werthe von p und p_1 aus (29) ein Maximum von S bestimmen.

Beweis des Multiplications-Theorems für die Determinanten.

Von

M. Falk aus Upsala.

Vorgelegt von E. Schering.

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$(uv) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n,$$

$$A = \begin{vmatrix} (a\alpha), & (a\beta), & \ldots, & (ax) \\ (b\alpha), & (b\beta), & \ldots, & (bx) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k\alpha), & (k\beta), & \ldots, & (kx) \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & k_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & k_n \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \ldots, & \varkappa_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \ldots, & \varkappa_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n, & \beta_n, & \gamma_n, & \ldots, & \varkappa_n \end{vmatrix},$$

so handelt es sich darum zu beweisen, daß

$$A = D.\Delta$$

ist.

Wenn man nicht von Determinanten erster Ordnung reden will, für welche das Gesetz unmittelbar klar ist, kann man durch eine außerordentlich kurze und einfache Rechnung die Gültigkeit des fraglichen Gesetzes für Determinanten zweiter Ordnung darlegen, wonach man nur zu beweisen braucht, daß das Gesetz für Determinanten $n$ter Ordnung gültig bleibt, wenn es für Determinanten $(n-1)$ter Ordnung gilt. Dies kann folgendermaßen ausgeführt werden.

Setzt man

$$A_r = \begin{vmatrix} a_r, & (a\beta), & \ldots, & (ax) \\ b_r, & (b\beta), & \ldots, & (bx) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_r, & (k\beta), & \ldots, & (kx) \end{vmatrix}$$

und wendet auf die erste Colonne von A, deren Elemente n-gliedrige Summen sind, das bekannte distributive Gesetz der Determinanten an, so bekommt man

$$A = \sum_{r=1}^{n} a_r . A_r .$$

Werden ferner in A_r die Elemente der ersten Colonne successive mit $\beta_r, \gamma_r \ldots \varkappa_r$ multiplicirt und von den entsprechenden Elementen beziehungsweise der zweiten, dritten, . . ., $n$ten Colonne subtrahirt, so erhält man, wenn man

$$(uv)_r = (uv) - u_r v_r$$

setzt, für A_r den Ausdruck:

$$A_r = \begin{vmatrix} a_r, & (a\beta)_r, & (a\gamma)_r, & \ldots, & (a\varkappa)_r \\ b_r, & (b\beta)_r, & (b\gamma)_r, & \ldots, & (b\varkappa)_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_r, & (k\beta)_r, & (k\gamma)_r, & \ldots, & (k\varkappa)_r \end{vmatrix}.$$

Da jetzt $a_r, b_r, \ldots, k_r$ nur in der ersten Colonne von A_r vorkommen, hat man nach einem bekannten elementaren Satze:

$$A_r = a_r \cdot \frac{\partial A_r}{\partial a_r} + b_r \frac{\partial A_r}{\partial b_r} + \ldots + k_r \cdot \frac{\partial A_r}{\partial k_r},$$

wo die Ableitungen von A_r-Determinanten $(n-1)$ter Ordnung sind, welche in bekannter Weise zu bilden sind. Da das Multiplicationsgesetz für Determinanten $(n-1)$ter Ordnung hier als bewiesen vorauszusetzen ist, wende man dasselbe auf jede einzelne dieser Ableitungen von A_r an und bekommt dann, wenn man die Entwickelungen

$$D = a_r \frac{\partial D}{\partial a_r} + b_r \frac{\partial D}{\partial b_r} + \ldots + k_r \frac{\partial D}{\partial k_r},$$

$$\Delta = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_r}$$

benutzt, die Gleichungen

$$\frac{\partial A_r}{\partial a_r} = \frac{\partial D}{\partial a_r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_r}, \quad \frac{\partial A_r}{\partial b_r} = \frac{\partial D}{\partial b_r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_r}, \ldots, \frac{\partial A_r}{\partial k_r} = \frac{\partial D}{\partial k_r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_r},$$

welche, in die Entwickelung von A_r eingesetzt,

$$A_r = \left(a_r \frac{\partial D}{\partial a_r} + b_r \frac{\partial D}{\partial b_r} + \ldots + k_r \frac{\partial D}{\partial k_r} \right) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_r}$$

ergeben, oder

$$A_r = D \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial a_r}.$$

Wird endlich dieser Ausdruck für A_r in die Entwickelung von A eingeführt, so erhält man

$$A = D.\sum_{r=1}^{n} a_r \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_r} \quad \text{d. h.} \quad A = D.\Delta,$$

w. z. b. w.

Göttingen, den 30. December 1884.

Beitrag zur Kenntniß der sympathischen Nerven.

Von

Cand. med. **Fr. Huth.**

Aus dem anatomischen Institut in Königsberg.

Vorgelegt von F. Merkel.

Die Untersuchung der sympathischen Nervenstämme, welche von den großen Ganglien des Bauches zu Leber, Milz und Niere hingehen, ergab die Existenz von Hohlräumen in denselben, welche bis jetzt vollkommen unbekannt sind. Sie wurden beim Menschen, Pferd, Schwein, Rind, Schaf, Hund, im Grenzstrang des Frosches und beim Zander (Lucioperca sandra) gefunden.

Die Nerven zeigen auf dem Querschnitt ein Aussehen, welches auf den ersten Blick an dasjenige schlecht conservirter markhaltiger Fasern erinnert. Ringartige Figuren sind von nicht ganz regelmäßigen Conturen begrenzt und bilden den gesammten Querschnitt, wenn man von den äußerst spärlichen Bindegewebsseptis absieht. Genauere Betrachtung zeigt, daß die Ringe leer sind und daß ihre Wand von den sympathischen Nervenfasern gebildet wird, welche theils dicht aneinander gereiht, theils durch eine geringe Menge von Zwischensubstanz gegenseitig getrennt sind. Die Vergleichung mit Längsansichten ergibt, daß die runden, leeren Figuren langgestreckten Röhren entsprechen, welche durch den Nerven hinziehen. Dieselben können kaum anders, wie als Lymphräume gedeutet werden, obgleich eine Injection bis jetzt allerdings nicht hat gelingen wollen.

Die Räume existiren nur an den größeren Nerven, die kleinen Aestchen im Innern der Organe lassen sie vollständig vermissen.

Entwickelungsgeschichtlich konnten diese Lymphräume bis herunter zu Rindsembryonen von 20 cm und Schweinsembryonen von 23 cm Länge nachgewiesen werden.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

(Fortsetzung.)

L. Kronecker, Beweis, daß für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2+...x^{p-1}=0$ irreductibel ist. S. A. aus dem Journal für reine u. angewandte Mathematik.
Ders., über die Bernoulli'schen Zahlen. S. A. aus dems.
Ders., Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste etc. S. A. aus dems.
Ders., Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen etc. S. A. aus dems.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. VI. Entr. 2. 3.
Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van nederlandsch Indie. D. VIII. St. 3.
Sitzungsberichte der mathematisch-physical. Classe der k. k. Academie der Wissenschaften zu München. 1884. Heft 2. 3.
Memorie della regia accademia in Modena. Ser. II. Vol. II.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVIII. Entr. 4.
E. L. Holmberg, la sierra de Cura. Malal. Buenos Ayres 1884.
Berichte über die Verhandlungen der k. sächsischen Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig. Mathematisch-physical. Cl. 1883. Philologisch-histor. Cl. 1883. I. II.
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XIII. Nr. 1.
Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd IX. Nr. 2—6.
Annales de l'observatoire royal de Bruxelles. T. V. fasc. 2.
Jahrbücher der königl. Academie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. N. F. Heft XII.
Memoirs of the museum of comparative zoology at Haward College. Vol. IX. Nr. 3.
Mittheilungen des Vereins der Aerzte in Steiermark. 1883.
Festschrift der königl. technischen Hochschule zu Berlin. Berlin 1884. 4.
Bulletin de l'academie roy. des. sciences etc. de Belgique. 3e sér. T. VIII. Nr. 9. 10.
Mittag-Leffler, Acta mathematica. 5, 1 (in duplo)
Bulletin de la société mathematique de France. T. XII. Nr. 4.
Verhandlungen der 7. Conferenz der europäischen Gradmessungen. Berlin 1884. Annex II. Rapport sur les triangulations par A. Ferrero.
C. F. W. Peters, die gegenseitige Lage der Sternwarte zu Altona u. Kiel 1884.
Bulletin de la société impériale des naturalistes de Moscou. Année 1884. Nr. 1.
Anuario del observatorio astronomico nacional de Tacubaya. Año V.
Boncompagni, Lettre de Ch. F. Gauss al Dr. G. M. Olbers. Berlin 1883.
— Lettera di C. F. Gauss al Dr. E. G. M. Olbers. Roma 1883.
— intorno ad una lettera di C. F. Gauss al Dr. E. G. M. Olbers. Roma 1884.
— Lettre etc. Extrait de la revue des questions scientif. Octobre 1884.
A. Williams, mineral resources of the united states (U. S. geological survey.)
The transactions of the academy of science of St. Louis. Vol. IV. Nr. 3.
Struckmann, Die Einhornhöhle bei Scharzfeld am Harz. S. A. aus d. Archiv f. Anthropol. XV. 4.

December 1884.

Ztschr. für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftl. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. LVII. Heft 4.
L. von Beckh-Widmanstetter, ein Kampf ums Recht. Graz 1884.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: Dr. *Hensle*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

1. Juli. **№ 5.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 2. Mai 1885.

H. A. Schwarz, über ein auf künstlichem Wege hergestelltes Relief, dessen Gestalt mit einem Theile der Mondoberfläche große Aehnlichkeit hat.

P. de Lagarde, Asadis persisches Glossar (erscheint in den Abhandlungen).

Sitzung vom 6. Juni 1885.

F. Kielhorn, der Grammatiker Pâṇini.

C. Wachsmuth, Corresp., einige antiquarische Bemerkungen zu dem Codex des Privatrechts von Gortyn.

L. Kiepert, Corresp., über eine Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung, von welcher in der Theorie der elliptischen Functionen die Theilung der Perioden abhängt.

Der Grammatiker Pâṇini.

Von

F. Kielhorn.

Prof. Pischel hat in der Zeitschr. d. D. Morg. Ges. XXXIX S. 95—98 zwei Verse eines Dichters *Pâṇini* aus *Nami's* Rudraṭakâvyâlaṃkâraṭippanaka mitgetheilt und wahrscheinlich zu machen gesucht daß der Dichter und der Grammatiker Pâṇini eine Person seien. Dieser Pâṇini würde in das 6te, frühestens 5te Jahrhundert nach Chr. zu setzen sein, und es würde dann keine so große Lücke zwischen der *Aṣṭâdhyâyî* und der *Kâśikâ* bestehen 'wie man jetzt annehmen muß, und wie es ganz unwahrscheinlich ist'.

Ich will versuchen mit wenigen Worten darzulegen was uns über das gegenseitige Verhältniß der erhaltenen grammatischen Werke

der Inder von Pâṇini bis etwa zur Mitte des 7ten Jahrhunderts nach Chr. bekannt ist. Vorher jedoch bemerke ich daß Nami's Worte ebensowenig wie eine anonyme Strophe ein Beweis für die Identität des Dichters und des Grammatikers Pâṇini sein können und daß die von Nami citirten Stellen eher gegen als für solche Identität sprechen.

'Obgleich', so übersetze ich abweichend von Pischel, 'der Gebrauch falscher Formen schon indirect dadurch verboten ist daß vom Dichter umfassende gelehrte Bildung (und deshalb natürlich auch eine Kenntniß der Grammatik[1]) verlangt worden ist, so tadelt der Verfasser doch noch ausdrücklich den Gebrauch solcher Formen um zu zeigen daß man besondere Aufmerksamkeit auf ihre Vermeidung verwenden müsse, weil er findet daß sogar große (und mit der Grammatik vertraute) Dichter (aus Unachtsamkeit) falsche Formen gebraucht haben'. Als Beweise für den Schluß des Satzes citirt Nami zwei Stellen Pâṇini's in denen गृह्य fälschlich für गृहीत्वा[2]) und पश्यतो fälschlich für पश्यन्तो gebraucht worden sind. Ist es aber wahrscheinlich, daß der Grammatiker Pâṇini seine eigenen Regeln VII, 1, 37 समासेऽनञ्पूर्वे क्त्वो ल्यप् und VII, 1, 81 शानच्यनोर्नित्यम् vergessen haben sollte?

Wichtiger ist die Frage nach dem Zeitalter dieses Pâṇini. Wenn ich hier zunächst meine eigene Ansicht aussprechen darf, so ist es die daß Pâṇini der vedischen Litteratur weit näher steht als der sogenannten classischen; daß er einer Zeit angehört in der das Sanskṛit mehr war als eine Sprache der Gelehrten.

Ich gebe zu, daß das Bestreben die Zeit eines Grammatikers aus den von ihm gegebenen Beispielen bestimmen zu wollen, zu einem sichern Resultate deshalb nicht immer führen kann, weil wir nicht wissen ob solche Beispiele von ihm selbst gebildet oder seinen Vorgängern entnommen sind. Dieselben Beispiele finden sich in den Werken der jüngeren wie in denen der älteren Grammatiker. Wäre das Mahâbhâshya verloren gegangen, so würden wir aus den Beispielen der Kâśikâ für den Gebrauch des Imperfectums (Kâś. III, 2, 111) und aus der Erwähnung des Pushyamitra für das Alter dieses Werkes vielleicht dieselben Schlüsse ziehn die jetzt für das Mahâbhâshya gezogen werden trotz der Thatsache daß Patanjali ältere Werke ebenso benutzt hat wie es die Verfasser der Kâśikâ gethan haben. Wenn aber Pâṇini z. B. in Uebereinstimmung mit dem vorherrschenden Gebrauche der ältern Sprache das Periphr. Perfectum nur mit dem Verbum kṛi bildet, während die Schriftsteller des 6ten Jahrhunderts kṛi, bhû und as ohne Unterschied gebrauchen;

---

[1]) Siehe Kâvyaprakâśa pag. 8.

[2]) Für क्त्वोऽसमानकर्तृकयोः ist क्त्वो ल्यबादेशः zu lesen.

wenn seine Lehre über die Verwendung des Aorists durch die Praxis der Brâhmaṇas bestätigt wird, während die spätere Zeit das Verständniß für die Unterschiede der Tempora der Vergangenheit verloren hat; wenn seine Regeln für den Gebrauch der Casus in einem Brâhmaṇa bis in die geringfügigsten Details beobachtet werden, Abweichungen von denselben dagegen bei classischen Schriftstellern nicht selten sind, so fühlen wir daß wir auf festerem Boden stehn, und werden Pâṇini eher Jahrhunderte vor Chr. als zusammen mit *Kâlidâsa*, *Bhâravi* u. a. etwa in das 5te oder 6te Jahrhundert nach Chr. setzen.

Wie aber verhält es sich dann mit der Lücke welche in diesem Falle zwischen Pâṇini und der Kâśikâ bestehen würde und deren Vorhandensein Prof. Pischel als unwahrscheinlich bezeichnet hat? A priori ist es vollständig gleichgültig, ob wir die Kâśikâ 200 oder 1200 Jahre nach Pâṇini verfaßt sein lassen, denn wir haben nicht den geringsten Grund anzunehmen daß sie einer der frühesten oder überhaupt einer der alten Commentare zu Pâṇini's Grammatik gewesen sei. Die uns bekannten Thatsachen erhärten vielmehr das Gegentheil. Von mehr als funfzig Regeln können wir beweisen daß sie in der Kâśikâ anders lauten als sie Pâṇini gegeben hat. Nicht nur werden in jedem Kapitel die Lesarten und Erklärungen Anderer mit Kechit, Kaschit, Anye, Apare, Aparaḥ, Eke, Pâṭhântara, Smṛityantara, Śâstrântara, Granthântara u. s. w. eingeführt, sondern einer der Verfasser berichtet im Eingange seines Werkes ausdrücklich, er fasse kurz das Beste von dem zusammen was sich in den Commentaren (zu Pâṇini) und andern Werken zerstreut finde. Einige Namen der Verfasser solcher Commentare sind uns erhalten worden[1]).

Außer älteren Commentaren haben die Compilatoren der Kâśikâ auch das *Mahâbhâshya* benutzt. Das Mahâbhâshya ist von *Bhartṛi-*

[1]) Die Kâśikâ Vṛitti fängt an:

वृत्तौ भाष्ये तथा धातुनामपारायणादिषु ।
विप्रकीर्णस्य तन्त्रस्य क्रियते सारसंग्रहः ॥

Dazu Haradatta: तत्र सूत्रार्थप्रधानो ग्रन्थो वृत्तिः सा चेह पाणिनिप्रणीतानां सूत्राणां कुणिप्रभृतिभिराचार्यैर्विरचितं विवरणम् । आक्षेपसमाधानपरो ग्रन्थो भाष्यं तदिह कात्यायनप्रणीतानां वार्त्तिकानां पतञ्जलिप्रणीतं विवरणम् । तथाशब्दः समुच्चये । पारायणशब्दः प्रत्येकमभिसंबध्यते । धातुपारायणं नामपारायणमिति । तत्र धातुप्रक्रिया तठातुपारायणम् । तत्र गणशब्दानां निर्वचनं तन्नामपारायणम् । आदिशब्देन शिक्षोणादिकिपादेर्ग्रहणम् ।

Jinendrabuddhi: तत्र वृत्तिः पाणिनिप्रणीतानां सूत्राणां विवरणं चु(?)ल्लिभट्टिनल्लूरादिविरचितम् । भाष्यं कात्यायनप्रणीतानां वाक्यानां पतञ्जलिप्रणीतम् ।

hari commentirt worden, und da wir durch M. Müller's für die Geschichte der Grammatik epochemachende Entdeckung wissen daß dieser Bhartṛihari vor den Verfassern der Kâśikâ gelebt hat, so verdienen sein Verhältniß zum Mahâbhâshya und seine Mittheilungen über die Geschichte dieses Werkes unsere besondere Aufmerksamkeit. In der Vorrede zum 2ten Bande meiner Ausgabe habe ich gezeigt, daß Bhartṛihari oft verschiedene Lesarten des Textes des Mahâbhâshya mitgetheilt und daß er noch häufiger die abweichenden Erklärungen anderer Commentatoren erwähnt hat, deren Werke verloren gegangen sind. Würden wir schon hieraus schließen daß Patanjali und Bhartṛihari durch einen vielleicht nach Jahrhunderten zu bemessenden Zeitraum von einander getrennt sind, so wird diese Ansicht in vollem Maße bestätigt durch die bekannten Verse am Schlusse des 2ten Buches des Vâkyapadîya[1]). Dort nennt Bhartṛihari das Mahâbhâshya

*) Siehe Indian Antiquary Vol. III, pag. 285 und V, pag. 244. Da Handschriften von Puṇyarâja's Commentare zum Vâkyakâṇḍa in Europa nicht vorhanden sind, so gebe ich hier noch den Wortlaut seiner Version der von Bhartṛihari erwähnten Begebenheiten. Wenn ich seine Worte recht verstehe, nennt Puṇyarâja sich den Schüler des Schülers des *Śaśânka* (*Chandra?*).

अवतारोऽपि भाष्यस्य संग्रहेऽस्तमुपागते ।
निबन्धहेतौ शास्त्रस्य टीकाकारेण कीर्तितः ॥
संग्रहार्थानुगुणान्नूपत्वं चोपपादितम् ।
विज्ञानवनमथैतस्य संग्रहप्रतिपत्तये ॥
कृतमाचार्यदेवेन तैरावेशाविवशैस्ततः ।
भ्रष्टस्यान्नायसारस्य वैयाकरणागामिनः ॥
मूलभूतमथाप्याथ पर्वताद्आगमं स्वयम् ।
आचार्यवसुरातेन न्यायमार्गान्विचिन्त्य च ॥
प्रणीतो विधिवच्चायं मम व्याकरणागमः ।
मयापि गुरुनिर्दिष्टाञ्छास्त्रान्नायाविलुप्तये ॥
काण्डत्रयक्रमेणायं निबन्धः परिकीर्तितः ।
ग्रन्थकारेण ग्रन्थेऽस्मिन्स्वस्मिन्गुर्वागमः स्फुटम् ॥
इत्येवं वाक्यकाण्डस्य प्रमेयविषयः स्मृतः ।
संगतिः कीर्तिता लघ्वी समासेन निराकुला ॥
विद्वज्जनानां यः खलु सर्वत्र गीयते संगतिः । (?)
तत उपसृत्य विरचिता राजानकशूरवर्मनाम्ना वै ॥
प्राप्ताङ्गुल्याच्छ्रुत्वैतद्वाक्यकाण्डं समासतः
पुण्यराजेन तस्योक्ता संगतिः कारिकाश्रिता ॥
गुरवे भर्तृहरये शब्दब्रह्मविदे नमः ।
सर्वसिद्धान्तसंदोहसारामृतमथाय च ॥

das Buch des *Ṛishi*; er berichtet daß es eine Zeit gab in der das Werk nicht verstanden wurde, und fügt hinzu daß wir seine Wiedereinführung in den Kreis der grammatischen Studien dem *Âchârya Chandra* und andern Gelehrten verdanken. Absichtlich übergehe ich die Nachricht nach der Chandrâchârya unter *Abhimanyu* von *Kaśmîr* gelebt haben soll, und ebensowenig will ich den Stil und den eigenthümlichen Sprachgebrauch des Mahâbhâshya als Argumente für das Alter dieses Werkes benutzen. Soviel denke ich erwiesen zu haben daß es im höchsten Grade gewagt sein würde auch nur Patanjali in eine so späte Zeit wie das 5te Jahrhundert nach Chr. setzen zu wollen. Und welcher Zeitraum liegt zwischen Patanjali und Pâṇini!

Das Mahâbhâshya ist zunächst ein Commentar zu *Kâtyâyana's Vârttikas*, aber es ist ebensowenig der älteste Commentar zu jenem Werke wie Bhartṛihari's der älteste Commentar zum Mahâbhâshya oder die Kâśikâ der älteste Commentar zur Ashṭâdhyâyî gewesen sind. Denn wir erfahren von Patanjali, daß Andre nicht nur eine ganze Anzahl von Vârttikas anders als er selbst erklärt (vgl. z. B. meine Ausgabe Vol. I, pag. 10, 64, 237, 247, 357, 366, 450, 465, 473 u. s. w.), sondern daß sie auch den Text gewisser Vârttikas anders abgetheilt (z. B. I, pag. 193, 422), oder überhaupt anders gelesen hatten (z. B. I, pag. 179, 314). Auch hatte es in der Zeit zwischen Kâtyâyana und Patanjali Gelehrte gegeben welche die Lehren des Vârttikakâra zu vereinfachen, zu erweitern, oder ihnen durch die Hinzufügung näherer Bestimmungen eine exactere Fassung zu geben sich bemüht hatten (vgl. z. B. I, pag. 367; 230, 281, 443; II, pag. 103, 273, 304, 397; I, pag. 468, 489; II, pag. 136 u. s. w.). In dieselbe Periode fallen, um von vereinzelt genannten Persönlichkeiten nicht zu reden, zwei Schulen von Grammatikern, welche beide auf der von Kâtyâyana eingeschlagenen Bahn weiter gegangen waren, und von denen die einen, die *Bhâradvâjîyâs*, in engerem Anschlusse an Kâtyâyana hauptsächlich dessen Werk zu verbessern oder zu vervollständigen bestrebt gewesen waren (vgl. I, pag. 73, 136, 201; II, pag. 46, 70, 233; III, pag. 199, 230), während die andern, die *Saunâgâs*, in mehr selbständiger Weise ihre kritischen Bemerkungen gegen Pâṇini selbst gerichtet hatten (vgl. I, pag. 416; II, pag. 105, 228, 238, 325; III, pag. 76, 159; vgl. auch Kâśikâ zu P. VII, 2, 17). Was wird aus den Generationen von Gelehrten von denen wir aus dem Mahâbhâshya allein Kunde haben, wenn Pâṇini selbst frühestens im 5ten Jahrhundert nach Chr. gelebt haben soll?

Und dies ist nicht Alles. Die Tradition berichtet daß Patanjali sein eigenes Werk verfaßte als ein älteres grammatisches Werk, dessen Titel er uns selbst überliefert hat, unverständlich geworden

war und daß seine Lehren auf die in jenem Werke enthaltenen Lehren basirt sind. Wie dem auch sei, soviel läßt sich aus dem Mahâbhâshya selbst ersehen daß Patanjali ein oder mehrere in Versen geschriebene Werke vor sich hatte, die nach der Zeit des Kâtyâyana verfaßt waren und die Patanjali in so ausgedehntem Maße benutzt hat daß manche Stellen seines Werkes kaum anders denn als Prosaversionen metrischer Originale bezeichnet werden können. Wenn nun die Verfasser jener von Patanjali benutzten Schriften Kâtyâyana (II, pag. 121) den Vârttikakâra (II, pag. 176) den *Bhagavân Kâtyaḥ* (II, pag. 97) 'den heiligen Kâtya' nennen, gerade wie Bhartṛihari den Verfasser des Mahâbhâshya den *Ṛishi* Patanjali genannt hat, so reden sie offenbar nicht von einem Zeitgenossen, sondern von einem Gelehrten der schon für sie — und wieviel mehr für Patanjali — ein Weiser der Vorzeit war.

Und was für das Verhältniß des Patanjali zu Kâtyâyana gilt, gilt in gleichem Maße für das Verhältniß des Kâtyâyana zu *Pâṇini*. Auch für ihn ist Pâṇini schon der *Bhagavân Pâṇiniḥ* (vergl. III, pag. 467), auch er hatte seine Vorgänger in der kritischen Behandlung der Ashṭâdhyâyî (vgl. z. B. I, pag. 211, 365; II, pag. 19, 133, 216; III, pag. 265, 377), auch er kannte ebenso wie Patanjali Commentare zu Pâṇini, denn seine Bemerkungen beziehn sich in vielen Fällen nicht sowohl auf den Text der Sûtras als auf die Erklärungen, von denen sie begleitet gewesen sind. Daß das Sanskṛit in der Zeit zwischen Pâṇini und Kâtyâyana in grammatischer wie lexicalischer Hinsicht manchen Veränderungen unterworfen gewesen war, daß in derselben Zeit eine neue Litteratur entstanden war, daß während derselben Periode die Sanskṛitsprechenden Hindus weite Landstrecken Indiens in Besitz genommen hatten, ist von andern Gelehrten erwiesen worden, und ich glaube nicht daß die hierfür wie überhaupt für das Alter der Ashṭâdhyâyî vorgebrachten Beweise einfach durch die Identification eines Dichters und des Grammatikers Pâṇini zunichte gemacht werden können[1]).

Ich habe oben bemerkt, daß der Text der Pâṇineischen Regeln uns in der Kâśikâ Vṛitti nicht überall in seiner ursprünglichen Gestalt vorliegt. Die Beweise hierfür finden sich im Mahâbhâshya, und die einheimischen Gelehrten haben nicht verfehlt auf den Gegenstand aufmerksam zu machen. Im Folgenden stelle ich aus der Kâśikâ alle mir bekannt gewordenen Fälle zusammen, in denen (1) eine Regel Pâṇini's in zwei oder drei Regeln zerlegt worden ist

[1]) Das Verhältniß der Grammatiken des *Chandra* und des sogenannten *Śâkaṭâyana* zu *Pâṇini* und zur *Kâśikâ* hoffe ich später zu behandeln.

(Yogavibhâga); (2) einer Regel ein oder mehrere Worte hinzugefügt sind; (3) der Wortlaut einer Regel anderweitig verändert worden ist; und (4) ganze Regeln dem ursprünglichen Texte der Sûtras hinzugefügt worden sind. Die Gründe für meine Vermuthung, daß in sehr vereinzelten Fällen an der Reihenfolge der Regeln geändert worden ist, halte ich zurück; doch möchte ich (5) einige Belege dafür beibringen daß die Verfasser des Kâśikâ hie und da verschiedene Lesarten eines Sûtra mitgetheilt haben, die sie nicht dem Mahâbhâshya entnommen haben, und endlich (6) darauf aufmerksam machen daß sowohl für den in der Ausgabe der Kâśikâ Vṛitti wie den in den Ausgaben der Ashṭâdhyâyî gedruckten Text der Sûtras von einer Vergleichung der Handschriften der Kâśikâ und der Ashṭâdhyâyî manche Verbesserung zu erwarten sein wird. Die Handschriften des Mahâbhâshya sind, was den letzten Punkt betrifft, im Allgemeinen von geringerer Bedeutung, weil in ihnen von den im Mahâbhâshya behandelten Regeln gewöhnlich nur die ersten Worte oder Sylben angeführt werden.

1. Yogavibhâga:

P. I, 1, 17 उञः und 18 ऊँ bildeten ursprünglich ein Sûtra उञ ऊँ; getheilt wurde dasselbe von Kâtyâyana (I, pag. 72). Es ist merkwürdig daß das Kaśmîr MS. der Kâśikâ nur die eine Regel उञ ऊं hat und daß dem entsprechend der Commentar daselbst ganz anders lautet als in der gedruckten Ausgabe und in den Devanâgarî MSS; Haradatta liest wie letztere.

P. I, 4, 58 प्राद्यः und 59 उपसर्गाः क्रियायोगे bildeten ein Sûtra प्राद्य उपसर्गाः क्रियायोगे, getheilt von Kâtyâyana (I, pag. 341). Kaiyaṭa bemerkt: यदा प्रागेव प्राद्य इति योगो विभज्यते तदा प्रयोजनकथनाय वार्त्तिकम्। यदा तु प्राद्य उपसर्गाः क्रियायोग इत्येको योगः पठ्यते तदा योगविभागः कर्तव्यत्वेन चोद्यते ।.

P. II, 1, 11 विभाषा und 12 ग्रपपरिव्रहिर्ञवः पञ्चम्या bildeten ein Sûtra विभाषापपरिव्रहिर्ञवः पञ्चम्या; Patanjali theilte dasselbe (I, pag. 380), weil, wie Kaiyaṭa bemerkt, अन्यथैवास्य (nämlich विभाषाशब्दस्य) उपयोग आप्राङ्क्येत योगविभागे त्वधिकारो गम्यते.

P. IV, 3, 117 संज्ञायाम् und 118 कुलालादिभ्यो वुञ् bildeten ein Sûtra संज्ञायां कुलालादिभ्यो वुञ्. Die Theilung wurde von Kâtyâyana vorgeschlagen (II, pag. 317). Kaiyaṭa erklärt: संज्ञायां कुलालादिभ्यो वुञिति सूत्रं विभक्तमित्यर्थः.

P. V, 1, 57 तद्स्य परिमाणम् und 58 संख्यायाः संज्ञासंघसूत्राध्ययनेषु bildeten ein Sûtra तद्स्य परिमाणं संख्यायाः संज्ञासंघसूत्राध्ययनेषु, so citirt II, pag. 343. Die Theilung in zwei Regeln ist weder von Kâtyâyana noch von Patanjali ausdrücklich verlangt worden, aber Kaiyaṭa be-

merkt zu Vârt. 6 auf pag. 353 तदस्य परिमाणमिति योगविभागः कर्तव्य इत्युक्तं भवति, und Nâgojîbhaṭṭa im Laghuśabdenduśekhara उत्तरेण योगविभागो ऽत्र भाष्ये ध्वनितः.

P. VI, 1, 32 ह्वः संप्रसारणम् und 33 अभ्यस्तस्य च bildeten ein Sûtra ह्वः संप्रसारणमभ्यस्तस्य च, getheilt von Kâtyâyana (III, pag. 29).

P. VI, 1, 164 तद्धितस्य und 165 कितः bildeten ein Sûtra तद्धितस्य कितः, das III, pag. 116 so citirt wird. Die Theilung wurde (II, pag. 253) von Patanjali vorgeschlagen.

P. VI, 2, 107 उदराश्वेषुषु und 108 क्षेपे bildeten ein Sûtra उदराश्वेषुषु क्षेपे, das III, pag. 121 so citirt wird. Die Theilung ist weder auf Kâtyâyana noch auf Patanjali zurückzuführen. Nâgojîbhaṭṭa bemerkt: अत्र वृत्तौ क्षेप इति योगविभागः पूर्वत्र च संज्ञायामित्यनुवर्तत इत्युक्तम्। तदेकसूत्रत्वप्रतिपादकैतद्भाष्यविरुद्धम्।.

P. VII, 3, 117 इदुद्भ्याम्, 118 औत् und 119 अच्च घेः bildeten ein Sûtra इदुद्भ्यामौदच्च घेः, das I, pag. 116 und II, pag. 404 so citirt wird. Kâtyâyana zerlegt dies Sûtra (III, pag. 342) zunächst in इदुद्भ्याम् und औदच्च घेः, und verlangt später die Theilung in औत् und अच्च घेः (vgl. auch Kâś. zu P. VII, 3, 119). Pâṇini's eine Regel würde nur पद्धतौ, धेनौ, aber nicht पद्धत्याम्, धेन्वाम् u. s. w. gestatten.

2. Ein oder mehrere Worte sind einer Regel zugefügt worden:

P. I, 3, 29 समो गम्यृच्छिप्रच्छिस्वरत्यर्तिश्रुविदिभ्यः lautete ursprünglich समो गम्यृच्छिभ्याम्. विदिप्रच्छिस्वरति und अर्तिश्रु sind aus Kâtyâyana's Vârttikas (I, pag. 282) in die Regel aufgenommen und es fällt nur auf daß dasselbe nicht auch mit dem von Kâty. erwähnten दृश् geschehen ist; letzteres wird im Commentare der Kâśikâ besonders erwähnt. Kaiyaṭa bemerkt zu den Vârttikas: समो गम्यृच्छिभ्यामित्येतावत्सूत्रमिति वार्त्तिकमारब्धम्.

P. III, 1, 95 कृत्याः प्राङ् ण्वुलः, ursprünglich कृत्याः. Der Zusatz प्राङ् ण्वुलः ist von Kâtyâyana in Vorschlag gebracht, aber schon von ihm selbst für überflüssig erklärt worden (II, pag. 81). Kaiyaṭa bemerkt zu Vârt. 1: कृत्या इत्येतावत्सूत्रमित्याह कृत्यसंज्ञायामिति.

P. III, 1, 118 प्रत्यपिभ्यां ग्रहेश्छन्दसि, ursprünglich प्रत्यपिभ्यां ग्रहेः. Der Zusatz छन्दसि ist Kâtyâyana's (II, pag. 87).

P. III, 3, 122 अध्यायन्यायोद्यावसंहाराधारावायाश्च, ursprünglich अध्यायन्यायोद्यावसंहाराश्च. आधार und आवाय sind aus dem Vârt. zu P. III, 3, 121 hinzugefügt; das in demselben Vârt. genannte अवहार wird, ähnlich wie oben P. I, 3, 29 दृश्, in der Kâśikâ nur im Commentare erwähnt. Schon Patanjali citirt die Regel (II, pag. 146) in

der ihr in der Kâśikâ gegebenen Fassung. Kaiyaṭa bemerkt zu P. III, 3, 121: अध्यायसूत्र आधारोवायशब्दौ वार्त्तिके दर्शनादभियुक्तैः प्रक्षिप्तौ.

P. IV, 1, 15 टिड्ढाणञ्द्वयसज्दघ्नमात्रच्तयप्ठकठञ्कञ्क्वरप्ष्युनाम्, ursprünglich टिड्ढाणञ्द्वयसज्दघ्नमात्रच्तयप्ठकठञ्कञ्क्वरप्ः. ष्युन् ist von Kâtyâyana (II, pag. 209) hinzugefügt und erscheint auch in einem Vârttika der Saunâgas (नञ्स्नञोकक्ष्युंस्तृपातलुनानामुपसंख्यानम्, II, pag. 105, 209, und 238), das ohne ष्युन् in der Kâśikâ am Ende des Commentares gegeben wird. Die ursprüngliche Form des Sûtra ergiebt sich aus Patanjali's Bemerkung zu P. IV, 1, 16. Kaiyaṭa bemerkt zu P. IV, 1, 15: सूत्रे ष्युनः पाठो ऽनार्षः.

P. IV, 2, 2 लाक्षारोचनाच्चकलकर्दमाट्ठक्, ursprünglich लाक्षारोचनाट्ठक्. चकल und कर्दम sind von Kâtyâyana hinzugefügt (II, pag. 271). Auch hier bemerkt Kaiyaṭa: चकलकर्दमयोः सूत्रे पाठो ऽनार्षः.

P. IV, 2, 21 सास्मिन्पौर्णमासीति संज्ञायाम्, ursprünglich सास्मिन्पौर्णमासीति. संज्ञायाम् ist von Kâtyâyana hinzugefügt, aber von Patanjali für überflüssig erklärt worden (II, pag. 275). Kaiyaṭa bemerkt wieder: संज्ञाग्रहणं सूत्रे ऽनार्षमिति वार्त्तिकमारब्धम्.

P. IV, 2, 43 ग्रामजनबन्धुसहायेभ्यस्तल्, ursprünglich ग्रामजनबन्धुभ्यस्तल्. सहाय ist von Patanjali hinzugefügt (II, pag. 279); das von Pat. ebenfalls verlangte गज steht in der Kâśikâ im Commentare.

P. IV, 4, 17 विभाषा विवधवीवधात्, ursprünglich विभाषा विवधात्. वीवध ist von Patanjali hinzugefügt (II, pag. 329). Haradatta bemerkt: वीवधशब्दो वार्त्तिके दर्शनात्सूत्रे प्रक्षिप्तः.

P. V, 2, 101 प्रज्ञाश्रद्धार्चावृत्निभ्यो णः, ursprünglich प्रज्ञाश्रद्धार्चाभ्यो णः. वृत्नि ist von Patanjali hinzugefügt (II, pag. 396, wo ich jetzt das Vârttika वृत्रेश्च streichen würde). Auch hier bemerkt Haradatta: सूत्रे वृत्निशब्दो वार्त्तिके दर्शनात्प्रक्षिप्तः.

P. V, 4, 50 अभूततद्भावे कृभ्वस्तियोगे संपद्यकर्तरि च्विः, ursprünglich कृभ्वस्तियोगे संपद्यकर्तरि च्विः. Der Zusatz अभूततद्भावे ist Kâtyâyana's. Kaiyaṭa bemerkt: अभूततद्भावग्रहणं वार्त्तिके दृष्ट्वान्यैः सूत्रे प्रक्षिप्तम्.

P. VI, 3, 40 स्वाङ्गाच्चेतो ऽमानिनि, ursprünglich स्वाङ्गाच्चेतः. Der Zusatz अमानिनि ist Kâtyâyana's (III, pag. 156; vgl. auch II, pag. 193). Kaiyaṭa bemerkt: स्वाङ्गाच्चेत इत्येतावत्सूत्रमिति मत्वा वार्त्तिकारम्भः.

P. VI, 3, 83 प्रकृत्याशिष्यगोवत्सहलेषु, ursprünglich प्रकृत्याशिषि. Kâtyâyana macht den Zusatz अगवादिषु, und Patanjali giebt die Beispiele सगवे सवत्साय सहलाय. (III, pag. 171). Kaiyaṭa bemerkt: अगोवत्सहलेष्विति भाष्यवार्त्तिकदर्शनात्सूत्रे केनचित्प्रक्षिप्तम्.

P. VIII, 1, 67 पूर्वनात्पूर्वित्तमनुदात्तं काण्डादिभ्यः, ursprünglich पूर्वनात्पूर्वित्तमनुदात्तम्. Der Zusatz काण्डादिभ्यः ist von Kâtyâyana verlangt worden (III, pag. 379). Kaiyaṭa bemerkt: काण्डादिभ्य इति सूत्रे वार्त्तिकदर्शनात्कैश्चित्प्रक्षिप्तम्.

P. VIII, 3, 118 सदिस्वञ्जो:[1]) परस्य लिटि, ursprünglich सदे: परस्य लिटि. स्वञ्जि ist von Kâtyâyana hinzugefügt worden (III, pag. 451).

P. VIII, 1, 73 und 74 नामन्त्रिते समानाधिकरणे सामान्यवचनम् und विभाषितं विशेषवचने बहुवचनम्. Ursprünglich lautete 73 नामन्त्रिते समानाधिकरणे und 74 सामान्यवचनं विभाषितं विशेषवचने. Die verschiedene Abtheilung und die Hinzufügung von बहुवचनम् sind von Patanjali vorgeschlagen worden (III, pag. 383 und 384), doch bemerkt derselbe daß entweder सामान्यवचनं oder, nach Andern, विशेषवचने gestrichen werden könne. Kaiyaṭa bemerkt zu 73 नामन्त्रिते समानाधिकरणे इति सूत्रं पठितं ततः सामान्यवचनं विभाषितं विशेषवचन इति द्वितीयम्, und zu 74 बहुवचनग्रहणमपपाणिनीयमिति.

Zweifelhaft erscheint ob P. VIII, 2, 12 ursprünglich das Wort कक्षीवत् enthalten hat. Kaiyaṭa bemerkt zu P. VI, 1, 37, Vârt. 7, श्रासन्दीवदष्ठीवदित्यत्र कक्षीवच्छब्दस्य निपातनाद्वार्त्तिकं नारब्धव्यम्, Nâgojîbhaṭṭa dagegen एतत्काण्व्यप्रामाण्यात्तत्र (i. e. in VIII, 2, 12) कक्षीवच्छब्दपाठोऽनार्ष इत्यन्ये.

3. Die Regeln Pâṇini's sind anderweitig geändert worden:

P. V, 3, 5 एतदोऽश्; ursprünglich lautete die Regel एतदो ऽन्. Vgl. Patanjali (II, pag. 403), der das न् für überflüssig erklärt. Kaiyaṭa bemerkt: इह केचिदशं पठन्ति केचिदनम्.

P. VI, 1, 115 प्रकृत्यान्तःपादमव्यपरे; Kâtyâyana hat नान्तःपादमव्यपरे gelesen (III, pag. 86), aber die Lesart प्रकृत्या ist schon Patanjali bekannt gewesen (siehe zu P. VI, 1, 127 und 129). Die Kâśikâ selbst bemerkt: केचिदिदं सूत्रं नान्तःपादमव्यपर इति पठन्ति.

P. VI, 1, 124 इन्द्रे च नित्यम् und 125 प्लुतप्रगृह्या अचि; Patanjali hat इन्द्रे च und प्लुतप्रगृह्या अचि नित्यम् gelesen (III, pag. 87), aber er bemerkt zu P. VI, 1, 127 daß das Wort नित्यम् überhaupt überflüssig sei und citirt das zweite Sûtra ohne नित्यम् z. B. I, pag. 66. Kaiyaṭa bemerkt: इन्द्रे चेति ये सूत्रं पठन्ति प्लुतप्रगृह्या अचि नित्यमिति तु द्वितीयं तन्मतेनैष प्रश्नः.

P. VI, 1, 137 संपर्युपेभ्यः करोतौ भूषणे und 138 समवाये च. Patanjali hat statt संपर्युपेभ्यः संपरिभ्यां und überhaupt an Stelle der beiden Regeln nur die eine Regel संपरिभ्यां भूषणसमवाययोः करोतौ gelesen (III, pag. 93, Z. 13, und pag. 216, Z. 1).

P. VI, 1, 150 विष्किरः शकुनिर्विकिरो वा lautete ursprünglich विष्किरः शकुनौ वा, eine Fassung der Regel welche Kâtyâyana nicht befriedigte (III, pag. 95); denn dies würde bedeuten 'क् nach

[1]) So lesen drei MSS. der Kâśikâ.

वि erhalte das Augment सुट्, — nach Belieben wenn man einen Vogel bezeichnen wolle', während die Regel lehren soll daß 'कृ nach वि nach Belieben das Augment सुट् erhält, wenn man einen Vogel bezeichnen will'. (Anders Goldstücker, Pâṇini pag. 125). Kaiyaṭa bemerkt: विष्किरः शकुनौ वेति सूत्रपाठमाश्रित्य वार्त्तिकारम्भः; Haradatta: यथा तु भाष्यं तथा विष्किरः शकुनौ वेत्येतावत्सूत्रम्; Nâgojîbhaṭṭa: विष्किरः शकुनिर्विकिरो वेत्यनार्षः पाठ इति भावः.

P. VI, 4, 56 ल्यपि लघुपूर्वात् lautete ursprünglich ल्यपि लघुपूर्वस्य. Die veränderte Form der Regel ist auf Kâtyâyana zurückzuführen (III, pag. 204); Patanjali citirt sie in beiden Fassungen (vgl. III, pag. 191; 212; und 288, Z. 4 und 11). Kaiyaṭa bemerkt: केचिदाचार्येण ल्यपि लघुपूर्वस्येति षष्ठ्यन्तमध्यापिता अन्ये तु लघुपूर्वादिति पञ्चम्यन्तम्.

P. VI, 4, 100 वसिभसोर्हलि च. Kâtyâyana's Bemerkung zu dieser Regel macht es wahrscheinlich, daß च ein späterer Zusatz ist (III, pag. 213). Kaiyaṭa bemerkt: अन्यत्रापीति वचनाद्वार्त्तिककारश्चकारं न पपाठेति लक्ष्यते.

P. VII, 1, 25 अदूङ् उतराद्भ्यः पञ्चभ्यः lautete ursprünglich अदू उतराद्भ्यः पञ्चभ्यः; die Hinzufügung des Anubandha ङ् ist von Kâtyâyana in Vorschlag gebracht worden (III, pag. 250).

P. VII, 3, 75 ष्ठिवुक्लम्वाचमां [1]) ङिति lautete ursprünglich ष्ठिवुक्लमुचमां ङिति. Die veränderte Fassung der Regel ist auch hier auf Kâtyâyana zurückzuführen (III, pag. 334); und sie erscheint schon in den besten MSS. des Mahâbhâshya zu P. VII, 3, 71 (III, pag. 333, Z. 15). Kaiyaṭa bemerkt: ष्ठिवुक्लमुचमां ङितीति सूत्रपाठादाह ... अथवा सूत्रे तन्त्रमाङ् न तु यथोपेयिवाननित्यत्रोपशब्दो ऽतन्त्रमिति प्रदर्शनाय वार्त्तिकारम्भः.

P. VII, 3, 77 इषुगमियमां छः lautete ursprünglich इषगमियमां छः, wie aus Kâtyâyana's Bemerkung zu der Regel hervorgeht (III, pag. 334). Die Kâśikâ selbst bemerkt: य इषिमुदितं नाधीयते ते ऽचीत्यनुवर्तयन्ति; Kaiyaṭa: इषुगमीति पाठो ऽनार्ष इत्याहेषेश्छत्वमहलीति.

P. VIII, 4, 28 उपसर्गादृदृबहुलम् lautete ursprünglich उपसर्गादनोत्परः. Die veränderte Fassung der Regel ist auf Patanjali zurückzuführen (III, pag. 460).

4. Ganze Regeln sind hinzugefügt worden:

P. IV, 2, 8 कलेर्ढक् ist ursprünglich ein Vârt. zu P. IV, 2, 7 (II, pag. 273).

P. IV, 3, 132 कौपिञ्जलहास्तिपदादण् ist ursprünglich ein Vârt. zu P. IV,

---

[1]) ष्ठिवुक्ष्म्याचमां ist eine falsche Lesart.

3, 131 (II, pag. 320); Kaiyaṭa bemerkt: अपाणिनीयः सूत्रेषु पाठः. Ob auch die folgende Regel 133 आर्धधातुकस्येकलोपश्च ursprünglich nur ein Vârt. gewesen sei, darüber sind die Meinungen getheilt. Kaiyaṭa betrachtet es als Sûtra; Haradatta dagegen bemerkt पूर्वं च सूत्रमिदं च (i. e. 132 und 133) वार्त्तिके दर्शनात्सूत्रेषु प्रक्षिप्तम्; ebenso eine Randbemerkung in MS. a des Mahâbhâshya इदमपि वार्त्तिके दृष्ट्वा सूत्रेषु प्रक्षिप्तम्.

P. V, 1, 36 द्वित्रिपूर्वादण्च ist ursprünglich ein Vârt. zu P. V, 1, 35 (II, pag. 350). Kaiyaṭa bemerkt: द्वित्रिपूर्वादण्चेति सूत्रेष्वनार्षः पाठ इति वार्त्तिकारम्भः.

P. VI, 1, 62 अचि श्नुधातुभ्रुवां य्वोरियङुवङौ ist ursprünglich ein Vârt. zu P. VI, 1, 61 (III, pag. 41). Kaiyaṭa bemerkt: वार्त्तिकं दृष्ट्वा कैश्चित्सूत्रेषु प्रक्षिप्तम्.

P. VI, 1, 100 नित्यमाम्रेडिते डाचि ist ursprünglich ein Vârt. zu P. VI, 1, 99 (III, pag. 77). Kaiyaṭa bemerkt वार्त्तिकदर्शनात्सूत्रे कैश्चित्प्रक्षिप्तम्.

P. VI, 1, 136 अडभ्यासव्यवायेऽपि faßt das in Vârt. 5 und 6 zu P. VI, 1, 135 gelehrte zusammen (III, pag. 92). Kaiyaṭa bemerkt: अडभ्यासव्यवाये ऽपीति सूत्रस्यापाठे वार्त्तिकप्रवृत्तिः, und Nâgojîbhaṭṭa fügt hinzu अनार्षः सूत्रे पाठः.

P. VI, 1, 156 कास्कृत्स्नो वृक्षः ist Patanjali's Bemerkungen zu P. VI, 1, 157 entnommen (III, pag. 96). Die Kâśikâ selbt bemerkt: केचिदिदं सूत्रं नाधीयते कास्कृत्स्नप्रभृतिष्वेव कास्कृत्स्नो वृक्ष इति पठन्ति.

Ob P. VI, 3, 6 आत्मनश्च पूरणे ursprünglich ein Vârttika gewesen sei (Vârt. 1 zu P. VI, 3, 5; III, pag. 143), ist mir zweifelhaft, denn आत्मनः scheint für die folgenden Regeln nothwendig. Haradatta jedoch bemerkt: वार्त्तिकमेवेदं सूत्ररूपेण पठितम्; Nâgojîbhaṭṭa erwähnt dieselbe Ansicht und zeigt wie man ohne आत्मनः erklären muß (अत्रात्मनश्च पूरणे इति विशिष्टं वार्त्तिकमित्यत्रत्यभाष्यस्वरसादायाति वैयाकरणाख्यायामित्यत्र परस्य चेति चेन परशब्दप्रतिबन्दितयात्मशब्दस्यैव ग्रहणं तदुभयं चैकसूत्रमित्याहुः).

Endlich ist P. IV, 1, 166 वृद्धस्य च पूजायाम् dem Wortlaut nach identisch mit Vârt. 3 zu P. IV, 1, 163, und P. IV, 1, 167 यूनश्च कुत्सायाम् equivalent dem Vârt. 2 zu P. IV, 1, 162 स्त्रीवृद्धप्रयं च कुत्सितम् (II, pag. 265), doch ist zu bemerken daß die Erklärung des Patanjali von der in der Kâśikâ gegebenen insofern abweicht als in letzterer वा aus P. IV, 1, 165 fortgilt. Kaiyaṭa hält beide Regeln für unächt (सूत्रेषु तु कैश्चिद्वृद्धस्य च पूजायामिति वार्त्तिकदर्शनात्प्रक्षिप्तम्, यूनश्च कुत्सायामिति सूत्रमनार्षमिति वचनम्) und ich glaube daß diese Ansicht durch den Gebrauch der Genitive वृद्धस्य und यून: statt der zu erwartenden Nominative bestätigt wird.

5. Die Verfasser der Kâśikâ erwähnen Lesarten, die sie nicht dem Mahâbhâshya entnommen haben. Beispiele hierfür sind:

P. III, 3, 78 अन्तर्घनो देशे; अन्ये षकारं पठन्ति । अन्तर्घणो देश इति ।.

P. IV, 1, 117 विकर्णशृङ्ग°; शृङ्गशब्दं स्त्रीलिङ्गमन्ये पठन्ति . . . । द्वयमपि चैतत्प्रमाणमुभयथा सूत्रप्रणयनात् ।.

P. IV, 4, 135 सहस्रेण संमितौ घः; केचित्तु समिताविति पठन्ति ।.

P. V, 1, 125 स्तेनाद्यन्नलोपश्च; einige zerlegen die Regel in zwei, स्तेनात् und यन्नलोपश्च.

P. V, 4, 57 °द्वयन्तरार्थाद्नितौ डाच्; केचिद्द्वयन्तरार्थ्यादिति यकारं पठन्ति ।.

P. V, 4, 121 °हलिसक्थ्योरन्यतरस्याम्; हलिशक्त्योरिति केचित्पठन्ति ।.

P. VI, 1, 117 यजुष्युर; अपरे यजुष्युरो इति सूत्रं पठन्ति ।.

P. VI, 2, 134 चूर्णादीन्यप्राणिषष्ठ्याः; चूर्णादीन्यप्राण्युपयज्ञादिति सूत्रस्य पाठान्तरम् ।.

P. VII, 2, 48 तोषसह°; . . . तोषसहेति सूत्रे केचिदुदितमिषं पठन्ति ।.

P. VII, 2, 49 °भरत्तपिसनाम्; केचिदत्र भरत्तपिसनिननिपतिदरिद्राणामिति पठन्ति ।.

P. VII, 3, 17 परिमाणान्तस्यासंज्ञाशाणयोः; असंज्ञाशाणाकुलिज्ञानामिति केचित्पठन्ति ।.

P. VIII, 3, 109 सहेः पृतनर्ताभ्यां च; einige zerlegen die Regel in zwei, सहेः und पृतनर्ताभ्यां च.

6. Der in den Ausgaben der Kâśikâ Vṛitti und der Ashṭâdhyâyî gedruckte Text einiger Sûtras verglichen mit dem Texte von Handschriften, die mir zugänglich sind oder gewesen sind.

(Ich bezeichne hier die Ausgabe der Kâśikâ mit Kâś., und Böhtlingk's Ausgabe der Ashṭâdhyâyî mit Bö. Für die Kâśikâ habe ich verglichen das Kaśmîr MS. des Deccan College (K), ein unvollständiges Devanâgarî MS. des Deccan College von Saṃvat 1543 und 1535 (D), und mein Devanâgarî MS. von Saṃvat 1464 (G); für die Ashṭâdhyâyî ein unvollständiges Devanâgarî MS. Professor Bhâṇḍârkar's von Saṃvat 1550 (P), und mein S'ake 1729 geschriebenes Devanâgarî MS. (p)).

P. III, 1, 109 Kâś. u. Bö. स्तुतिस्तुशास्वृ°; KDG und P स्तुतिस्तुशासुवृ°.

P. III, 2, 21 Kâś. u. Bö. दिवाविभानिशा°; KDG *om.* निशा, P hat es *sec. man. in marg.*

P. III, 3, 99 Bö. °सुञ्शीङ्भृञिणः; Pp °सुञ्शो°; vgl. auch Mhbh. II, pag. 85, Z. 16.

P. IV, 1, 62 Kâś. u. Bö. सख्यश्निश्वीति भाषायाम्; KDG u. P सख्यश्निश्वी भा°.

P. IV, 1, 126 Bö. वल्यणादीनामिनङ् च; Pp *om.* च; vgl. auch Mhbh. I, pag. 260, Z. 24.

P. IV, 2, 68 Kâś. u. Bö. तेन निर्वृत्तम्; KD und P तेन निर्वृत्तः; (G ist hier lückenhaft).

P. IV, 2, 130 Kâś. u. Bö. विभाषा कुरुयुगंधराभ्याम्; DG und ursprünglich KP °युगंधरेभ्यः; so hat Kâtyâyana gelesen (II, pag. 299, Z. 21).

P. IV, 3, 119 Kâś. u. Bö. °पाद्पाद्यम्; KDG und P °ज्ञातपाद्यम्.

P. IV, 4, 64 Bö. अदूरभवपदादूठञ्; Pp °पदादूठच्; vgl. auch Mhbh. III, pag. 60, Z. 10.

P. IV, 4, 82 Bö. संज्ञायां ज्ञन्या; Pp संज्ञायां ज्ञन्याः; so hat Kâtyâyana gelesen (II, pag. 334, Z. 3). Vgl. Böhtlingks Anm.

P. IV, 4, 117 Bö. घछौ च; P घच्छौ च; dies ist richtig, denn das erste Suffix ist घच्; (Mhbh. III, pag. 241, Z. 3).

P. V, 1, 69 Kâś. u. Bö. कडंकर°; KDG und P कडंगर°. Vgl. Böhtlingks Anm.

P. V, 1, 79 Kâś. u. Bö. तेन निर्वृत्तम्; DG, ursprünglich K, und P, तेन निर्वृत्तः.

P. V, 1, 95 Kâś. तस्य च दक्षिणा°; KDG *om.* च.

P. V, 2, 82 Bö. तद्स्मिन्नूनं प्रायेण°; Pp तद्स्मिन्नूनं प्राये°; so hat Kâtyâyana gelesen (II, pag. 388, Z. 19).

P. V, 2, 129 Kâś. वातातिसारा°; KDG वातातीसारा°.

P. V, 3, 49 Kâś. u. Bö. प्रागेकाद्श°; KDG und P प्राक्चैकाद्श°.

P. V, 3, 92 Bö. किंयत्तद्होर्निर्धारणे; Pp किंयत्तद्हो निर्धारणे.

P. V, 3, 117 Kâś. °यौधेयादिभ्यामणञौ; KDG °यौधेयादिभ्यो ऽणञौ.

P. V, 4, 68 Kâś. u. Bö. समासान्ताः; KDG und P (ebenso wie die besten MSS. des Mhbh.) समासान्तः.

P. VI, 1, 36 Kâś. °श्रोत्रात्; KDG °श्रोर्तः.

P. VI, 1, 173 Kâś. u. Bö. भ्रातुरनुमो नपत्नादौ; KDG und *sec. manu* P °नपत्नादिः; vgl. Mhbh. I, 141, Z. 2, und III, 390, Z. 17.

P. VI, 4, 15 Bö. °किल्कलोः°; Pp किल्कलोः; vgl. auch Mhbh. III, 186 Z. 11, und 289, Z. 23.

P. VI, 4, 126 Kâś. u. Bö. °गुणानाम्; KD und ursprünglich G °गुणिनाम्.

P. VII, 1, 29 Kâś. u. Bö. श्रसो न; KDG und P श्रसो नः; aber Patanjali hat श्रसो न (Mhbh. III, pag. 252, Z. 1).

P. VII, 2, 2 Kâś. u. Bö. अतो ल्रान्तस्य; G und P (ebenso wie MSS. des Mhbh.) अतो र्लान्तस्य, und so hat der Verf. der Kâś. gelesen. (KD hier nicht verglichen).

P. VII, 2, 23 Kâś. u. Bö. घुषिर°; G und P (ebenso wie MSS. des Mhbh.) घुषेर°. (KD hier nicht verglichen).

P. VII, 2, 34 Kâś. °चरितिचामिति°; KDG *om.* चामिति im Text und Commentar.

P. VII, 2, 112 Bö. अनाप्यकः; Pp अनाप्यकः. (Ich erwähne dies nur um darauf aufmerksam zu machen, daß Patanjali, wie seine Bemerkungen zu P. VII, 1, 12 zeigen, nur ein न् in der Regel gehabt hat. Wir erhalten dadurch einen neuen Beweis dafür, daß die Regel über die Verdopplung eines finalen न्, ङ्, oder ण् vor folgendem Vocal von den Grammatikern selbst bei den Finalen technischer Ausdrücke nicht angewendet worden ist. Siehe meine Vorrede zu Vol. I des Mhbh. pag. 10. Zu den dort aus Kârikâs gegebenen Beispielen sind hinzuzufügen Vol. II, pag. 65, Z. 5 सुप्तिङुपग्रह°, und pag. 97, Z. 26 यणस्तु ते).

P. VII, 4, 4 Kâś. u. Bö. °पिब्रतेरीचाभ्यासस्य; G °पिब्रतेरी चाभ्या°, P °पिब्रतेरा चाभ्या°, (KD nicht verglichen); vgl. Mhbh. III, pag. 344, Z. 20.

P. VII, 4, 40 Bö. °स्थामि ति किति; P °स्थामित्रि किति; vgl. Kâtyâyana III, pag. 350, Z. 7; und siehe Böhtlingks Anm.

P. VIII, 2, 18 Kâś. u. Bö. कृपो रो लः; KGD und P कृपे रो लः; vgl. aber Patanjali I, pag. 21, Z. 19 und pag. 25, Z. 26.

P. VIII, 3, 66 Kâś. u. Bö. सदिरप्रतेः; KG und P सदेरप्रतेः.

P. VIII, 3, 97 Kâś. u. Bö. °परमेब्रर्हि°; KDG und P °परमब्रर्हि°.

P. VIII, 4, 34 Bö. °व्यावी°; P °व्यायि°; vgl. auch Mhbh. III, pag. 416, Z. 18.

P. VIII, 4, 68 Bö. ञ ञ; Pp ञ ञ इति.

Einige antiquarische Bemerkungen zu dem „Codex des Privatrechts“ von Gortyn.

Von

C. Wachsmuth in Heidelberg.

Die einzige kretische Urkunde, durch deren Abschrift und rasche Veröffentlichung (Mitth. d. athen. Inst. IX S. 363 ff.) sich Fabricius um unsere Wissenschaft ein so großes Verdienst erworben hat, wird auf lange hin philologische und juristische Kreise beschäftigen. Als erste zusammenhängende Urkunde eines hellenischen Privatrechts an sich von höchster Bedeutung wird sie in ihrem Werth noch wesentlich dadurch gesteigert, daß sie uns — wenn auch nur in zeitgemäßer Reform eines älteren Codex (vgl. namentlich XII, Z. 15—20) — die Rechtsordnungen eines kretischen Staates kennen lehrt, von denen angenommen werden darf daß sie dem uns bisher fast allein genauer bekannten attischen Recht mit am fernsten in Hellas stehen. Doch

auch ganz abgesehen vom Privatrecht bietet dieses Zwölf-Columnengesetz dem Antiquarier nicht unbeträchtliche Ausbeute: und da ich über diese Bereicherung unsres antiquarischen Wissens eine Verständigung für leicht erreichbar halte — während es länger dauern wird, bis der sprachliche und juristische Gewinn sicher eingebracht ist —, da ich aber zugleich aus bereits an die Oeffentlichkeit getretenen Aeusserungen von hervorragender Seite ersehe, daß doch einige erläuternde Bemerkungen in dieser Beziehung nicht überflüssig sind, stelle ich die wichtigsten Punkte kurz zusammen.

I. ἀπόδρομος — δρομεύς.

Einander gegenübergestellt werden ἀπόδρομος und δρομεύς in unserer Urkunde einmal, nämlich VII 35 ff. in den Bestimmungen über die Verheirathung der Erbtöchter. αἰ δέ κ' ἀπόδρομος ἰὼν ὁ ἐπιβάλλων ὀπυίεν, ἢβίων ἢβιόνσαν μὴ λῇ ὀπυίεν, ἐπὶ τᾷ πατρῳώχῳ ἦμεν τὰ χρήματα πάντα καὶ τὸν καρπὸν πρεῖν κ' ὀπυίῃ· αἰ δέ κα δρομεὺς ἰὼν ὁ ἐπιβάλλων ἢβιόνσαν λειόνσαν ὀπυίεσθαι μὴ λῇ ὑπυίεν, μολῆν τὼς καδεστὰνς τὼς τᾶς πατρῳώχῳ, ὁ δὲ [δ]ικα[σ]τ[ὰς] δικ[αδδέ]τω ὀπυίεν ἐν τοῖ[ς] δ[ν]οῖς μηνσί. Vorausgeht hier eine Bestimmung wie es gehalten werden solle, wenn der zur Heirath verpflichtete Verwandte oder die Erbtochter noch *impubes* (ἄνωρος Z. 29 f.) ist. Aus diesem Zusammenhang und dem Wortlaut der Bestimmungen, welche den ἀπόδρομος und δρομεύς selbst angehen, erhellt sofort, daß der ἀπόδρομος nicht mehr *impubes* sein kann, und daß der δρομεύς noch älter sein muß als der ἀπόδρομος.

Die genauere Fixirung der Bedeutung von ἀπόδρομος giebt aber unmittelbar die uns glücklich erhaltene, sogar in doppelter Ueberlieferung vorliegende Partie des an werthvollsten Aufschlüssen so reichen Glossenwerkes von Aristophanes aus Byzanz, insbesondere des Abschnitts περὶ ὀνομασίας ἡλικιῶν. Es lautet der betreffende Passus in dem ausführlichen Excerpt, das von Eustathios zu Homer [1]) p. 1592, 58 und in dem Miller'schen Codex (*Mélanges de litt. Gr.*) p. 429, 3 benutzt ist, ebenso wie in der von Alexion angefertigten Epitome der σύμμικτα des Didymos, welche Ammonios p. 35 u. d. W. γέρων und Erennios Philon bei Eustathios p. 1788, 53 und das Etym. Gudian. und Angel. u. d. W. γέρων abgeschrieben haben [2]), gleichmäßig: ἐν Κρήτῃ ἀποδρόμους (καλοῦσι τοὺς ἐφήβους) διὰ τὸ μηδέπω τῶν κοινῶν

1) Nur in etwas anderer Fassung wiederholt den betr. Passus ders. p. 727, 18 (ausgeschrieben auch in den Homerscholien bei Cramer, An. Par. III, p. 233, 10) und ein Stück der Begründung des eigenthümlichen Gebrauchs von ἀπὸ p. 1720, 25 (vgl. Fresenius, *de λέξεων Aristoph. et Sueton. exc. Byz.* p. 84 f.).

2) Vgl. Cohn, *de Aristoph. Byz. et Sueton. Eustathii auct.* p. 298 f.

δρόμων μετέχειν; wozu nur in dem ausführlicheren Excerpt noch eine genauere Begründung der eigenthümlichen Verwendung von ἀπό tritt, durch das hier nicht bezeichnet werde ὁ πεπαυμένος ἀπὸ τῶν δρόμων καὶ οὐκέτι μετέχων. Hier ist es möglich bestimmt das betreffende Lebensjahr zu fixiren; denn die von Aristophanes eingehaltene Reihenfolge παῖς, μελλέφηβος (= πάλλαξ, βούπαις, ἀντίπαις), ἔφηβος (= τριακάτιοι, ἀπόδρομοι, κοῦροι, ἄγουροι), kehrt wieder bei Censorin, de die nat. 14, 8, wo dem παῖς 14 vollendete Jahre, dem μελλέφηβος deren 15, dem ἔφηβος aber 16 Jahre zugewiesen werden. Somit wäre ἀπόδρομος in Kreta der sechzehnjährige Jüngling.

Dasselbe Resultat gewinnen wir noch durch eine andere Betrachtung. Wie schon Nauck (Aristoph. Byz. p. 95) richtig erkannte, gehen auf dieselbe gewichtige Autorität des Aristophanes zwei andere kretische Glossen bei Hesychios zurück:

ἀπάγελος· ὁ μηδέπω συναγελαζόμενος παῖς· ὁ μέχρι ἐτῶν ἑπταικαίδεκα.

ἀγελά<τα>ς· τοὺς ἐφήβους· Κρῆτες (denn so ist mit Cohn a. a. O. p. 300 für das überlieferte ἀγελάστους ἐφήβους zu schreiben).

Nach diesen Glossen fällt in Kreta die Aufnahme in die ἀγέλαι in das siebzehnte Lebensjahr; bis dahin hießen die Knaben ἀπάγελοι; mithin standen die Epheben, welche ἀγελάται oder ἀπόδρομοι hießen, im siebzehnten Jahr.

Der Ausdruck ἀπόδρομος weist auf die Uebungen in den Gymnasien hin, die in Kreta δρόμοι hießen (vgl. Suid. u. d. W. δρόμοις, womit auch die von Hesychios u. d. W. überlieferte kretische Bezeichnung δεκάδρομοι stimmt, wie diejenigen hießen, die 10 Jahre lang die Uebungen in den Gymnasien mitgemacht hatten).

Im Gegensatz dazu kann mit dem hier zum ersten Mal erscheinenden Namen δρομεύς nur genannt worden sein, wer an den Uebungen in den Gymnasien Theil nahm, so daß hier von einer gymnastischen Beschäftigung die Bezeichnung des Lebensalters ebenso herrührt, wie in Sparta die bekannte der höheren Altersklasse der σφαιρεῖς.

Ein Zweifel kann nur darüber bestehen, in welches Lebensjahr diese Zulassung zu den Gymnasien fällt, d. h. von welchem Lebensjahre an die Altersklasse der δρομεῖς anzusetzen ist.

Auch darüber klärt jedoch der Gebrauch des Wortes an anderen Stellen unserer Urkunde selbst auf. Wiederholt kehrt der Ausdruck ἀντὶ μαιτύρων δρομέων ἐλευθέρων (I 40, III 21 und öfters) oder auch μαιτύρανς παρῆμεν δρομέανς ἐλευθέρονς (V 52) wieder. An allen diesen Stellen kann kein Zweifel sein, daß δρομεύς den Zeugen als einen mündigen bezeichnen soll. Ganz unzweideutig zeigt sich end-

lich der Begriff der Mündigkeit in der Bestimmung, daß der Vater von dem Vermögen der verstorbenen Mutter seiner Kinder nichts verkaufen oder verpfänden darf, *αἴ κα μὴ τὰ τέκνα ἐπαινέσῃ δρομέες ἰόντες* (VI 35 f.). Nun tritt die Mündigkeit im attischen Recht nach dem *ἡβᾶν ἐπὶ δυοῖν* ein, das heißt, wenn die obigen Auseinandersetzungen richtig sind, mit vollendetem 18ten Lebensjahr. Damit stimmt auch die auf Aristoteles (bei Rose N. 420 p. 455) zurückgehende Ueberlieferung; und Censorinus, oder vielmehr die griechische Quelle, deren Angaben er a. a. O. wiedergiebt, muß ebenso gerechnet haben, da hier das 18. Lebensjahr, für das auch noch eine specielle Benennung (*ἐξέφηβος*) angeführt wird, als letztes der *aetas adulescentulorum* erscheint. Auch für Sparta hat Kirchhoff (Monatsber. d. Berl. Ak. 1870 S. 64) denselben Termin der Mündigkeit wahrscheinlich gemacht.

So wird auch nach kretischem Recht die Mündigkeit mit dem zurückgelegten achtzehnten Lebensjahr eingetreten sein; und wie anderwärts mit diesem Termin das Recht zur Eheschließung beginnt, so ist in dem Fall, der in der zuerst angeführten Bestimmung unserer Urkunde vorliegt, die Pflicht zu derselben zu schreiten von diesem Jahre ab unaufschiebbar.

II. *ἀπέταιρος.*

Dies Wort, das auf unserer Urkunde II 5. 25 und 41 erscheint, war bisher nur durch Pollux bekannt, der III 58 in einer Auseinandersetzung über die verschiedenen Arten der *ξενία* sagt: *παμπόνηροι δὲ οἱ Θεοπόμπου τοῦ συγγραφέως* (fr. 332 bei Müller, *frg. hist. Gr.* I p. 331) *ἀπολῖται καὶ ἀφέταιροι καὶ ἀπάθηναῖοι.* Wie man sieht, handelt es sich hier durchweg um solche, welche die Civität des Staates, in dem sie leben — unter welchen näheren Umständen immer — nicht besitzen; wie also die *ἀπολῖται* nicht zu einer (bestimmten) *πόλις*, die *ἀπάθηναῖοι* nicht zu dem athenischen Gemeinwesen gehören, so müssen die *ἀφέταιροι* solche Leute sein, die nicht zu der Gemeinschaft einer *ἑταιρία* gehören. An welche *ἑταιρία* allein in Gortyn gedacht werden kann, darüber läßt die Urkunde selbst keinen Zweifel, indem sie X 37 die Verpflichtung eines Adoptirten festsetzt, seiner Hetairie (*τᾶ ἑταιρείᾳ τᾷ Fαανεῖ*) einen Festschmaus zu geben. Und zwar wissen wir durch die Schilderung, die in des Dosiades' *Κρητικά* von den kretischen *ἀνδρεῖα* gegeben ist (bei Athenaeus IV p. 143[a]), daß alle Bürger (*πολῖται πάντες*) nach Hetairien

1) Es ist bekanntlich bis auf den heutigen Tag strittig, ob in Athen der Mündigkeitstermin in das laufende 18. Jahr oder erst nach dessen Ende fällt; s. die Litteratur bei Thalheim, gr. Rechtsalt. S. 11 Anm. 2 und 5.

gegliedert und insbesondere die öffentlichen Syssitien hetairienweise geordnet waren. Nun wäre es ja an sich denkbar, daß als ἀφέταιροι solche aus den Hetairien ausgeschlossene Bürger bezeichnet wurden, die sich bestimmter schwerer Vergehungen schuldig gemacht hatten oder auch (wie ähnliches für die analogen spartanischen Zustände aus späterer Zeit bezeugt ist) solche, die zu verarmt waren um den gesetzlich vorgeschriebenen Beitrag zu den öffentlichen Männermahlen zu liefern. Allein schon der Zusammenhang bei Pollux legt die Auffassung nahe, daß es sich hier vielmehr um eine bestimmte Klasse der ξένοι handelt. Und diese Auffassung wird bestätigt durch die direkte Meldung desselben Dosiades (a. a. O. p. 242e), daß es bei den kretischen Syssitien auch zwei τράπεζαι ξενικαί gab, αἷς προσκαθίζουσιν (so Meineke für προκαθίζουσιν) τῶν ξένων οἱ παρόντες, sowie durch den analogen Bericht von Pyrgion, der (bei Athenaeus IV p. 143e) in seiner Schrift über die Κρητικὰ νόμιμα auch ξενικοὶ θᾶκοι bei den Syssitien erwähnt. Als Nichtbürger konnten diese ξένοι natürlich nicht in die Hetairien aufgenommen sein und so ist der Ausdruck ἀφέταιροι für sie ganz passend.

Auch in unserer aus dem fünften Jahrhundert stammenden Urkunde wird man nicht sowohl an eine besondere Klasse wegen Armuth oder infolge von Atimie ausgestoßener Bürger zu denken haben, als an ξένοι die sich in Gortyn mehr oder minder dauernd aufhielten; und dem entspricht auch die Stellung in der sie auftreten. Denn sie sind einerseits wesentlich schlechter als die Bürger gestellt, andererseits nicht bloß besser als die eigentlichen δῶλοι, sondern auch als die halbfreien ϝοικεῖς[1]), die zwar einen Herren, πασιάς haben aber doch nicht sich in eigentlicher Sklaverei befinden.

III. Eine Eigenthümlichkeit kretischer Ehen.

Als hervorstechendste Eigenthümlichkeiten kretischer Sitte hebt Strabon X 20, p. 482 C. aus der Schilderung des Ephoros zwei die ehelichen Verhältnisse betreffende Singularitäten hervor: γαμεῖν μὲν ἅμα πάντες ἀναγκάζονται παρ' αὐτοῖς οἱ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐκ τῆς τῶν παίδων ἀγέλης ἐκκριθέντες, οὐκ εὐθὺς δ' ἄγονται παρ' ἑαυτοὺς τὰς γαμηθεῖσας παῖδας, ἀλλ' ἐπὰν ἤδη διοικεῖν ἱκαναὶ ὦσι τὰ περὶ τοὺς οἴκους· φερνὴ δ' ἐστίν, ἂν ἀδελφοὶ ὦσι, τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ ἀδελφοῦ μερίδος. Beide Eigenthümlichkeiten sind durch die Gortynische Urkunde bestätigt und genauer illustrirt.

---

1) Wichtig für die Erkenntniß der eigenthümlichen Stellung der ϝοικεῖς, auf die ich heute nicht näher eingehe, ist namentlich der Passus der Urkunde IV 34—37.

IV 40 ff. wird bestimmt, daß wenn der Vater stirbt, die Söhne δύο μοίρανς Fέκαστον bekommen sollen, die Töchter aber μίαν μοίραν Fεκά[σ]τα[ν]. Dann wird hinzugefügt (48 ff.) αἰ δέ κα λῇ ὁ πατὴρ δωὸς ἰὼν (so liest Comparetti unzweifelhaft richtig; δωσίσιον Fabricius) δόμεν τᾷ ὀπυιομέναι, δότω κατὰ τὰ ἐγραμμένα, πλίονα δὲ μή; der Vater kann also der sich verheirathenden Tochter das ihr bei seinem Tode zufallende Erbtheil (κατὰ τὰ ἐγραμμένα, nämlich eben Z. 40 ff.), das heißt je die Hälfte eines Sohnestheiles schon bei seinen Lebzeiten als Mitgift zukommen lassen. Das ist eben das, was Strabon als kretische Sitte schildert; nur wäre aus unserer Urkunde noch hinzuzufügen, daß ein bedeutendes Praecipuum, welches Z. 31 ff. genauer angegeben wird, unter allen Umständen den Söhnen reservirt war.

Sehr viel auffallender und von sonstigem griechischen Gebrauch abweichender ist die andere von Strabon an erster Stelle angeführte Bestimmung, daß bei der Verheirathung sehr jugendlicher Töchter es üblich war, sie obwohl der eheliche Umgang mit dem Manne schon begonnen hatte doch noch im elterlichen Hause zu behalten und erst nach längerer Zeit, wenn sie soweit herangewachsen daß sie eine Hauswirthschaft selbständig führen konnten, mit ihrem Mann einen eigenen Hausstand begründen zu lassen. Und da die kretischen Mädchen schon mit 12 Jahren sich verehelichen konnten (s. die Urkunde XII 31 f.), wird diese Praxis gar nicht selten gewesen sein. Dadurch erklärt sich zweierlei, was in unserer Urkunde auf den ersten Blick sehr auffällt: Einmal daß II 20 ff. es als etwas ganz im gewöhnlichen Laufe der Dinge Liegendes vorausgesetzt wird, daß ein Ehebruch in dem Hause des Vaters oder des Bruders der Frau vorkommen kann, erst an dritter Stelle das Haus ihres Mannes angeführt wird (αἴ κα τὰν ἐλευθέραν μοιχίων αἱλεθῇ ἐν πατρὸς ἢ ἐν ἀδελφιῶ ἢ ἐν τῶ ἀνδρός); was sich nun einfach durch die Unterstellung des Verweilens der jugendlichen Frau im elterlichen Hause erklärt, (wobei natürlich der Bruder als Vorstand des Hauses im Fall des Ablebens des Vaters gedacht wird). Und zum andern die merkwürdigen Bestimmungen die hinsichtlich der Verheirathung einer Erbtochter VIII 20 ff. getroffen werden. αἰ δέ κα πατρὸς δόντος (so zu schreiben, wie schon das folgende ἔδωκαν zeigt, nicht δῶντος, da bei Lebzeiten des Vaters oder Bruders keine Erbtochter werden kann) ἢ ἀδελφιῶ πατρῳῶχος γένηται, αἰ λείοντος ὀπυίεν ᾧ ἔδωκαν, μὴ λείοι ὀπυίεθαι, αἴ κ' ἐστετέκνωται, διαλαχόνσαν τῶν χρημάτων, ἃ ἔγραιται, κτλ. αἰ δὲ τέκνα μὴ εἴη, πάντ' ἔ[χ]ον[σ]αν τῷ ἐπιβάλλον[τ]ι ὀπυίεθαι κτλ. Es wird also der Fall vorausgesetzt, daß eine Erbtochter wird, die ihr Vater oder Bruder bereits verheirathet haben, selbsverständlich infolge des Todes ihres Vaters oder ihrer

Brüder wird, und sie ihrerseits keine Lust hat bei ihrem bisherigen Manne zu bleiben. Und zwar wird hier betreffs der vermögensrechtlichen Behandlung eine bestimmte Distinction gemacht, je nachdem schon Kinder aus dem ehelichen Verkehr hervorgegangen sind (*ἐστιτέκνωται* natürlich = mediales *ἐκτετέκνωται*) oder nicht. Aber trotzdem so längerer ehelicher Umgang ganz unzweifelhaft ist, wird doch das Zusammenbleiben der Gatten als ein *ὀπνίεν* und *ὀπνίεϑαι* bezeichnet. Da der Ausdruck *δόντος, ἔδωκαν* aber an sich an ein bloßes Verlöbniß zu denken verbietet und das eventuelle Vorhandensein von Kindern diesen Gedanken ganz ausschließt, finde ich die Erklärung für diesen scheinbaren Widerspruch nur darin, daß der geschlechtliche Verkehr zwar nach kretischer Sitte bereits während des Verweilens der jugendlichen Frau im Hause ihres Vaters oder Bruders begonnen hat, aber noch nicht der Uebertritt in den Hausstand des Mannes erfolgt ist, und daß dieser erst eine volle Ehe, ein *ὀπνίεν* und *ὀπνίεϑαι* begründet.

IV. Familie, Verwandtschaft und Geschlecht.

Auf der Tafel V werden Z. 9 ff. die allgemeinen Normen der Intestaterbfolge festgesetzt. Nach dem Ableben eines der Ehegatten[1]) sollen in erster Linie erbberechtigt sein die Kinder oder Enkel oder Großenkel des Erblassers, also die direkten Descendenten. Giebt es solche nicht, so fällt das Erbe den Geschwistern des Erblassers und deren Kindern oder Enkeln zu, und zwar zunächst den Brüdern und deren Nachkommen; erst wenn solche nicht vorhanden sind, den Schwestern mit ihrer Nachkommenschaft. Giebt es überhaupt keine Geschwister des Erblassers und ebensowenig Nachkommen von diesen, so treten als Erben die (ferneren) *ἐπιβάλλοντες* ein; wenn es aber auch an *ἐπιβάλλοντες* ganz fehlt, dann sollen alle die welche zur *οἰκία* gehören zu gleichen Theilen erben. Denn die letzten Worte (Z. 25 ff.), bei denen mir die bisherige Schreibung unverständlich bleibt, lese ich folgendermaßen: *αἰ δὲ μὴ εἶεν ἐπιβάλλοντες, τᾶς Fοικίας οἵτινες κ' ἴωντι, ὁμάρως τούτονς ἔχεν τὰ χρήματα*, indem ich *ὅκλαρος* als dialektische Nebenform von *ὁμόκληρος* auffasse, gebildet nach der Analogie von *ὅζυξ, ὅπατρος* u. ä.

Hier fragt es sich: welcher Unterschied besteht zwischen den

1) *ἢ κ' ἀποθάνῃ ἀνὴρ ἢ γύνα* heißt es: dabei ist zu bemerken, daß von dem Verhältniß des überlebenden Ehegatten zu der Erbschaftsmasse bereits III 17—37 eingehend gehandelt ist; noch erfahren wir nachträglich (VI 31 ff.), daß das Vermögen der Frau zur Nutznießung bei dem Manne blieb, wenn Kinder aus der Ehe hervorgegangen waren, aber im Fall seiner Wiederverheirathung sofort an die erbberechtigten Kinder fällt.

ἐπιβάλλοντες und den Angehörigen der οἰκία? Der Begriff von ἐπιβάλλοντες kann im Allgemeinen nicht zweifelhaft sein. An sich bedeutet es nichts als »die Zuständigen«; aber in den erbrechtlichen Verhältnissen, in denen es allein in der Inschrift gebraucht ist, sind »die Zuständigen« keine andern als die Blutsverwandten. An Stellen wie III 28 oder III 33 und namentlich XII 24 f. werden diese unzweifelhaft mit dem Worte bezeichnet. Sehr oft erscheint der Ausdruck auf Columne VII und VIII in den Auseinandersetzungen betreffs der Verheirathung der Erbtöchter (zuweilen auch in der Fassung ὁ ἐπιβάλλων ὀπυίειν oder ὁ ἐπιβάλλων τὰν πατρῳῶχον ὀπυίειν): doch ist er dort bloß von Vatersbrüdern oder deren Söhnen gebraucht; und XII 41 f. scheinen sogar auch die direkten Descendenten mit unter diesem Begriff befaßt zu sein. Hier muß ja dem Zusammenhange nach an weitere Grade der Agnaten gedacht werden: leider ist es aber nicht möglich schärfer zu bestimmen, bis zu welchem Grade die Erbbefähigung gelten soll.

Wenn nun nach den Agnaten an letzter Stelle noch die Angehörigen der οἰκία als erbberechtigt genannt werden, so mag es einem an römische Rechtsanschauungen Gewöhnten am nächsten liegend erscheinen, daß damit die Gentilen gemeint seien nach Analogie der bekannten Bestimmung des Zwölftafelgesetzes SI INTESTATO MORITVR, CVI SVVS HERES NEC ESCIT, ADGNATVS PROXIMVS FAMILIAM HABETO. SI ADGNATVS NEC ESCIT, GENTILES FAMILIAM HABENTO. Allein es dürfte nicht wohl möglich sein, dem in οἶκος und in οἰκία doch immer nothwendig vorauszusetzenden Begriff von »Familie« in einer juristischen Bestimmung zu dem allmeinen einer *gens* zu verflüchtigen. Auch scheint der der lateinischen *gens* etwa entsprechende Ausdruck in Gortyn vielmehr φυλά gewesen zu sein, da die Erbtochter unter gewissen Verhältnissen berechtigt ist, statt einen aus dem Kreis der ἐπιβάλλοντες vielmehr einen Beliebigen aus der gesammten φυλά zu heirathen (VIII 5. 11 und 26).

Demnach wird nichts übrig bleiben als in dem Ausdruck τᾶς ϝοικίας οἰωνες κ' ἴωντι eine Umschreibung von dem zu sehen, was in gewöhnlicher Gräcität unter οἰκεῖοι verstanden wird. Was aber der technische Begriff von οἰκεῖοι war, darüber klärt mit aller wünschenswerthen Bestimmtheit wiederum Aristophanes von Byzanz in einem andern Abschnitt seines Glossenwerkes auf. Denn auf dessen συγγενικὰ ὀνόματα gehen die Grammatikererklärungen von οἰκεῖος zurück, welche Nauck a. a. O. p. 129 f. zusammenstellt[1]). Hier mag na-

1) Man kann auch noch Ammonius u. d. W. ἀγχιστεῖς p. 3 zu den hierher gehörigen Stellen hinzufügen.

mentlich noch hervorgehoben werden, daß auch der Lakone Kallikratides (bei Stobaeus, Floril. LXXXV 16) diese Definition von *οἰκεῖος* sanctionirt. Wir haben also an letzter Stelle die Verschwägerten oder noch schärfer die durch Ehe (nicht durch Geburt) verwandt Gewordenen oder nach der gebräuchlichen Terminologie des römischen Rechts im Gegensatz zu den Agnaten die Affinen. Und bei ihnen soll kein weiterer Unterschied betreffs der Gradnähe gemacht werden (analog dem römischen Rechtsgrundsatz *gradus affinitati nulli sunt*), sondern die Affinen erben alle zu gleichen Theilen.

V. Der Gerichtsbeamte *μνάμων*.

In der Urkunde ist zwei Mal sicher (IX 32 und XI 16), einmal nach höchst wahrscheinlicher Ergänzung (XI 53) der *μνάμων* als Beamter in Gortyn bezeugt und zwar erscheint er immer in Verbindung mit Acten der Gerichtsbarkeit und in einer Stellung, die nicht besser illustrirt werden kann als durch die bekannten Worte des Aristoteles in der Politik VI 8, p. 1321 b, 34 ff. *ἑτέρα δ' ἀρχὴ πρὸς ἣν ἀναγράφεσθαι δεῖ τά τε ἴδια συμβόλαια καὶ τὰς κρίσεις ἐκ τῶν δικαστηρίων· παρὰ δὲ τοῖς αὐτοῖς τούτοις καὶ τὰς γραφὰς τῶν δικῶν γίνεσθαι δεῖ καὶ τὰς εἰσαγωγάς· ἐνιαχοῦ μὲν οὖν μερίζουσι καὶ ταύτην εἰς πλείους, ἔστι δὲ μία κυρία τούτων πάντων· καλοῦνται δὲ ἱερομνήμονες καὶ ἐπισιάται καὶ μνήμονες καὶ τούτοις ἄλλα ὀνόματα σύνεγγυς.*

So tritt der Gortynsche *μνάμων* neben die *μνήμονες* von Iasos, die in der Inschrift des Bull. de corr. Hell. V (1881) p. 493 ff. wiederholt als Zeugen abgeschlossener Kaufcontracte citirt werden: und auch die *μνήμονες* von Halikarnaß und Salmakis in der zuerst durch Newton bekannt gewordenen, zuletzt von Ruehl genauer behandelten Inschrift (bei Roehl I. G. A. n. 500) gehören in diese Reihe.

Dagegen hat dieser *μνάμων* mit gottesdienstlichen Functionen nichts zu thun und nur den Namen gemein mit dem *μνάμων* der dorischen Sicilier (C. i. Gr. III N. 5432) und den zahlreichen Hieromnemones (über die die Litteratur Sauppe in seiner Abh. *de amphictionia delphica* 1873 p. 10 zusammengestellt). Zu bemerken aber ist, daß die von den Schol. zur Odyss. ϑ 163 und zu Aristoph. Wolk. 623 bezeugte weitere Bedeutung von *μνήμων* als *γραμματεύς* in einem andern Gortynischen Beamten hervortritt, der in einer soeben von Haussoullier im Bullet. de corr. Hell. IX (1885) S. 18 f. publicirten Inschrift als *κόσμων μνάμων* bezeichnet wird. [Vgl. jetzt auch Latischew im Bull. de corr. Hell. IX S. 296 ff.].

Universität.

Benekesche Preis-Stiftung.

Die Aufgabe der Benekeschen Preis-Stiftung für das Jahr 1888 ist folgende:

»In den apologetischen Schriften der Kirchenväter beider Sprachen wird die Kritik des Heidenthumes wesentlich mit demselben gelehrten Apparate vollzogen, und es steht außer Frage, daß die mythologische Doctrin, welche bei den Apologeten vorliegt, aus denselben Quellen stammt, mögen auch die Kanäle verschieden sein, welche dieselbe ihnen zugeführt haben. Diese mythologischen Excerpte also sollen ausgesondert, geordnet und auf ihre Herkunft, Verwandtschaft und Glaubwürdigkeit untersucht werden«.

Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache mit einem versiegelten Briefe, der den Namen des Verfassers enthält und durch den gleichen Spruch wie die Bewerbungsschrift bezeichnet ist,

bis zum 31. August 1887

an uns einzusenden.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1888, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät in Göttingen.

Der erste Preis beträgt 1700 Mark, der zweite 680 Mark.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1885 und bis zum 31. August 1886 einzusenden sind, finden sich bezw. in den »Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität zu Göttingen« im Jahrgange 1883 S. 67 und im Jahrgange 1884 S. 240.

Göttingen den 7. April 1885.

Die philosophische Fakultät

Der Dekan

W. Müller.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

22. Juli. **№ 6.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 4. Juli 1885.

Schering, Mittheilung über einen Briefwechsel zwischen Dirichlet und Kronecker, der in den Nachrichten zum Abdruck kommen soll.

Wagner, Patrokles am Kara Bugas?

Voigt, Ueber die Erwärmung eines Gases durch Compression nach der kinetischen Gastheorie.

Bechtel, Ueber die urgermanische Verschärfung von *j* und *w*.

Patrokles am Kara Bugas?

Methodische Bedenken

von

Hermann Wagner.

Robert Rösler hatte in seiner vortrefflichen Schrift »Die Aralsee-Frage 1873« die Ueberlieferungen des Alterthums von neuem einer Analyse unterzogen und dabei die Fahrt des Patrokles auf dem Kaspischen Meer, welche K. J. Neumann (s. u.) in die Zeit zwischen 285 und 282 v. Chr. legt, als einen fundamentalen Beweis für die Existenz einer Oxusmündung in das Kaspische Meer während jener Zeit wiederum zu verwerthen gesucht. Dabei war ihm das für einen so tüchtigen Alterthumsforscher seltsame Versehen begegnet, daß er sich bei der betreffenden Stelle im Strabo (Lib. XI, 507 Cas.), in welcher nach Eratosthenes von jener Umfahrt des Patrokles die Rede verlesen und die Entfernung von der Mündung des Mardus bis

zu der des Oxus auf 3800 Stadien statt, wie unzweideutig überall beglaubigt ist, zu 4800 angegeben hatte.

Das Verdienst diesen Irrthum Röslers aufgedeckt zu haben gebührt Herrn Karl Johannes Neumann in Straßburg, der denselben in seinem interessanten Aufsatz »Patrokles und der Oxus« (Hermes XIX 1884, S. 165—85) sozusagen zum Ausgangspunkt macht. Dieser gipfelt in dem Nachweis, daß, wenn man von der Balkan-Bucht am Ostufer des Kaspischen Meeres (in welche das vermeintliche trockne »Bett des Oxus«, Usboy von den Anwohnern genannt, einmündet) 1000 Stadien weiter an der Küste nordwärts gehe, man genau an den Eingang »Kara Bugas« der großen Seitenbucht genannten Meeres gelange. Diese schmale Gasse habe Patrokles für den hier vermutheten Oxus gehalten. Fortan stehe Patrokles also denen nicht mehr im Wege, welche eine vorhistorische Austrocknung des ganzen unteren Amulaufes annehmen, resp. einen wirklichen Zufluß zum Kaspischen Meere in historischen Zeiten für unerwiesen hielten. Dieser Folgerung schließt sich Alfred Kirchhoff in Halle nicht nur rückhaltlos an, sondern sucht dem Beweise auch noch durch eine Vermuthung über die geographischen Vorstellungen des Patrokles eine neue Stütze zu geben, indem er das geographische Publicum durch einen kurzen Aufsatz »Die Nichtexistenz einer Oxusmündung ins Kapische Meer während des Alterthums« (Zeitschr. f. wissensch. Geogr. V. 1884, S. 270—272) in dankenswerther Weise erst auf die Neumann'sche Arbeit aufmerksam macht.

Die Zahl der kleinen geographischen Detailfragen, welche auf Grund erneuter Localuntersuchungen immer von neuem der Erörterung unterzogen werden müssen, ist so riesengroß, daß es für die Geographen von Fach etwas höchst Verlockendes hat, eine so complicirte Frage wie die vorliegende einfach mit der in die Collectaneen aufgenommenen Notiz »Patrokles hat nicht die Oxusmündung sondern den Kara Bugas entdeckt, s. Neumann-Kirchhoff a. a. O.« zum definitiven Abschluß bringen zu können. Sie findet dann ihren Weg in unsere noch so wenig gründliche geographische Literatur rasch weiter, und der Ursprung so wie die Begründung wird nicht ferner in Betracht gezogen.

Diese Erfahrung veranlaßt mich zeitig einige methodische Bedenken gegen die Beweisführung auszusprechen, welche keineswegs die viel umstrittene Frage des alten Oxuslaufes einer erneuten Prüfung unterziehen sondern nur zur Erwägung geben sollen, ob man wirklich dem Patrokles die Entdeckung des Kara Bugas zuschreiben dürfe. Nicht aber auf das Resultat, das einer neuaufgetauchten Hypothese doch r · Nebenfrage den Boden entzieht, möchte ich das

Hauptgewicht dieser kleinen Untersuchung legen, sondern, wie im Titel schon angedeutet ist, interessirt mich mehr die allgemeine methodische Seite; irre ich nicht, so ist dieses concrete Beispiel geeignet zu zeigen, wie man sich innerhalb der historischen Topographie weniger bekannter Gegenden die Beweisführung doch zuweilen etwas leicht macht.

Auf die werthvollen Erörterungen Neumanns über die Person des Patrokles, die Zeit seiner Fahrt etc. gehe ich bei der Untersuchung nicht ein, sondern halte mich ausschließlich an die bei den Vertretern dieser neuen Hypothese zu Tage tretenden geographischen Anschauungen und Argumentationen. Diesen gegenüber glaube ich nachweisen zu können, daß die Behauptung, Patrokles sei am Kara Bugas gewesen, nicht aufrecht zu erhalten ist, und alle dafür herbeigezogenen Beweise sich auf Mißverständnisse oder den Mangel einer wirklich geographischen Untersuchungsmethode zurückführen lassen.

Meine Einwürfe gründen sich

1) auf den Mangel der nähern Analyse der Distanzschätzungen bei Patrokles;

2) auf das Mißverständniß der Position der Insel Talka bei Ptolemaeus (Lib. VI. Cap. 9);

3) auf die bedeutende Ueberschätzung der geographischen Einsicht bei Patrokles (von Seiten Kirchhoffs);

4) ganz besonders auf den Mangel jeglicher Berücksichtigung der Natur des Kara Bugas (und damit auf die bedeutende Unterschätzung der Beobachtungsgabe des Patrokles).

1.

Da Neumann den Nachweis, daß der Abfahrtspunkt der Ost- und Westfahrt des Patrokles, die Mündung des Mardus, mit der des Sefid-Rûd (Kisil-Usen) am Südufer des Kaspischen Meeres identisch sei, von Rösler für erbracht anerkennt, so nehme auch ich diesen als Ausgangspunkt. Für geographische Leser sei beiläufig bemerkt, daß uns in dem eratosthenischen Fragment bei Strabo keineswegs, wie man nach Kirchhoffs Darlegung wohl vermuthen könnte, »der genaue Stadiasmus der Befahrung der West-, Süd- und Ostküste der Südhälfte des Kaspischen Meeres« durch Patrokles erhalten ist. Lägen uns Specialangaben nach Art des Periplus des Nearch, Scylax, Arrian, des unbekannten Verfassers der Segelanweisung des Erythräischen Meeres vor, so würden wir sicher die uns hier beschäftigende Frage viel leichter lösen können. Factisch findet sich aber nur die Notiz vor »die Umfahrt halte, wie Eratosthenes sagt, neben

den Anariaken und Amardern und Hyrcanern bis zur Mündung des Oxus 4800 und von dort bis zum Jaxartes 2400 Stadien«. Rösler hatte hinzugefügt: »Diese Ziffer von 3800 St. (wie er fälschlich gelesen) kommt der wahren Entfernung von der Mündung des Mardus (Sefid-Rûd), die man als westliche mardische Grenze annehmen darf, bis zum Balkan Busen oder des Achtam-Arms des alten Oxuslaufes außerordentlich nahe«. Indem er die 3800 Stadien der Strecke von 95 geogr. Meilen (15 = 1°) gleichsetzt, hat er sich auf die heikle Frage des etwa angewendeten Stadienmaßes gar nicht mehr eingelassen, sondern die olympischen (600 = 1°) zu Grunde gelegt.

Vier Einwendungen möchte ich nun gegen Neumann machen:

a) Neumann hat meines Erachtens keine genaue Nachmessung der Küstenstrecken ausgeführt; — b) der Kara Bugas ist ferner nicht 4800, sondern 5500 oder mindestens 5200 Stadien vom Sefid-Rûd entfernt, während die eratosthenische Zahl von 4800 ungleich mehr auf den innern Winkel des Balkanbusens weist; — c) allen sonstigen Erfahrungen widerspricht es, eine so wichtige Localisation überhaupt auf ein (vermeintliches oder wirkliches) »genaues« Zusammentreffen von Stadienzahl und Ort allein zu basiren; — d) die bekannten Ueberschätzungen der Alten hinsichtlich der Küstenstrecken sprechen gegen die Annahme, daß die 4800 Stadien auf den Kara Bugas hinweisen.

a) Hat K. J. Neumann, so lautet unsere erste Frage, ebenso, wie er durch Nachschlagen im Strabo Röslers Versehen in der Ziffer aufgedeckt hat, auch an der Hand der Nachmessung die Behauptung desselben, sie führe »sehr nahe« an den Balkan Busen, wirklich geprüft? Und war es nicht sicher die Pflicht desjenigen, welcher die fälschlicher Weise erreichte Localität zum Ausgangspunkt der neuen Hypothese für die Erreichung des Kara Bugas durch Patrokles macht sich von jenem »sehr nahe« noch genauer zu überzeugen? Meines Erachtens hat Neumann entweder überhaupt keine eigene Nachmessung ausgeführt — oder er hat falsch gemessen. Wir finden über diesen so wichtigen Punkt in der ganzen Beweisführung nur die Worte (S. 175): »Bei der Messung der Küstenfahrt können doch mehr als sehr geringfügige Differenzen nicht entstehen. In der That führen denn auch die 3800 Stadien »genau« auf die Mündung des Balkanbusens«.

Sollte ich mich irren, daß aus der Kürze der Darlegung auf eine eigene Nachmessung nicht geschlossen werden kann, so nehme ich den Einwurf gern zurück, aber zur weitern Begründung desselben will ich eine Beobachtung, die sich mir seit Jahren aufgedrängt hat,

nicht unterdrücken, daß nämlich auch unter Geographen eine merkwürdige Abneigung besteht sich durch (wenn auch nur oberflächliche) Nachmessung mit Zirkel, Curvimeter, Planimeter auf Karten verschiedenen Maßstabes bei widersprechenden Angaben wenigstens für die größere Wahrscheinlichkeit der einen oder andern Längen- (z. B. Routen, Flußlinien, Grenzen) oder Flächenangabe (z. B. Inseln, Halbinseln, Seen, Provinzen), zu entscheiden. Natürlich liegt dies Historikern und Philologen noch ferner; wenn man aber, wie in diesem Falle, seine ganze Argumentation auf eine einzige Entfernungsangabe aufbaut, so darf man unmöglich die öftere Nachmessung unterlassen und muß sich von dem Grad der zu erreichenden Genauigkeit dieser Operation durch Benutzung eines Kartenmaterials von verschiedenem Maßstab überzeugen. Ebenso muß man der wissenschaftlichen Anforderung gerecht werden, daß man einem Jedem die Nachprüfung durch Anführung der Karte, nach welcher gemessen ist, und ihres Maßstabes ermöglicht. Aber gerade dieses letztere vermißt man vollkommen und eben aus dem Umstande, daß bei Gelegenheit dieser Distanzmessungen gar keine Karte von Neumann angeführt ist, glaube ich schließen zu dürfen, daß die Nachmessung jedenfalls nicht in der geschilderten gründlichen Form geschehen ist.

b) Allerdings sind die hier in Betracht kommenden Küstenlinien im allgemeinen so einfacher Natur, daß man in diesem Fall bei Benutzung verschiedener Karten vom Maßstab 1:2000000 oder noch größerm kaum merklich andere Resultate erhalten wird, sei es, daß man dabei nach Art von Arrians Periplus des Pontus Euxinus von Station zu Station an der Küste herumtastet oder nach Art der Fahrt des Nearchus mit etwas seltenerer unmittelbarer Berührung der Küste dem südlichen Winkel des Kaspischen Meeres entlang geht. Aber allerdings einen solchen Maßstab braucht man und Karten eines Handatlas genügen hier nicht. Man versuche nur einmal, welche Differenzen (in Procenten) entstehen, wenn man auf den Tafeln zu C. Müllers Geographi graeci min. nach den Uebersichtsblättern oder den Specialkarten mißt, z. B. bei Arrians Periplus des Pontus Euxinus, da das erstere in dem (immerhin schon großen) Maßstab 1:3400000, die letzteren aber in 1:1 Mill. gezeichnet sind. Für die Südküste des Kaspischen Meeres im Ganzen ist eine geeignete Karte größern Maßstabes nicht so leicht zugänglich, man wird gut thun, die westliche Hälfte auf der neuen Kiepert'schen Nouv. Carte des prov. asiat. de l'Emp. Ott. 1884 1:1500000, die östliche etwa auf der Karte zu Lovetts Reise von Tehéran nach Scharud (Proc. Roy. Geogr. Soc. 1883) 1:500000 zu messen. Denn die Zimmermann'sche zu Ritters Erdkunde Buch 3, Iranische Welt. v. J. 1840—45, 1:1300000 ist natür-

lich gerade in der Kaspischen Küstenlinie total veraltet. Für die Ostküste genügt Petermanns »Karte eines Theils der Transkaspischen Länder«. Mitth. Taf. I. 1873 1:1200000, auf der freilich der Kara Bugas selbst nicht mehr zur Darstellung kommt. Sie entspricht im übrigen dem südwestlichen Blatt der russischen Karte des Transkaspischen Gebiets (1875), die natürlich bei 1:840000 noch mehr zu empfehlen ist. Dasselbe reicht von Astarabad bis über den Kara Bugas hinaus.

Rösler kam nun vom Sefid Rûd mit seinen 3800 Stadien dem Balkanbusen »außerordentlich nahe«, Neumann erreicht ganz genau die Mündung desselben, — also etwa 39° 45′ N. Br. — während ich kaum bis an die Südseite der Insel Tschaleken hingelange. Hierbei wird zunächst die Länge der Südküste des Kaspischen Meeres in Frage kommen. Die Entfernung der heutigen Hauptmündung des Sefid-Rûd von der Küstenbiegung am Busen von Astarabad beträgt kaum mehr als 2100 Stadien. Man wird aber wegen der Veränderlichkeit des Sefid-Rûd-Deltas und demnach der Schwierigkeit einer genauen Fixirung für die Ausmündung im Alterthum, ferner wegen des vielleicht niedrigern Standes des Seespiegels, der die Küstenlinie gegenüber dem Alterthum ein wenig verkürzt haben könnte, einigen Spielraum geben müssen. Von Enzeli am Eingang in die Bucht von Rescht bis zur Astarabad-Bai sind es etwa 2400 Stadien, wie auch die von Neumann angezogene Autorität, Melgunof, 240 Seemeilen oder 2400 Stadien rechnet. Wie aber unter dieser Voraussetzung die restirenden 1400 (3800—2400) resp. 1700 (3800—2100) Stadien von der Bucht von Astarabad (Insel Aschur) uns nordwärts zum Eingang des Balkan führen sollen, ist mir unerfindlich. Allein der Breitenunterschied von 2°50′ (36°55′—39°45′) ergiebt 1700 Stadien. Tastet man jedoch nach Art der Küstenfahrten entlang der Uferlinie, so trifft man nach 1400 Stadien auch ohne in die Atrek-Bucht (B. v. Hassan-Kuli) eingefahren zu sein, etwa auf die Insel Mugan (s. Petermanns Karte), nach 1600 Stadien an den südlichen Eingang des seichten und mit Sandbänken und flachen Inseln erfüllten Kanals, welcher Tschaleken vom Festland trennt (39°5′), woselbst man noch 3—500 Stadien von dem südlichen Eingang in die Balkanbucht entfernt bleibt, je nachdem man östlich oder westlich um die Insel Tschaleken herum fährt. Aber wenn man auch für die Südküste östlich vom Sefid-Rûd nur 2100 Stadien annimmt, gelangt man nach weitern 1700 noch nicht über die Südseite von Tschaleken hinaus. Das läßt sich allerdings nicht auf Uebersichtskarten kleineren Maßstabes erkennen und insofern ist der Fall typisch, wohl aber auf der angeführten Petermann'schen oder der russischen Karte. Dies

zugegeben, würde uns jene weitere Fahrt von 1000 Stadien, welche Rösler durch sein Versehen nicht in Betracht zog, auf dem directesten Wege zwischen der Insel Tschaleken und dem Festlande nach 700 Stadien zum innersten Winkel des Balkan-Busens führen, während dazu bei der Umfahrung der genannten Insel noch 1000 Stadien erforderlich wären. Mit andern Worten ergiebt die allerknappeste Berechnung von der Sefid-Rûd-Mündung zu der des Oxus 4400 (2100+1600+700), die andere 4700 Stadien (2400+1600+700); dagegen ist die Südseite von Tschaleken von dem Kara Bugas noch 13—1400 Stadien entfernt. Somit ist erwiesen 1) daß jene 3800 Stadien in keinem Fall bis zum »Eingang in den Balkanbusen« führen und demnach Neumann nicht recht that, erst von diesem aus seine 1000 Stadien weiter zu zählen und 2) daß der Kara Bugas mindestens 5200 (2100+1700+1400), wenn nicht 5500 Stadien entfernt ist. Uebrigens würde auch eine Küstenfahrt von der Mitte des Eingangs in den Balkanbusen nach 1000 Stadien Weges uns 100 Stad. über den Bugas hinaus führen, während das Ende des Usboy 5—600 Stadien von diesem Eingang entfernt ist. Diese Darlegung benimmt, wie ich meine, dem etwas apodiktischen Ausspruch, jene 4800 Stad., welche Patrokles bis zur Oxusmündung zurückgelegt haben will, führten »genau zum Kara Bugas« die Beweiskraft, die Zahl bleibt um mindestens 400 St. oder um ebensoviel hinter der wirklichen Entfernung zurück, als sie bei »knappester« Messung (4400 St.) hinter derjenigen von der Oxusmündung zurückbleiben würde.

c) Aber ganz abgesehen von diesem Einwand darf man sich wundern, daß dem Urheber der neuen Hypothese diese auffallende Genauigkeit — so weit er sie eben nachgewiesen zu haben glaubt — nicht stutzig machte und ihn nach Beispielen gleich zuverlässiger Angaben in den griechischen Stadiasmen suchen ließ. Meines Erachtens kann eine Durchmusterung der äußerst vagen Schätzungen der Alten bei ihren Routen zu Lande und ihren Seewegen nur das Resultat haben, daß man dem Ausdruck »man komme mit einer Ziffer einer gewissen Localität nahe«, eine viel größere Berechtigung zuschreibt, als daß man mit ihr »ganz genau« einen geographisch fixirten Punkt treffe. Letzteres muß im allgemeinen lediglich als ein glücklicher Zufall nicht als das Ergebniß einer genauen Distanzmessung bezeichnet werden. Im andern Fall würde man aber nicht nur den ganz richtigen Standpunkt eines Strabo verkennen, der im unmittelbaren Anschluß an die betreffende Stelle hinzugefügt (und sich ähnlich an andern Stellen so ausspricht) »Man müsse die Angaben in diesem Theile (des Kaspischen Meeres) und so weit entlegenen Ländern nicht zu genau nehmen und besonders die Entfernungen«, sondern es heißt

auch sich in Widerspruch mit weitaus den meisten uns aus dem Alterthum überlieferten Distanzangaben setzen. Die letztern haben in den seltensten Fällen eine regelmäßige Folge von annähernd richtigen Maßen geliefert. Vielmehr auch wenn man hoffen zu können glaubte, daß sich durch eine constante Ueberschätzung oder eine Unterschätzung ein Mittel gewinnen ließe, um das angewandte Stadienmaß daraus ableiten zu können, so traf man oft an verhältnißmäßig bekannten Küstenstrecken Schätzungen die genau im entgegengesetzten Sinne wirkten. Ich erinnere an den Periplus des Erythräischen Meeres von einem Unbekannten, wo man aus der Kleinheit der meisten Ziffern gezwungen ist auf das um $^1/_7$ größere ägyptische Stadium als Grundmaß zu schließen, während sich neben der sehr knappen Angabe von 300 Stadien für die Entfernung zwischen Muza und der Enge der Diodorinsel (Mocha und Bab el Mandeb) die viel zu große von 1200 Stadien zwischen dem letzten Punkt und Aden (Arabia Eudaemon) findet. Diese Beispiele ließen sich zu Dutzenden vermehren und die nemlichen Erfahrungen haben dazu geführt, allen Localisirungen an Küsten aus bloßen Entfernungsmaßen einen sehr problematischen Werth beizulegen, und diesen vielmehr nur den Charakter einer ersten Annäherung zuzugestehen, um dann die Naturverhältnisse jener Localität, auf welche wir gewiesen werden, erst näher ins Auge zu fassen. — Gegen diesen methodischen Gesichtspunkt hat meines Erachtens Neumann, überrascht von dem vermeintlichen genauen Zusammentreffen einer Lücke in der Küstenlinie mit der Entfernung von 4800 Stadien vom Sefid-Rûd, gefehlt.

d) Der Einwurf, daß die (fäschlich gelesenen) 3800 Stadien Rob. Rösler hätten auf den Gedanken bringen müssen, die Zahl nochmals nachzusehen, weil sie eine beträchtliche Unterschätzung der wahren Distanz involvirt hätte, wird von K. J. Neumann nicht erhoben, woraus man vielleicht ebenfalls schließen darf, daß Letzterer eine Nachmessung nicht ausgeführt hat. Man wird ihm in diesem Falle den gleichen Vorwurf nicht machen dürfen, da er sich nicht bewußt war, daß 4800 Stadien für die Entfernung des Kara Bugas nicht unbeträchtlich zu wenig sind. Aber um die methodischen Gesichtspunkte hier im Zusammenhang zu geben, möchte ich doch auch an die bekannte Thatsache erinnern, daß mindestens für die damalige Zeit Unterschätzungen zu den größten Seltenheiten gehören, Ueberschätzungen die Regel sind. Es können hierbei natürlich nur die in Stadien ausgedrückten Entfernungsangaben in Betracht kommen, nicht die in Tagen und Nächten, weil wir ein sicheres Reductionsverhältniß zur Uebertragung der Zeit in Wegmaß nicht kennen; auch darf man zum Vergleiche nur die Strecken zwischen unzweifelhaft fest localisir-

ten Küstenpunkten heranziehen. Einzelne Angaben zum Belege hier zu citiren, scheint mir in der That unnöthig, ich verweise nur auf die Fahrt des Nearch, der die durchfahrene Strecke zwischen dem Indus und der Straße von Ormus in Summa zu 13000 Stadien schätzt, während sie in Wahrheit nicht 8000 St. lang ist, oder an Arrians Periplus des Pontus Euxinus, wo jede Küstenstrecke zwischen Bosporus und Heraclea, Heraclea-Sinope, Sinope-Amisus, Amisus-Trapezus etc. etc. um $^1/_6$—$^1/_5$ zu groß angenommen ist, und selbst ein Verfolg jeder kleinsten Küstenbiegung nicht zu den angegebenen Zahlen führt. — Ist es danach nicht wahrscheinlicher, die 4800 Stadien auf den innern Theil des Balkanbusen, dessen Eingang 4000—4200 von Sefid-Rûd entfernt ist, als auf den 5500 Stadien entfernten Kara Bugas weisen zu lassen? Oder sollen wir aus den wenigen uns erhaltenen Zeilen schließen, daß Patrokles eine ungewöhnliche Geschicklichkeit in der Schiffsführung besessen habe? Er war ja doch Strateg und nicht Pilot.

2.

Neumann versucht aber auch die weitern Gründe, welche Rösler für die Identificirung der Oxusmündung heranzieht, abzuschwächen. Ich bedauere nun aufrichtig, auch in dieser Argumentation Herrn Neumann durchaus nicht beistimmen zu können. Auch dieser Punkt ist von allgemeinem methodischen Interesse.

Es handelt sich um eine Stelle des Ptolemaeus Lib. VI Cap. 9, wo in der Beschreibung Hyrcaniens auch die Insel Talka genannt wird. Ptolemaeus giebt ihr die Breite von 43°5′, der Oxusmündung eine solche von 43° (ed. Wilb. 416). Indem nun Rösler die vor dem Balkanbusen liegende Insel Tschaleken mit Talka identificirt — was Neumann billigt —, hatte er die annähernde Uebereinstimmung der Breitenlage für seine Annahme verwerthet, wobei er (nach Ptolemaeus) 44° für die Oxusmündung annahm. (Warum er diese Ziffer nennt, habe ich eben sowenig wie Neumann errathen können. Unser gelehrter Mitbürger Carl Müller, der bekanntlich seit Jahren ausschließlich mit einer neuen Ptolemaeusausgabe beschäftigt ist, bestätigt mir auch nach Einsicht der von ihm gesammelten Varianten 43° und 43°$^1/_{12}$). Nun ist sicher der Einwand Neumanns sehr richtig, daß diese Breitenangaben noch nicht genügen für die Behauptung, »dem Ptolemaeus hätte Talka nicht sehr fern von der Oxusmündung erschienen«, daß es dabei vielmehr auch auf die Längenbestimmung ankomme. Dieses »auch« füge ich freilich spontan hinzu, während hier meines Erachtens Neumann den nämlichen Fehler begeht wie Rösler, indem er seine Argumentation nur auf die Längendifferenz

basirt, nach der Talka die Länge von 95°, die Oxusmündung eine solche von 100° habe. Also eine beträchtliche Entfernung ist nach des Ptolemaeus Ansicht ohne Zweifel zwischen beiden Punkten. Sie wird freilich von Neumann nicht näher berechnet. Da Ptolemaeus 180000 Stadien für den Erdumfang annahm, oder 500 für 1° des Aeq., so ist ein Parallelgrad oder die Breite eines Längengrades unter 43° N. Br. = 500. cos 43° = 500. 0,731 = 366 Stadien, also 5° = 1830 Stadien. Halten wir diese Zahl für die folgenden Betrachtungen fest.

Denn nun kommen wir zu der Argumentation, die, meine ich, ein geographisches Gewissen aufrichtig bekümmert. Wenn sich schon viele Schriftsteller alter und neuer Zeit gefallen lassen müssen, daß man einzelne ihrer Aussprüche aus dem Zusammenhang herausnimmt, um sie als Zeugen für oder gegen eine beliebige Ansicht vorzuführen, so halte ich dies dem Tabellenwerke eines Ptolemaeus gegenüber, welches doch nichts anderes ist als ein Commentar zur Karte, für sehr bedenklich. Natürlich erscheinen diese Positionstabellen Manchem zusammenhangslos und doch stehen und fallen so viele unter den Zahlen mit einigen wenigen Grundziffern, die man nicht von vorn herein als solche erkennen kann, so wenig man einer modernen Landkarte anzusehen vermag, welche ihrer Punkte auf einer astronomischen Ortsbestimmung beruhen. Auch hier verwahre ich mich gegen den Vorwurf etwas Triviales, ganz Bekanntes zu sagen, ich bin allein durch das Verfahren des Herrn Neumann dazu veranlaßt worden, der durch das Herauslösen der Positionen für Talka und Oxusmündung aus der Tabelle der Ortsbestimmungen von Hyrcanien jene Ziffern zu absoluten Angaben stempelt, während sie allein im Zusammenhang mit den übrigen, von ihm gar nicht in Betracht gezogenen, also in ihrem relativen Verhältniß verstanden werden können.

Also trotzdem der Text des Capitels 9 im Lib. VI gar nicht berücksichtigt wird, versucht Neumann in folgender Weise eine Reconstruction der Ansichten des Ptolemaeus »in die Absichten seiner Quelle«. Wir müssen wörtlich citiren (S. 177): »Rösler hat aus der bekannten, auch von ihm erwähnten Thatsache, daß Ptolemaeus in beklagenswerther Verirrung die große Axe des Kaspischen Meeres von West nach Ost statt von Süd nach Norden gelegt habe, nicht die nothwendigen Schlüsse gezogen. Denn bei dieser Gestaltung des Beckens mußten natürlich große Stücke der sich in meridionaler Richtung hinziehenden Küsten in die der Parallelen gezogen werden. Entfernungsangaben die für die Breitenbestimmung gelten, wurden für die Ansetzung der Längen

benutzt. . . . . Uebersetzen wir nun die Ansetzung des Ptolemaeus (Länge von Talka 95°, Oxusmündung 100°) in die Absichten seiner Quelle, so ist nicht eine westöstliche, sondern eine nordsüdliche erhebliche Differenz gemeint, und damit jede Beziehung der Oxusmündung des Ptolemaeus zu dem Balkanbusen abgeschnitten. Sehr wohl aber vereinigt sich das gewonnene Resultat mit der Straße von Karabugas«. Hier lege ich mir wieder die Frage vor, ob unser Verfasser bei seiner Untersuchung die siebente Karte von Asien im Ptolemaeus überhaupt angesehen oder sich eine solche nach den Ortstabellen des Textes rasch selbst entworfen hat? Ist, wenn man die Darstellung des alten Meisters mit der heutigen Karte vergleicht, überhaupt denkbar, daß die falsche Längenachse des Kaspischen Meeres bei ihm durch eine ähnliche Verwechselung der Richtung der Küstenlinien aus nordsüdlicher in ostwestliche hervorgegangen ist, wie man sie z. B. bei der Küste Vorderindiens oder Schottlands zu beklagen hat? Ist nicht die meridionale Achse des Beckens von der Rha-Mündung bis zu der Nordküste Mediens nur verhältnißmäßig unbedeutend kleiner, als auf unsern heutigen Karten, nämlich 8° statt 10°? Und hat denn Ptolemaeus seine Contouren nach einem mißverstandenen Periplus, wie beim stark verzerrten Persischen Meerbusen oder beim Schwarzen Meer gezeichnet? Von einer solchen Quelle wird man höchstens in der Südhälfte sprechen dürfen und die beträchtliche westliche Ausbuchtung im S. des Kaukasus auf die stark vorspringende Halbinsel Abscheron zurückführen können. Aber sehr wesentlich ist die Vergrößerung der westöstlichen Erstreckung dadurch hervorgerufen, daß er vom Aralsee und Ust-Urt-Plateau nichts wissend beide mit in den Bereich des Kaspischen Meeres zog, weil er keinen Anlaß hatte dem Jaxartes und Polytimetus eine so weit im Westen liegende Mündung zu geben, wie es bei einer Einmündung an der richtigen Ostküste des Meeres nothwendig gewesen wäre. Das influirte natürlich auch auf die südöstliche Partie und demnach ward die Küstenlinie zwischen dem letzten ihm bekannten Küstenpunkt im Winkel, Socanaa (42°, 97°20′) und der Oxusmündung (43°, 100°) in etwa ONO. Richtung gezogen. Noch heute ist der Geograph genöthigt, rein hypothetische Küsten-, Fluß-, Grenzlinien in unbekannten Gebieten zu ziehen, man wird dabei aber immer den rein willkührlichen Theil (man vergl. die Zeichnung des Congolaufes vor Stanley's Fahrt) von dem zu unterscheiden haben, wo der freie Spielraum in gewisse Grenzen eingeschlossen ist, wie z. B. beim gesammten Küstenzug eines Periplus, der in bestimmter Länge gegeben am Ausgangspunkt oder an einem anderweitig fest bestimmten Punkte ankommen muß. Der letztere Fall liegt aber bei dem Kaspischen

Meere nicht oder höchstens nur bis zur Oxusmündung vor, und folglich darf das Princip einer Verwandlung von Längendifferenzen in Breitenunterschiede hier nicht ohne Weiteres allgemein angewandt werden. In der That würde man bei einer Consequenz des von Neumann angewandten Verfahrens hinsichtlich Talkas und der Oxusmündung sofort zu den größten Ungereimtheiten für die nahe benachbarten Gebiete kommen. Die letztere soll nach der »richtig in die Absicht der Quelle übersetzten« Ansicht des Ptolemaeus 5° nördlicher liegen, der Polytimetus (103° L.) muß sich dann weiter 3° nördlicher ergießen — und wohin kommt die Jaxartesmündung mit einer Länge von 97°?? Und hat man sich den Maxeraausfluß mit 97°20′ L. auch nördlich von Talka zu denken? Sollen ferner die relativen Lagenverhältnisse der Städte Hyrcaniens gar nicht durch diese Reconstruction beeinflußt werden? Jetzt liegen dieselben wie überhaupt das bewohnte Hyrcanien nach Ptolmaeus Tabellen ganz vernünftiger Weise südwestlich von der Oxusmündung, nach Neumanns Verfahren würden sie sämmtlich südöstlich rücken und dies müßte Ptolemaeus für Gegenden, die ihm so ganz unbekannt nicht sein konnten, um allen Credit bringen.

Es sollen diese Ausführungen nur darlegen, wie mißlich eine Verallgemeinerung jenes Verfahrens ist, das uns in die räumlichen Vorstellungen eines Autors einführen soll, ohne daß man die Gründe für das von ihm wirklich zur Darstellung gebrachte Bild von Fall zu Fall erörtert.

Auch ein solcher »Fall« hat in den uns hier interessirenden Fragen seine räumliche Begrenzung. Er erstreckt sich in der vorliegenden auf die Ostküste des Kaspischen Meeres. Soll aber das von Neumann angewandte Reconstructionsverfahren nur für ein Stück derselben, nur für die Gegend zwischen Talka und Oxusmündung gelten, so müßte man doch wohl von einem ad hoc zurecht gemachten Beispiel sprechen, das der Beweisführung neues Gewicht nicht zu geben vermag.

Aber es ist auch ein besonders unglücklich gewähltes, wenn es zur Bekräftigung der Erreichung des Kara Bugas durch Patrokles dienen soll, denn, wenn wir, wie Neumann noch gar nicht gethan, dem Ursprung der bedeutenden Längendistanz nachgehen, so liegt doch factisch die Insel Tschaleken nur $1^1/_2{}^\circ$ oder 900 Stadien südlicher als der Kara Bugas. Nach der neuen Auslegung hätte sich Ptolemaeus dieselbe 5° nördlich von Talka gedacht, also, wie oben dargelegt, mindestens 1830 Stadien entfernt, falls darunter Längengrade im 43. Parallel verstanden sind!! Sollte dies Facit wirklich eine weitere Be-

stätigung der neuen Hypothese sein? Das wollen wir dem Urtheil der Leser dieser Zeilen überlassen.

Aber mein Respect, welchen ich als Vertreter einer noch wenig durchgearbeiteten Disciplin wie die Geographie stets vor philologischer Akribie und Gründlichkeit gehegt habe, hat an dieser scheinbar so unbedeutenden Stelle einen Stoß erlitten. Nicht Rösler trifft ein Tadel, wenn er auf die Natur oder Lage Talkas nicht näher einging, da es ihm überhaupt nur auf annähernd gleiche Breitenlage mit der Oxusmündung ankommt, und eine Differenz von einigen hundert Stadien ihm die ganze Sachlage nicht erschüttern konnte, wohl aber Neumann, der den bedeutenden Längenunterschied von 5° voll und ganz zu verwerthen sucht, ohne nur im geringsten sich zu vergegenwärtigen, woher derselbe denn eigentlich stammt. Ein richtiger Ptolemaeuskenner, der ich nicht bin, würde zunächst an die Erfahrung denken müssen, daß der griechische Geograph sehr häufig die nahen Küsteninseln »weit ins Meer hinaus wirft«. Ich verdanke vielmehr diese Bemerkung in der hier gegebenen charakteristischen Form einer nachträglichen Mittheilung des Herrn Dr. Carl Müller hieselbst. Aber hinsichtlich Talka's bin ich allerdings auf die einachste Weise selbständig auf die gleiche Vermuthung gekommen, weil ja am Schluß des 9. Capitels ganz deutlich von Talka gesagt ist »καὶ νῆσος κατ' ἀντὴν (sc. τὴν Ὑρκανίαν) πελαγία καλουμένη Τάλκα«, was Wilberg übersetzt »insula e regione ejus in alto sita«. Also der große Längenunterschied von 5 Graden erklärt sich dadurch, daß die Insel in das Meer hinausgeschoben ward von Ptolemaeus, sie rückt also weiter nach Westen, aber in keinem Falle verliert sie dadurch ihre Breitenbeziehung zur Oxusmündung oder läßt sich irgend wie für den Kara Bugas verwerthen.

3.

Eine ganz eigenartige Stütze sucht nun Alfred Kirchhoff der neuen Hypothese durch folgende Bemerkung zu geben: »Wir möchten hinzufügen, daß Patrokles' Annahme, der Kara Bugas sei das Ende des Oxus, wohl auch darauf mit fußte, daß die Linie des Oxos

---

1) Da K. J. Neumann die Wilberg'sche Ausgabe selbst citirt, so darf man annehmen, daß er nicht durch den Ausdruck in alten lateinischen Uebersetzungen beeinflußt war, welche allerdings gerade das Gegentheil besagen. Es steht nämlich dort übereinstimmend Insula juxta littus ipsum sita nomine Talca (oder Talcha ed. Vicenz 1475, Chalcâ ed. Col. 1540 etc.). Herr Dr. Carl Müller gab mir hiefür folgende Erklärung: es scheine, daß der erste Uebersetzer einen griech. Text vor Augen gehabt habe, in welchem das Wort πελαγία in πέλας γῆς verdorben war.

da, wo sie seit dem Uebergang Alexanders des Großen über den Strom (im J. 329) den Griechen bekannt war, gerade eine Richtung besitzt, welche weiter fortgesetzt gedacht das Kaspische Meer am Adschi Darja träfe«. (Adschi Darja ist, beiläufig gesagt, der richtigere Name für die von unsern Kartographen Kara Bugas genannte große Seitenbucht des Kaspischen Meeres; der letztere Name bezieht sich nur auf die Oeffnung selbst). Dieser Ansicht kann ich mich nun freilich in keinem Punkte anschließen; ja es dürfte eine solche Argumentation im Munde eines Geographen nicht ohne Gefahren sein, denn was soll dann diejenigen, die sich bei ganz feststehenden Flußlinien etc. nicht in die Richtungsänderungen in Folge der Kartenprojectionen (sog. Winkelverzerrung), hinein zu versetzen vermögen, kurz die geographischen Laien, noch von den gewagtesten Schlüssen abhalten, wenn sich so verwickelte Fragen durch Anlegung eines Lineals an eine beliebige Fluß- oder Küstenlinie lösen lassen? Aber nun gar in diesem Falle.

Zunächst gebe ich also zu erwägen, wie es denkbar sein soll, daß ein Mann, der mehr als vierhundert Jahre vor Ptolemaeus lebte, ja noch vor Eratosthenes, ein so klares und so richtiges Bild der gegenseitigen Lage von Baktrien mit dem mittlern Oxuslauf und dem durch Margiane davon geschiedenen mehr als 1200 Kil. entfernten (wie Venedig—Kopenhagen) Hyrcanien haben sollte, wie wir es heute — scheinbar — auf unsern Karten niederzulegen vermögen. Hat es auch gewiß vor Eratosthenes nicht an Karten ganz gefehlt, so hat wohl noch Niemand für die damalige Zeit an solche Bilder gedacht, wie sie unter Ptolemaeus entstanden. Wenn man aber gar bis auf den heutigen Tag im Unklaren ist, an welcher Stelle Alexander den Oxus überschritt, und nur von einem Punkte nördlich von Balkh spricht, wenn es feststeht, daß Patrokles, der seine Kaspische Fahrt zwischen 285—282 v. Chr. unternommen haben soll, wie Neumann so überzeugend nachweist, nicht bei diesem Zuge gewesen ist, jedenfalls nicht in irgend leitender Stellung, und vielleicht überhaupt durch eigene Anschauung Baktrien nicht kannte, sondern auf die Mittheilung der unter Alexander verfaßten Beschreibungen angewiesen war (Strabo II, 69), so ist es doch geradezu undenkbar, daß ihm irgend etwas anderes bekannt war, als daß der Oxus von O. nach W. flösse, wie er im Alterthum stets gezeichnet ist, ja nicht nur damals sondern bis in die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts, oder bis in die Zeit, wo man durch die Russen zuerst etwas Näheres über den Aralsee erfuhr. Erinnern wir uns dabei, daß Ptolemaeus jene Stelle (Zariaspa) des Oxusübergangs unter 44°, also nördlicher als die Mündung legt! Aber versetzen wir uns selbst in die Zeit eines Ale-

xander Burnes und verfolgen wir an der Hand leicht zugänglicher Karten die Flußzeichnung des Amu gerade im Norden von Balkh, während dieser letzten funfzig Jahre oder bis zu den allerneuesten Aufnahmen der Russen, so würden wir durch Verfolgung der Richtung des Flußlaufes in der fraglichen Gegend nachdem von Kirchhoff vorgeschlagenen Verfahren jeden beliebigen Punkt von der Atrekmündung bis zu der des Uralflusses am Kaspischen Meere treffen können. So führt die betreffende Linie auf Humboldts Karte von Centralasien (1844) z. B. in den Merwyi Kultuk, und man hätte also damals mit gleichem Rechte behaupten können, Patrokles sei dorthin auf seiner Fahrt gekommen, umgekehrt giebt die neue Bestimmung des wichtigen Uebergangspunktes Kelif durch die Russen, wonach derselbe bis 37°24′ südwärts gerückt wird, dem Amu oberhalb Kelifs einen so rein westlichen Lauf, daß seine Fortsetzung nach Westen uns an die Atrekmündung führen würde. Wenn man nun aber gar noch bedenkt, daß Kara Bugas und Oxusmündung (Balkanbusen) kaum $1^1/_4{}^0$ in Breite von einander entfernt liegen, der Oxusübergang des Alexander davon gegen 1200 Kil. absteht (6500 Stadien), so handelt es sich für die Linien vom letztern zu den streitigen Küstenpunkten um einen so kleinen Winkel (von nur 7°), daß Niemand mit Sicherheit behaupten könnte, jene Richtung des Oxus führe wirklich gerade zum Kara Bugas ohne die Lage der Punkte, welche die Richtung längs dem Flusse fixiren, so genau zu kennen, daß man mit trigonometrischen Rechnungen controliren kann.

Dies alles setze ich wiederum nicht für Geographen, für die es selbstverständlich sein wird, auseinander, sondern verweile dabei nur, weil vielleicht diese Zeilen doch auch Philologen oder Historikern in die Hände fallen. Ich denke, sie müßten sich überzeugen, daß einem Patrokles die Abstraction über Lagenverhältnisse nicht möglich war, welcher keiner der besten Geographen des Alterthums fähig war, ja, welche wir heute gestützt durch unsere vorzüglichen Anschauungsmittel nicht auszuführen vermöchten. Unmöglich kann die Argumentation Kirchhoffs für den Kara Bugas eine Stütze bieten. Auf einem ganz andern Blatt steht natürlich jener ohne Zweifel richtige Nachweis Neumanns, daß Patrokles die Jaxartesmündung ohne erfahrungsmäßige Begründung deshalb 2400 Stadien nördlich von derjenigen des Oxus gelegt habe, weil beide Flüsse, die man in parallelem Laufe dachte, so weit zwischen dem Uebergangspunkt Alexanders und Alexandria ultima entfernt waren.

4.

Demselben Patrokles nun, dem man die Combinationsgabe, fast

möchte ich sagen, eines H. Kiepert oder Petermann vindicirt, trauen unsere Verfasser seltsamer Weise nicht die elementare Beobachtungsgabe eines Schiffers zu. Denn was an der ganzen Beweisführung am meisten auffallen muß, ist, daß ohne irgend eine Berücksichtigung der natürlichen Beschaffenheit des Kara Bugas eine Entscheidung getroffen wird. Nach 4800 Stadien zeigt sich, heißt es, in der Küste eine Oeffnung. »Es ist hier also wirklich geschehen, was in der Entdeckungsgeschichte keineswegs ohne Beispiel dasteht, einen engen Meeresarm hat Patrokles für die Einmündung des Oxus gehalten. Wir sehen also keine Spur einer wirklichen Kunde von dem Laufe des Flusses und von seiner Mündung« (S. 176).

Ich will hier auf die Untersuchung der Frage, ob nicht viel häufiger Flußmündungen für Meeresgassen gehalten sind, nicht eingehen, jedenfalls wäre die Analogie anderer Fälle noch kein Beweis für die Neumannsche Annahme. Leider besitzen wir ja allerdings nicht die leiseste Andeutung irgend einer von Patrokles gemachten Beobachtung über die von ihm besuchte Gegend, wir können also nur Wahrscheinlichkeitsgründe ins Feld führen. Nun hat der Balkanbusen die Eigenthümlichkeit sich trichterförmig zusammen zu ziehen und besitzt im letzten Dritttheil eine durchschnittliche Breite von nur 3—4 Kilometer, so daß beide Ufer leicht zu sehen sind, zumal sich im N. das Balkangebirge erhebt. Auch wenn die Fahrt nicht bis in den innersten Winkel ging, konnte durch dies Verhältniß doch sicher ungleich leichter die Vorstellung einer Flußausmündung in Patrokles erzeugt werden als bei der Durchfahrt durch oder selbst bei der Vorbeifahrt am Kara Bugas, wo hinter den Dünen der vorgelagerten Nehrungen der Spiegel des Adschi Darja wohl wieder hervorblinken wird.

Seit den Zeiten des Herodot war im Alterthum die Ansicht verbreitet, daß der Oxus ein sehr stattlicher, ja einer der größten Flüsse der bekannten Erde war (Strabo Lib. XI, 509); Aristobul giebt ihm nach seiner Vereinigung mit dem Ochus an vielen Stellen eine Strombreite von 6—7 Stadien (à 185 m = 1100—1300 m Strabo XI, 518), Arrian (III, 3) an der Stelle, wo Alexander ihn überschritt, 6 Stadien (1100 m). Und diese Ziffern werden annähernd bestätigt durch Alex. Burnes, der ihn auf dem Wege von Balkh nach Karschi überschreitend, seine Breite zu 800 Yards (731 m) (Travels I, p. 219, II, 6 steht 828 Yards), zwischen Bokhara und Merw zu 1950 F. (594 m II, 5) angiebt, dafür ist er hier tiefer. Jedenfalls dürfen wir für die Zeit des Patrokles eine Vorstellung von 1000 M. Breite für die den Griechen bekannt gewordenen Uebergangsstellen annehmen. Und wie steht es nun mit der Breite der vermeintlichen Ausmündung von Kara Bugas?

Der Eingang desselben ist nach Sherebzow 80 russ. Faden (v. Baer Kasp. Studien, Bull. phys. math. Acad. imp. de St. Petersb. XV. 1857. p. 77). Da hierunter wohl sicher sog. See-Saschehn (à 6 F. = 1 m, 829) zu verstehen sind, so beträgt die Weite der Oeffnung 146 Meter oder im andern Fall (à 7 F. = 2m.133) nicht mehr als 170 m. Wenn man für das Alterthum eine sehr viel breitere Oeffnung annehmen wollte, so begiebt man sich wieder ins Reich der Vermuthungen. Die Annahme einer Verschiebung derselben nach Art der in den Ostseehaffen ja mehrfach eingetretenen des sog. Tiefs würde zunächst den Ausgangspunkt der Hypothese Neumanns über den Haufen werfen. Aber es handelt sich hier auch nicht durchweg um so loses Erdreich wie bei unsern Nehrungen, sondern verschiedene Beobachter wie Eichwald, Karelin, Blaramberg und Sherebzow sprechen von Felsen vor dem Eingang: »Obgleich die Ufer des Kanals oder der Meerenge flach zu sein scheinen, sagt Baer (a. a. O. XIV. 1856. p. 15), so kann man doch nicht zweifeln, daß sie felsig sind und dem Druck widerstehen«. — Diese Oeffnung also von 150 m Breite sollte Patrokles für die Ausmündung des gewaltigen Oxus gehalten haben, den er sich wenigstens in 1000 m Breite vorstellte? Müßte dann nicht wenigstens die Mündung die Wassermasse zusammen pressend in mächtigem, tiefem Strom weit in das Meer hinausgelassen haben?

Doch kehren wir erst zum Balkanbusen zurück.

Wenn auch wirklich, wie ich gleichfalls glaube, die Hauptmasse des Amuwassers damals nicht mehr in den Balkanbusen floß, ja wenn auch jener schmale Arm brakischen Wassers, den man jetzt an die Stelle des Usboy zu setzen geneigt ist (Soc. de géogr. de Paris. C. Rendu 1885. Nr. 1, p. 6), weil man ein altes Flußbett im engern Sinn nicht überall constatiren zu können glaubt, selbst schon trocken gelegt gewesen sein sollte, so ist bei den vorherrschenden Nordostwinden, bei dem nahen Höhenzuge, von dem sich eine große Reihe periodischer Wasserrinnen herabziehen, doch anzunehmen, daß im Balkanbusen wenigstens zeitweise eine schwache Strömung nach außen stattfindet, die dem Schiffer nicht entgeht. Wie viel stärker muß sie gewesen sein, falls Theile des Amu, ferner des Murghab und Tedjend sich damals noch bis in die Usboy-Rinne ergossen und der Ueberschuß wenigstens theilweise dem Kaspischen Meer zuging. Jedenfalls möchte der Eindruck sich in einer Flußmündung zu befinden, durch diese Strömungsverhältnisse entschieden erhöht sein.

Genau das Gegentheil einer Ausströmung ins Kaspische Meer findet aber am Kara Bugas statt. Ueber die frühere Gestaltung des »schwarzen Schlundes« oder Kara Bugas wissen wir nichts. Aber heute? Ich meine ein geographisches Auge müßte auf der Karte bei

bloßer Betrachtung des rings abgeschlossenen, von weiten heißen Steppen umgebenen, unter 41—42° N. gelegenen Beckens, dem kein Fluß zugeführt wird, auf die Vermuthung kommen, daß hier ein Verdampfungsbecken vorliegt, das allein mittelst eines Einströmens kaspischen Wassers durch den schwarzen Schlund zum Ersatz des verdunsteten vor dem Vertrocknen bewahrt wird. Von einer solchen ausgehend konnte man dann vielleicht in der reichen Literatur des kaspischen Meeres — und wer würde da nicht gleich an Karl Ernst von Baers Kaspische Studien denken — Bestätigung oder Belehrung gefunden haben. Und in der That bei der ersten russischen Expedition unter Koshin 1716 hat man dieses Einströmen in den damals erst bekannt gewordenen Kara Bugas erkannt, wie Peter der Große dem französischen Kartographen Delisle dem älteren bei seinem Aufenthalt in Paris 1717 erzählte. Delisle berichtet darüber wie folgt (Hist. de l'acad. 1820. p. 382) »Le prince me fit l'honneur de me dire que c'étoit mal-à-propos que l'on avoit supposé un gouffre (Strudel) dans la Mer Caspienne; que s'il y en avoit en quelque part il ne pouvoit être que dans une autre petite Mer de 15 lieues d'étendue, dans la quelle la Mer Caspienne se déchargeoit à sa partie orientale et dont nous n'avions eu aucune connoissance jusqu'à présent. Que l'eau de cette petite Mer étoit d'une si grande saleure que les Poissons de la Mer Caspienne qui y entroient, perdoient la vûe d'abord et mouroient peu après«. Bekanntlich ist die Existenz des Kara Bugas-Beckens, eben jenes kleinen Seitenmeeres, in Westeuropa zuerst durch Peters Skizzirung gegenüber Delisle bekannt geworden.

Karl Ernst von Baer nun beschäftigt sich im dritten Aufsatze seiner so hochinteressanten Kaspischen Studien (Bull. physico-math. Acad. de St. Petersb. XIV. 1856), in dem er zu zeigen sucht, daß der Salzgehalt des Kaspischen Meeres im Abnehmen begriffen sei, ausführlich mit dem Adschi Darja (den auch er Kara Bugas nennt) und theilt die Resultate der hydrogr. Untersuchung Sherebzows v. J. 1847 mit (S. 14). Uns interessiren vor allem die Strömungsverhältnisse. Sherebzow sagt ausdrücklich die Strömung gehe immer durch diesen Kanal in den Busen hinein; bei Westwinden betrage sie $2^1/_2$ ($4^1/_2$ Kil.), bei Ostwinden $1^1/_2$ (2,8 Kil.) Knoten, beim Uebergang in den Busen (bei der Tiefe von 5 Fuß) sei sie $2^3/_4$—$3^1/_2$ (5,1—$6^1/_2$ Kil.) Knoten gewesen. Auch Karelin und Blaramberg hatten die Strömung ungeachtet des damals herrschenden Ostwindes nach Ost gehend gefunden. K. E. v. Baer ist sogar geneigt anzunehmen, daß der durch den Kara Bugas gehende Strom die Sage von dem Schlunde veranlaßt habe, in welchen das Kaspische Wasser sich stürzt (a. a. O.

XV. 1857, 75). Die oben angegebenen Zahlen stellen die Strömung etwa auf eine Linie mit derjenigen, welche die Gewässer des Schwarzen Meeres durch den Bosporus herausführt, über deren Ursprung die Alten sich schon völlig klar waren. Nach Sherebzow wird die Strömung im Kara Bugas erst 25 Seemeilen von der Einmündung unmerklich oder »ist $^1/_4$—$^1/_2$ Knoten und vom Einfluß des Windes nicht unterscheidbar«.

Gerade diese letzte Bemerkung zeigt uns, daß Patrokles als Küstenfahrer von dieser Strömung, die ihn aus dem Kaspischen Meere heraus geführt hätte, etwas hätte merken müssen, auch wenn er nur in Sicht der Lücke gekommen wäre, denn selbstverständlich muß vor (westlich) dem Eingang ein Aspirationsstrom aus weiterer Entfernung sich bilden, wenn er jenseits noch 25 Seemeilen spürbar ist. Und daß die gleichen Verhältnisse im Alterthum existirten, zeigt sich aus dem starken Salzgehalt des Wassers, ja man glaubte die Beobachtung gemacht zu haben, daß dasselbe am Boden bereits den Sättigungsgrad erreicht und sich als Salzkruste wieder niedergeschlagen habe, was vielleicht doch auf einem Versehen beruht. Jedenfalls läßt sich aber dieser durch den Kara Bugas abgeschlossene Golf als ein Salzsee ansehen, der durch fortwährenden Ueberschuß der Verdunstung dem Kaspischen Meere dauernd Salz entzieht.

Was ist nun wahrscheinlicher, daß Patrokles in dem schmalen Balkanbusen, eventuell keiner Strömung begegnend, diesen für die Ausmündung des Oxus gehalten hat, oder daß er, auf offener See von einer in den engen schwarzen Schlund *eindringenden* Strömung erfaßt, diesen damit verwechselte?

Nach allem diesem darf man behaupten, daß das Zeugniß dieser Fahrt für eine Oxusmündung ins Kaspische Meer während des Alterthums durch die neue Hypothese nicht hinweggeräumt ist. Wir stehen dieser Frage noch immer rathlos gegenüber und warten mit Spannung auf weitere Veröffentlichungen der einzelnen Untersuchungsexpeditionen sowie der genauen Erforschung der Ruinenstätten am Usboy. Die gelegentlichen Discussionen russischer Geographen, über die nur dürftige Notizen in unsere Zeitschriften gelangen, gestatten jedenfalls ein definitives Urtheil nicht.

Die Erwärmung eines Gases durch Compression nach der kinetischen Gastheorie.

Von

W. Voigt.

Die Ableitung des Gesetzes für den Druck, den ein Gas auf die Wände des Gasometers ausübt, aus der Grundvorstellung der kinetischen Gastheorie ist wiederholt in verschiedener Weise entwickelt worden; eine analoge Behandlung des zweiten Grundgesetzes der Gase, nach welchem eine Compression bei Abschluß gegen Wärmeaustausch die Temperatur steigert, ist meines Wissens aber noch nicht mitgetheilt, obgleich die beiden Gesetze — das von Mariotte-Gay Lussac und das von Poisson gegebene — als Grundpfeiler der Theorie der Gase völlig gleich wichtig sind.

Ich werde im Folgenden die sehr einfache Betrachtung mittheilen, welche direct zu dem Poisson'schen, sogenannten Gesetz »der adiabatischen Aenderung« führt.

Das Gas befinde sich in einem Cylinder, die Compression werde durch Verschiebung des den Cylinder verschließenden Kolbens hervorgebracht. Ihre Wirkung wird sich zunächst nur auf die dem Kolben unmittelbar benachbarten Moleküle äußern und erst durch ihre wechselseitige Einwirkung auf die ferneren übertragen. Man kann diese allmählige Fortpflanzung der Wirkung ignoriren, wenn man in derselben Weise, wie meist bei der Ableitung des Mariotte-Gay Lussacschen Gesetzes aus der kinetischen Grundhypothese geschieht, die Annahme macht, daß von den Zusammenstößen der Moleküle abzusehen sei, weil man stets die durch einen Stoß unterbrochene Bewegung *eines* Moleküles durch die in demselben Augenblick in Folge eines andern Stoßes neu eintretende eines *andern* Moleküles fortgesetzt denken, also die Betrachtung an ungehindert von Wand zu Wand fliegende Theilchen anknüpfen darf. Diese Annahme ist natürlich nur als angenähert richtig anzusehen.

Da tumultuarische Veränderungen in der mechanischen Wärmetheorie bei den adiabatischen Zustandsänderungen ausgeschlossen werden, so denken wir die Geschwindigkeit ω, mit welcher der Kolben verschoben wird, verschwindend klein neben derjenigen Ω der Gasmoleküle und betrachten einen so kurzen Zeitmoment τ, daß während desselben die Geschwindigkeit ω als constant gelten kann. Gleichwohl können, während τ die Moleküle mehrere Male von Wand zu Wand das Gefäß durchlaufen.

Wir betrachten ein Atom m_k eines Moleküles μ auf seiner Bewegung.

So lange sich dasselbe in merklicher Entfernung von dem bewegten Kolben befindet, steht es ausschließlich unter der Wirkung der übrigen Atome des Moleküles, dem es angehört, da die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Molekülen oben ausgeschlossen ist. Ihre Componenten seien:

$$\sum^k X_{kk}, \quad \sum^k Y_{kk}, \quad \sum^k Z_{kk}.$$

In unmerklicher Entfernung von dem Kolben tritt dessen Molekularwirkung ein; sie findet normal zu seiner Ebene statt und ist ausschließlich Function der normalen Entfernung des Atomes vom Kolben.

Daher kann man schreiben, indem man zur X-Axe die Normale auf dem Kolben oder die Cylinderaxe wählt:

$$\begin{aligned} m_k x_k'' &= \sum^k X_{kk} + \Xi \\ m_k y_k'' &= \sum^k Y_{kk} \\ m_k z_k'' &= \sum^k Z_{kk}. \end{aligned} \qquad 1)$$

Ξ, die Molekularwirkung des Kolbens, ist Function von $(x_k - \xi)$ falls ξ die X-Coordinate der innern Fläche des Kolbens bezeichnet.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $d(x_k - \xi)$, die zweite mit dy_k, die dritte mit dz_k und integrirt, so erhält man, da

$$\begin{aligned} d(x_k - \zeta) &= (u_k - \omega)\,dt \\ dy_k &= v_k\,dt \\ dz_k &= w_k\,dt \end{aligned}$$ und ω während der Periode eines Stoßes constant ist:

$$\begin{aligned} m_k\left(\frac{u_k^2}{2} - \omega u_k\right) &= \int \sum^k X_{kk}\, d(x_k - \xi) + \int \Xi\, d(x_k - \xi) + C_1 \\ m_k \frac{v_k^2}{2} &= \int \sum^k Y_{kk}\, dy_k + C_2 \\ m_k \frac{w_k^2}{2} &= \int \sum^k Z_{kk}\, dz_k + C_3. \end{aligned} \qquad 2)$$

Nimmt man als Grenzen der Integration den Eintritt und Austritt des Atomes in die Wirkungssphäre des Kolbens, so ist:

$$\int_0^1 \Xi\, d(x - \xi) = 0,$$

da Ξ nur von $(x-\xi)$ abhängt, und man erhält, wenn $-u_k^0$, v_k^0, w_k^0 die Werthe vor dem Eintritt, u_k, v_k, w_k weiterhin die nach dem Austritt bezeichnen, durch Addition der Gleichungen (2)

$$m_k\left[\tfrac{1}{2}(u_k^2+v_k^2+w_k^2)-\tfrac{1}{2}(u_k^{02}+v_k^{02}+w_k^{02})-\omega(u_k+u_k^0)\right]$$

$$=\sum k\int_0^1(X_{kk}d(x_k-\xi)+Y_{kk}dy_k+Z_{kk}dz_k)$$

Bildet man diese Formel für alle Atome eines Moleküles und summirt sie, d. h. versieht die letzte Gleichung mit $\sum k$ so wird $\sum k\sum k X_{kk}d\xi=0$, $\sum m_k u_k=\mu U$ d. h. der Masse des Moleküles mal der Schwerpunktsgeschwindigkeit, und

$$\sum k\left\{\frac{m_k}{2}((u_k^2+v_k^2+w_k^2)-(u_k^{02}+v_k^{02}+w_k^{02}))\right.$$

$$\left.-\sum k\int_0^1(X_{kk}dx_k+Y_{kk}dy+Z_{kk}dz_k)\right\}=e_1-e_0$$

d. h. gleich der Vergrößerung der ganzen äußern und innern Energie des Moleküles durch den einen Stoß.

Es resultirt also:

$$e_1-e_0=\mu\omega(U_1+U_0) \qquad 3)$$

oder da bei gegen die fortschreitende Geschwindigkeit der Moleküle kleinem ω sich U_1 und U_0 wenig unterscheiden

$$e_1-e_0=2\mu\omega U. \qquad 4)$$

Während der Zeiteinheit würde dasselbe Molekül $U/2H$ mal in die Wirkungsphäre des Kolbens treten, wenn H die Höhe des Cylinders ist, man erhält also:

$$\frac{de}{dt}=\frac{\mu\omega U^2}{H}. \qquad 5)$$

Bezeichnet man die Gesammtgeschwindigkeit des Moleküles μ mit Ω, den Einfalls-Winkel gegen die Normale auf dem Kolben mit φ so ist:

$$U=\Omega\cos\varphi.$$

In allen Richtungen φ werden nahezu gleichviel Moleküle gegen den Kolben treffen, daher ist, wenn ν die gesammte Anzahl der Moleküle im Kolben bezeichnet, die Zunahme der ganzen Energie des eingeschlossenen Gases, bezogen auf die Zeiteinheit, während der Kolben mit der Geschwindigkeit ω bewegt wird, gegeben durch:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\nu \mu \omega}{2\pi H} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega^2 \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\chi. \qquad 6)$$

Führt man nun ebenso, wie bei der Ableitung des Mariotte-Gay Lussacschen Gesetzes geschieht, als mittlere Geschwindigkeit Ω_m diejenige ein, welche allen Molekülen beigelegt, die in Wirklichkeit vorhandene lebendige Kraft ergiebt, so erhält man

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\nu\mu\omega\Omega_m^2}{3H}. \qquad 7)$$

Hierin ist

$$\frac{\nu\mu\Omega_m^2}{2} = E_a$$

d. h. gleich der Energie der fortschreitenden Bewegung der Moleküle,

$$QH = v, \quad \omega Q = -\frac{dv}{dt}$$

d. h. gleich dem vom Gas eingenommenen Volumen und seiner Aenderung während der Zeiteinheit. Also giebt sich:

$$\frac{dE}{E_a} = -\frac{2}{3}\frac{dv}{v}. \qquad 8)$$

Da die allgemeine Gleichung für die mechanische Aenderung der Energie eines unter allseitig gleichem Druck stehenden Mediums lautet:

$$dE = -pdv$$

so giebt die Vergleichung mit der vorstehenden Formel die Relation:

$$vp = \tfrac{2}{3} E_a \qquad 9)$$

oder unter Rücksicht auf das, gleichviel ob empirisch oder durch die kinetische Gastheorie gegebene Mariotte-Gay Lussac'sche Gesetz, nach welchem:

$$vp = RM\Theta \qquad 10)$$

ist, auch:

$$\tfrac{2}{3} E_a = MR\Theta. \qquad 11)$$

Hierin bezeichnet M die Masse des Gases, Θ seine absolute Temperatur, R eine der Gasart individuelle Constante.

Besitzt das Gas einatomige Moleküle, so ist seine gesammte Energie nur unmerklich von derjenigen der fortschreitenden Bewegung seiner Moleküle verschieden, also:

$$E = E_a$$

zu setzen erlaubt.

Man erhält dann sogleich aus (8) durch Integration

$$Ev^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$$

oder nach (11):

$$\Theta v^{\frac{1}{3}} = \text{Const.}$$

oder endlich nach (10):

$$pv^{\frac{5}{3}} = \text{Const.}$$

als die Bedingung der adiabatischen Zustandsänderung für einatomige Gase.

Im allgemeineren Falle ist für die Integration zunächst eine Relation zwischen E_a und E aufzusuchen.

Die gesammte Energie E der Gasmasse kann als durch eine Wärmezufuhr bei constantem Volumen hervorgebracht gedacht und demgemäß nach der Grunddefinition der Energie gesetzt werden:

$$E = AM\int_0^\Theta c_v d\Theta, \qquad 12)$$

worin A das mechanische Wärmeäquivalent, c_v die specifische Wärme bei constantem Volumen bezeichnet. Nach der Voraussetzung, daß man von den Zusammenstößen der Moleküle absehen darf, muß dabei c von v unabhängig sein; die Abhängigkeit von Θ wird aber nicht ausgeschlossen.

Da sonach E nur eine Function von Θ ist, so ist es für verschiedene v und p das gleiche, wenn nur vp den gleichen Werth besitzt. Hieraus folgt, daß:

$$AM\int_{\Theta_0}^{\Theta} c_v d\Theta = AM\int_{\Theta_0}^{\Theta} c_p d\Theta - p\int_{v_0}^{v} dv$$

ist, wenn c_p die specifische Wärme bei constanten Volumen bezeichnet, und v_0, v die zu Θ_0 und Θ gehörigen Volumen sind, p der zu Θ gehörige Druck ist; denn beide Seiten der Gleichung geben die Aenderung der Energie zwischen denselben Temperaturcurven Θ_0 und Θ, nur die linke Seite längs einer Curve constanten Volumens, die rechte längs einer Curve constanten Druckes berechnet. Hieraus folgt in Rücksicht auf (10) auch für mit Θ variabeles c_p und c_v:

$$A = \frac{R}{c_p - c_v}.$$

Dies in (12) eingesetzt ergiebt:

$$E = \varepsilon MR\int_0^\Theta \frac{d\Theta}{\varkappa - 1} \qquad 13)$$

und nach (11):

$$dE = \frac{2}{3(\varkappa - 1)} dE_a \ldots \qquad 14)$$

Die Constanz von $\varkappa$ brauchen wir dabei nicht vorauszusetzen.

Die Berücksichtigung dieser Relation und der Formel (11) giebt aus (8) sogleich:

$$\frac{dE_a}{E_a} = \frac{d\Theta}{\Theta} = -(\varkappa - 1)\frac{dv}{v} \qquad 15)$$

Dies ist die allgemeine Differentialgleichung für die adiabatische Zustandsänderung. Soweit man $\varkappa$ als constant ansehen kann, folgt daraus:

$$\Theta v^{\varkappa - 1} = \text{Const.}$$

oder wegen (10) auch:

$$pv^{\varkappa} = KM^{\varkappa} \qquad 16)$$

d. h. die bekannte Poisson'sche Gleichung, in welcher K eine Größe bezeichnet, welche nur von der Natur des Gases und von der Wärme abhängig ist, welche nöthig ist, um seine Masseneinheit ohne Arbeitsleistung von 0° auf denjenigen Zustand zu bringen, der durch die Variabeln p und v definirt ist.

Von der im Eingang gemachten Annahme, daß von den Zusammenstößen der Moleküle abgesehen werden dürfe, kann man sich übrigens leicht frei machen, falls man darauf verzichtet, durch die Compression sogleich eine gleichförmige Erwärmung des Gasquantums zu erhalten. Ist die Dichtigkeit des Gases hinreichend groß, um annehmen zu können, daß die auf ein Element der Wandfläche auffallenden Theilchen aus unendlicher Nähe desselben kommen, so kann man auch die Gestalt des Gefäßes außer Betracht lassen und das Gas über dem betrachteten Wandelement unbegrenzt annehmen.

Der in Gleichung (4) gegebene Werth für die Aenderung der gesammten Energie eines Moleküles durch einen Stoß:

$$e_1 - e_0 = 2\mu\omega U$$

ist durch ausschließliche Untersuchung des Vorgangs in unmerklicher Entfernung von dem mit der Geschwindigkeit ω parallel seiner Normalen bewegten Wandelement erhalten, also auch für die neue Betrachtungsweise gültig. Eine Aenderung hat nur bei Berechnung der Anzahl der stoßenden Moleküle einzutreten.

Das Gas ist überall von gleicher Dichte; die Anzahl seiner Moleküle in der Volumeneinheit sei $= n$, davon mögen Geschwindigkeiten zwischen Ω und $\Omega + d\Omega$ besitzen $n' d\Omega$, ferner sei α' die Anzahl der Zusammenstöße, welche eines dieser Moleküle in der Zeiteinheit im Mittel erleidet.

Es beginnen dann in einem Volumenelement dV in der Zeiteinheit

$$\alpha' n' dV$$

Moleküle ihren Weg und erreichen nach der Definition von α' ungestoßen

$$\alpha' n' e^{-\frac{\alpha' r}{\Omega}} dV$$

die Entfernung r; also treffen auf ein gegen r um den Winkel φ geneigtes Flächenelement do

$$\frac{\alpha' n e^{-\frac{\alpha' r}{\Omega}} do\, dV \cos\varphi}{\varkappa \pi r^2}.$$

Aus allen übrigen Volumelementen gelangen Moleküle nach do deren Anzahl durch dasselbe Gesetz gegeben ist. Sie besitzen die Normalgeschwindigkeit gegen jenes Element

$$U = \Omega \cos\varphi.$$

Es wird demgemäß durch die Bewegung des Flächenelementes do mit der Geschwindigkeit ω in der Richtung der Normalen ein Energiezuwachs des Gases hervorgebracht von der Größe:

$$\frac{dE'}{dt} do = \frac{\mu \omega do}{2\pi} \int_0^\infty n' \Omega^3 d\Omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\infty \frac{\alpha'}{\Omega} dr\, e^{-\frac{\alpha' r}{\Omega}}.$$

Da nun:

$$\int_0^\infty n' \Omega^3 d\Omega = n \Omega_m^2$$

d. h. gleich der Anzahl aller Moleküle in der Volumeneinheit mal dem mittleren Werthe ihres Geschwindigkeitsquadrates ist, so giebt dies:

$$\frac{dE'}{dt} do = \frac{\mu \omega n \Omega_m^2 do}{3},$$

und summirt über alle Oberflächenelemente die gesammte Energieänderung, welche durch die Volumenänderung:

$$-\frac{dv}{dt} = \int \omega\, do$$

eintritt, nämlich:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu n \Omega_m^2}{3} \frac{dv}{dt},$$

oder auch, da $v.n$ die Anzahl ν der Moleküle in dem ganzen Gefäß

und

$$\frac{\nu\mu\Omega_m^2}{2} = E_a,$$

die Energie der fortschreitenden Molekularbewegung ist:

$$\frac{dE}{E_a} = -\tfrac{2}{3}\frac{dv}{v}.$$

Dies ist aber dieselbe Formel (8) von der oben ausgegangen ist, nachgewiesen für ein beliebig gestaltetes Gefäß und unter Rücksicht auf die Zusammenstöße der Gasmoleküle.

Ueber die urgermanische Verschärfung von *j* und *w*.

Von

F. Bechtel.

Daß die Lautverbindungen got. *ddj*, altn. *ggj*, als deren Vereinigungspunkt längst vor Braune (Paul-Braune IX. 545 f.) von JSchmidt (KZ. XXIII. 294 f.) *ǵǵj* erkannt worden war, sowie ostgermanisch *ggw* Fortsetzer einer urgermanischen Verschärfung von *j* und *w* sind, welche ihre Spuren auch im Westgermanischen hinterlassen hat, ist bekanntlich Holtzmann's Entdeckung (Isidor 129, Altd. Gramm. I. 43. 109. 225. 332). An Holtzmann hat Kluge angeknüpft, welcher, im Principe mit Recht, Eintreten oder Unterbleiben der Verschärfung von dem indogermanischen Accente hat abhängig sein lassen (QF. XXXII. 127 f.). Die Frage ist zuletzt von Kögel behandelt (Paul-Braune IX. 523 ff.); Kögel setzt zwei verschiedene *j* und *w* voraus, deren Herkunft er gar nicht untersucht.

Kluge hatte gemeint, Verschärfung träte ein hinter dem idg. Hochtone, unterbliebe vor dem Hochtone. Das war nun freilich nicht zu beweisen; weshalb denn Kluge auch von JSchmidt (Anz. f. d. Alt. VI. 125 f.) und Paul (Paul-Braune VII. 165 Note) Widerspruch erfahren hat. Aber Kluge's Ausgangspunct war ganz richtig gewählt: es scheint mir unzweifelhaft zu sein, daß das Eintreten der Verschärfung mit dem alten Accente im Zusammenhange steht, nur sind die Bedingungen des Eintritts oder Nichteintritts den von Kluge formulierten gerade entgegengesetzt. Ich hoffe nämlich zeigen zu können: daß die Verschärfung eintritt, wenn der alte indogermanische Accent unmittelbar folgt; unterbleibt, wenn der alte Accent unmittelbar vorausgeht.

I. Der alte Accent folgt unmittelbar nach.

1) got. *twaddjē*, altn. *tveggja*, ahd. *zueiio* u. s. f.: sskr. *dvayá-*, gr. *δοιῶν* (vgl. JSchmidt aaO.).

2) altn. *þriggja*, ags. *þreó-ra*, ahd. *thriio* (Kögel aaO. S. 544): sskr. *trīṇām*, gr. *τριῶν*. — Der abweichende got. Genetiv *þrije* hat sich nach *þreis* aus **þrijiz* = sskr. *tráyas* gerichtet; wie got. *þrijē* zu altn. *þriggja* wird sich got. *bajōþs* zu altn. *beggja* verhalten.

3) Während die Formen der starken Verba zu keinem Beweise zu benutzen sind, da dieselben Ausgleichungen ausgesetzt waren, ist altn. *bjoggum* (vgl. ahd. *biruun* JSchmidt KZ. XXV. 598 f.) sicher eine lautgesetzliche Bildung, da der kurze Vocal, hinter dem die Verschärfung allein eintreten kann, bei dem Verbum *búa* nur in den schwachen Perfectformen zu finden ist. Letztere oxytonieren aber. Wir haben demnach anzunehmen, daß die ursprüngliche Conjugation von got. *bliggwan* die folgende war: **bliwan* (cf. *sniwan*), **blau* (cf. *snau*), *bluggwum*, *bluggwans*; in got. *bliggwan*, *blaggw* einer- und *sniwans*, *diwanō* andrerseits liegen von zwei verschiedenen Seiten her erfolgte Ausgleichungen vor. Zu beachten ist noch altn. *brugginn* (gebraut) als mit got. *bluggwans* conforme Bildung.

4) got. *iddja*, ags. *eóde* ist von Möller (KZ. XXIV. 432 Note) als alter Aorist (sskr. *áyām*) erkannt. Daß man, um got. *iddja* zu begreifen, nicht von der Augmentbetonung ausgehn darf, wie Kluge ut, lehrt Wackernagel (KZ. XXIII. 470), dessen Satz: „auf *agām* geht aber *gām* neben *ágām* eben so sicher zurück, als sskr. *smási* neben *dsmi* auf *asmási*" gerade durch got. *iddja* glänzend bestätigt wird.

5) got. *daddjan*, altschwed. *dæggia* : sskr. *dhāyati* saugt. Daß der Accent von *dhāyati* ursprünglich auf dem Suffixe *ya* gestanden hat, lehrt der Gegensatz von *dhāyati*, *dāyatē* zu *dhā*, *dā* einerseits und von *gāyati*, *trāyatē*, *sphāyatē*, *vāyati* zu *gā*, *trā*, *sphā*, *vā* andrerseits. got. *daddjan* ist von ahd. *tāan* wie sskr. *dhāyati* von *gāyati* geschieden. Die Verbalclasse, welche die Inder die vierte nennen, zerfällt in zwei Abteilungen, die sich wie die erste und die sechste Classe zu einander verhalten, d. h. ursprünglich ein einziges System gebildet haben: gr. *ἵζω* : *ἕζομαι* fällt Jedem ein, der nicht durch die längst unter die Mythen versetzte Etymologie *ὄζος*: got. *asts* und durch die problematische Herleitung von *Ἀθήναζε* aus **Ἀθήναςδε* verleitet das griechische *ἵζω* aus **sizdō* entstanden sein läßt.

6) Zu sskr. *priyás*, lieb, gehört nicht got. *freis*, frei, sondern der Name der Liebesgöttin altn. *Frigg*, ags. *Frīg*, ahd. *Friia*. Von sskr. *priyá-* ist *priyāya-* abgeleitet; der dritten Sg. *priyāyátē* würde

bis auf das Genus germ. **frijōjiþi* entsprechen: zu einem got. **friggjon* ist also kein Anlaß. — Die alte Etymologie got. *freis* : sskr. *priyás* steht mit den Lautgesetzen im Widerspruche. Warum soll in got. **frijis* Contraction eintreten, in *frijei* aber nicht? Alles wird erklärlich, wenn man *frīaz* (entstanden aus *frī-ia-z*?) als urgermanischen Nominativ betrachtet: aus **frīaz*, **frīanō* konnte nur got. *freis*, *frijana* werden. got. *freis*, frei, ist demnach in der Tat wurzelverwandt mit lat. *prīvus*, *prīvatus*, der Einzelne (Lange, die Tabula Bantina S. 46 ff.); Fröhde Beitr. IX. 109.

7) Als ursprachliche Betonung der adjectivischen *u*-Stämme hat Bezzenberger (Beitr. II. 123 ff.) Oxytonierung erwiesen. Für got. *hardus*, altn. *þurr* ergibt sich diese Betonung aus dem Stande der Lautverschiebung, für got. *filu*, *kaúrus*, *aggwus* ist sie aus dem Sanskrit, für *tulgus* gegenüber ἐνδελεχής (vgl. Beitr. VI. 238) aus der Gestalt des Wurzelvocals zu erschließen, neben got. *qaírrus* steht lit. *gurùs* locker (Fick³ II. 548). Es ist daher die höchste Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß die übrigen adjectischen *u*-Stämme ebenfalls Oxytona gewesen sind. Ganz der Regel gemäß also got. *glaggwu-ba*, altn. *glǫggr*, ags. *gleáw*; altn. *snǫggr*, altschw. *stiugger* (Noreen, Altisl. Gr. § 334 Anm. 1). — got. *waddjus*, altn. *veggr* etc. hat nichts Vergleichbares zur Seite.

In folgenden zwei Worten ist der Accent nur nach anderen Analogieen zu erschließen:

8) got. *triggws*, altn. *tryggr* u. s. f.; gr. δρυόν · ἰσχυρόν, eine Hesychische Glosse die JSchmidt Anz. VI. 126 hervorgezogen hat, stimmt im Vocale nicht genau.

9) got. *skuggwa*, altn. *skuggi*, ahd. *scuuuo* (Kögel S. 541 f.): der Accent ist nur aus der Gestalt des Wurzelvocals geraten.

Ausgeschlossen habe ich krimgot. *ada*, altn. *egg*, ags. *ecg* (so richtig Kluge S. 130), weil ich die Grundform **aja-* mit gr. ᾠόν, lat. *ōvum*, ksl. *jaje* (alte Etymologie Pott's E. F. I¹. 122) nicht zu vereinigen weiß. Was aus **owia-* geworden wäre, lehrt got. *táui*, *tōjis*; was zu **ōwia-* ablautendes **awja-* ergeben hätte, lehrt got. *taujan*, *tawida*. Nach got. *jēr* : ὥρα ein **ēwia-* zu construieren und daraus **ēja-*, **ǎja-* entstehn zu lassen, wie neuerdings wieder Kögel tut (a. a. O. 510), davon halten mich folgende Gründe ab: 1) die wenig wiegende Analogie von got. *jēr* : gr. ὥρα; 2) die Tatsache, daß got. *skēwjan*, altn. *skáva* die Erhaltung der Lautgruppe *ēwj* bis in die Dialekte hinein beweist. — Sollte sich übrigens trotzdem der Zusammenhang zwischen ᾠόν, *ōvum*, *jaje* und altn. *egg* sicher stellen lassen, so ist Oxytonierung auch dieses Wortes durch JSchmidt (aaO.) erwiesen.

Als der Regel widerstreitend weiß ich nur got. *qius* : sskr. *jīvás*

anzuführen. Aber widerspricht dies auch wirklich? Es ist nicht zu übersehen, daß sskr. *jīvás*, lat. *vīvus*, altir. *bíu*, lit. *gyvas*, ksl. *živŭ* in der Länge des *i* übereinstimmen, die genau entsprechende gotische Bildung demnach **qeiws* zu lauten hätte. Das kurze *i* von *qius*, welches die übrigen Dialekte reflectieren (cf. ahd. *quek*), kann nur aus den obliquen Casus stammen, welche, je nach Lage des Accentes, das *w* verdoppeln oder nicht. Alte Flexion war wol: **qeiws*, **qiggwis*, **qiwammĕ*. Der Nominativ *qius* ist daher gar keine lautgesetzliche sondern eine Compromissbildung: die Kürze des Vocals stammt aus den obliquen Casus, das ungeschärfte *w* aus der echten Form **qeiws*.

got. *fijan* hat, wenn die Etymologie Aufrecht's, nach der got. *fijands* mit sskr. *pīyant-* übereinkommt (KZ. III. 203), das Richtige trifft, accentuiertes langes *i*.

II. Der Accut geht unmittelbar voraus.

1) got. *þreis* aus germ. **þrijiz* : sskr. *tráyas*, gr. *τρῆς*, *τρεῖς* aus **τρέϳες*.

2) got. *niun* aus **níwun* : sskr. *návan-*, gr. *ἐννέα*. Lediglich seiner Regel zu Liebe schreibt Kluge (S. 130 Note): „die germ. Betonung ist *nivún* gewesen".

3) got. *awi-str* (Bezzenberger KZ. XXII. 276 f.), altn. *ér* u. s. f.: sskr. *ávis*, gr. *ὄις*. — Kluge a. a. O. will die Betonung von lit. *avìs* oder einen Teil der obliquen Casus zu Hülfe rufen.

4) got. *awiliud*, altn. *ey-* in Eigennamen, ahd. *auui-* desgleichen: sskr. *ávis*, fördernd.

5) got. *usskawai sijaima* (*νήφωμεν*): gr. *θυσκόος*.

6) Die deutschen Stämme *trewa-*, *knewa-* beruhen auf der idg. Flexion **déru-*, **drévos*, *g'énu-*, *g'névos* (Saussure Mémoire 221): daher das germanische *w* ohne Verschärfung geblieben ist.

7) Die Nominative Pluralis der nominalen *i-* und *u*-Stämme, got. *gasteis* = ahd. *gesti*, got. *sunjus* = altn. *synir*, gehn von den Grundformen *-ijiz* und *-iwiz* aus (Saussure Mémoire 205).

8) Die deutschen Causativa betonen wie die indischen (Verner, KZ. XXIII. 120) : daher urgerm. **satljiði* ohne Verschärfung des *j*.

9) Nicht ganz sicher ist die Etymologie altn. *lé* (Sichel) : sskr. *láva-* (d. Schneiden, d. Abschnitt), vgl. Bugge KZ. XX. 10.

Eine sichere Ausnahme ist nur got. *þiwi*, da movierte Feminina die Endsilbe zu betonen pflegen (vgl. Sievers, Paul-Braune V. 149). Allein das Masculinum, runisch *þewaR*, ist doch wahrscheinlich Paroxytonon gewesen: vielleicht also, daß die Zusammengehörigkeit von *þíwaz* und *þiwī* die Wirkung des Lautgesetzes durchkreuzt hat.

Ich bin zu dem oben stehenden Versuche durch die jüngste Arbeit Ficks angeregt worden, welche zu erweisen bemüht ist, daß idg. *j* im Griechischen zwischen Vocalen ausfällt, wenn der alte Accent vorhergegangen, zu Iota wird, wenn der alte Accent gefolgt ist. Bewährt sich dies Gesetz, so liegt auf der Hand, daß die soeben betrachteten Erscheinungen mit den innerhalb des Griechischen wahrgenommenen in Verbindung stehn. Zugleich zeigt sich aber, daß Fick's Proportion: gr. **κνήϳειν* (*κνῆν*) : *κναίω* wie ahd. *sāju* : got. *saia* nur scheinbar richtig ist: ist sskr. *dhāya* = got. *daddja-*, so wäre für got. *saian* vielmehr **saddjan* zu erwarten. Demnach wird es bei der alten LMeyer'schen Erklärung von got. *saian* als **sējan* (Got. Spr. S. 697) sein Bewenden haben müssen.

Abgeschlossen am 30. VI. 85.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

December 1884.

(Fortsetzung).

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschappen. D. XXII. Afl. 1.
Tijdschrift vor indische taal- land- en volkenkunde. D. XXIX. Afl. 4. D. XXX. Afl. 1. 2.
Nature. Nr. 788. 789. 790. 791. 792.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XIX. Decbr.
Report of the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger. Zoology Vol. X.
Astronomisch-geodätische Bestimmungen, ausgeführt an einigen Hauptpunkten des bairischen Dreiecksnetzes. X. Supplementbd. zu den Annalen der münchener Sternwarte.
Nachträge zu den Zonenbeobachtungen der Sternwarte bei München. XIV. Supplementbd. zu den Annalen der münchener Sternwarte.
Meteorologische u. magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1882. 1883.
Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. N. F. Bd. XIX.
Archives néerlandaises des sciences exactes & naturelles. T. XIX. Livr. 3.
Natuurkundige Tijdschrift voor nederlandsch-Indië. D. XLIII.
Archives du musée Teyler. 2e sér. Vol. II. P. 1.
Nederlandsch tijdschrift voor de dierkunde. Jaarg. V. Afl. 1.
Bijdragen tot de dierkunde, uitg. door het Genootschap Natura artis magistra Afl. 10. D. 1.
10th annual report of the public library etc. committee. Borough of Swansea.
Leopoldina. Heft XX. Nr. 20. 22.
Aug. Nauck, Jamblichi de vita pythagorica liber. Petropoli 1884.
8ter Verwaltungsbericht der akademischen Lesehalle in Czernowitz.

Annales du Musée Gurmet. Revue de l'histoire des réligions. T. IX. Nr. 1. 2. 3.
Geologische Mittheilungen. Ztschr. der ungar. geologischen Gesellsch. K. XIV. F. 9—11.
Mémoires de l'academie des sciences, belles lettres & arts de Lyon. Cl. des sciences. Vol. XXVI.
Records of the geological survey of India. Vol. XVII. P. 4.
A. Kölliker, Kollmann's Acroblast. S. A.
Annual report of the curator of the museum of comparative zoology at Harvard's coll. 1883/4.
Transactions of the connecticut academy of arts and sciences. Vol. VI. P. 1.
Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausg. vom naturwissenschaftl. Verein in Hamburg. Bd. VIII. Heft 1—3.
Monthly notice of the roy. astronomical society. Vol. XLV. Nr. 1.
Proceedings of the London mathematical Society. Nr. 229. 230.
The London mathematical society. Novbr. 1884.
Bulletin de l'acad. roy. des sciences etc. de Belgique. 3e sér. T. VIII. Nr. 11.
Journal of the roy. microscopical society. Ser. II. Vol. IV. P. 6.
Anales de la sociedad cientifica Argentina. T. XVIII. Entr. 5.
Heinrich Kiepert, Lykia. Wien 1884 (Geschenk von Hrn. Benndorf).
Sveriges geologiska undersökning. Ser. Aa. Nr. 88. 91. Ser. Ab. Nr. 10. Ser. Ba. Nr. 4. Ser. C. Nr. 61—64. 66.
C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke, herausgg. v. d. k. preuß. Academie der Wissenschaften. Bd. III.
Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Bd. XII. Berl. 1884. (V. d. preuß. Academie).
Mémoires de l'académie imp. des sciences de Petersbourg. 7e sér. T. XXXII. Nr. 4—12.
Graf D. A. Tolstoi, ein Blick auf das Unterrichtswesen Rußlands im XVIII. Jahrh. A. d. Russ. von P. v. Kügelgen. St. Petersburg 1884.
Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen im Vogtlande. 1—3. Jahresschr.
Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch Indie. 4e Volgr. D. IX.
Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1884. P. 2 (in duplo).
L. Delisle, notice sur un manuscrit de l'abbaye de Luxeuil. S. A. aus Notices et extraits des manuscrits de la biblioth. nationale. T. XXXI.
Ders., le plus ancien manuscrit du miroir de St. Augustin. S. A. aus Bibliothèque de l'école des cartes. T. XLV.
Appendix to the memoir Nr. 5 of Tôkiô University. Tôkiô 1884.
Sitzungsberichte der philosophisch-philolog. u. histor. Classe der k. bair. Academie d. Wissensch. 1884. Heft 4.

Januar 1885.

Annales de l'école polytecnique de Delft. 1e Livraison.
Kongliga svenska vetenskaps-akademiens Handlingar. Bd. XVIII. XIX, 1. 2.
Observations météorologiques suédoises publiées par l'academie roy. des sciences de Suède. 1878. 1879.
Bihang till kongl. svenska vetenskaps-akademiens handlingar. Bd. VI—VIII.
Oefversigt af kongl. ventenskaps-academiens förhandlingar. Aarg. 1881—83.
Lefnadsteekningar öfver kongl. svenska vetenskaps-akademiens efer år 1854 afledna ledamöter. Bd. II. Heft 2.
Kongl. svenska vetenskaps akademien. (Mitgliederverzeichniss. 1880. 1882—84).
Nature Nr. 793. 794. 795. 796.
Atti della r. accademia dei lincei. 3e ser. Transunti. Vol. VIII. Fasc. 16.
Report of the superintendent of the united states naval observatory for 1884.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

29. Juli. **№ 7.** 1885

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs $18^{85}/_{86}$.

Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 15. März.

Theologie.

Einleitung in das Alte Testament: Prof. *Duhm* vierstündig um 4 Uhr.

Erklärung der Genesis: *Derselbe* fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung des Propheten Jesaia: Prof. *Schultz* fünfstündig um 11 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Bertheau* fünfstündig um 10 Uhr; Prof. *de Lagarde* fünfmal um 3 Uhr.

Leben, Schriften und Lehre des Apostels Paulus: Prof. *Knoke* Montag und Donnerstag um 3 Uhr.

Neutestamentliche Theologie: Prof. *Wiesinger* viermal um 11 Uhr.

Geschichte des neutestamentlichen Kanons: Lic. *Bornemann* Mittwochs 3 Uhr unentgeltlich.

Erklärung der synoptischen Evangelien: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Briefs des Paulus an die Römer: Prof. *Ritschl* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der Briefe Pauli an die Korinther: Prof. *Lünemann* fünfstündig um 9 Uhr.

Kirchengeschichte I. Theil: Prof. *Wagenmann* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des Mittelalters: Prof. *Reuter* fünfmal um 8 Uhr, Sonnabend um 9 Uhr.

Kirchengeschichte des XIX. Jahrhunderts: Prof. *Wagenmann* dreimal um 5 Uhr.

Christliche Dogmengeschichte: Lic. *Bornemann* sechsstündig, fünfmal um 12 Uhr, Sonnabends nach Verabredung.

Symbolik: Prof. *Reuter* fünfstündig um 11 Uhr.

Dogmatik Theil I: Prof. *Schultz* fünfstündig um 12 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Ritschl* fünfstündig um 10 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Knoke* fünfstündig um 12 Uhr.

Kirchenrecht siehe unter *Rechtswissenschaft* S. 243.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Bertheau* Montags um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Dienstags um 6 Uhr; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Reuter* Donnerstags um 6 Uhr; die dogmatischen Prof. *Ritschl* Freitags um 6 Uhr.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich; die Uebungen des liturgischen Seminars leitet Prof. *Knoke* Sonnabends um 9 und um 11 Uhr; die Uebungen des katechetischen Seminars Prof. *Wiesinger* Mittwoch von 2—3 Uhr, Prof. *Knoke* Sonnabends von 2—3 Uhr öffentlich.

Eine historisch-theologische Societät hält Prof. *Wagenmann;* eine patristische Societät Lic. *Bornemann* in zu verabredenden Stunden.

Rechtswissenschaft.

Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Regelsberger*, Montag, Mittwoch und Freitag von 11—12 Uhr.

Institutionen des römischen Privatrechts: Prof. *Merkel* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Pandekten I. Theil mit Ausschluß des Sachenrechts: Prof. *Regelsberger* täglich von 10—11 Uhr und Dienstag, Donnerstag und Sonnabend von 11—12 Uhr.

Römisches Sachenrecht: Prof. *v. Jhering* viermal wöchentlich von 12—1 Uhr.

Pandekten II. Theil (Familien- und Erbrecht): Prof. *Merkel* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 9—10 Uhr.

Römisches Erbrecht: Prof. *Wolff* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Geschichte des Römischen Civilprocesses: Prof. *Merkel* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Digesten-Exegeticum: Prof. *Merkel* Montag von 4—6 Uhr.

Deutsche Rechtsgeschichte: Prof. *Schröder* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Deutsches Privatrecht: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Handels-, See- und Wechselrecht: Prof. *Schröder* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Landwirthschaftsrecht: Prof. *Ziebarth* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 3—4 Uhr.

Strafrecht: Prof. *John* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Deutsches Reichs- und Landesstaatsrecht: Prof. *Dove* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Deutsches Verwaltungsrecht: Prof. *Frensdorff* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *v. Bar* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Kirchenrecht einschließlich des Eherechts: Prof. *Dove* täglich von 8—9 Uhr.

Civilproceß: Prof. *v. Bar* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Strafproceß: Prof. *Ziebarth* fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Praktische Uebungen im Civilrecht: Prof. *Regelsberger* Donnerstag von 4—6 Uhr.

Handelsrechtliches Prakticum: Prof. *Schröder* Mittwoch von 4—6 Uhr.

Criminalistische Uebungen: Prof. *v. Bar* Freitag von 4—6 Uhr.

Civilproceß-Prakticum: Prof. *John* Dienstag von 4—6 Uhr.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie, siehe unter *Naturwissenschaften.*

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Fr. Merkel* Montag, Mittwoch, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Osteologie nebst Mechanik der Gelenke trägt Prof. *Krause* in zu verabredenden Stunden vor.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. *Fr. Merkel* tägl. von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Fr. Merkel* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Präparirübungen: Prof. *Fr. Merkel* in Verbindung mit Prosector Dr. *Schiefferdecker* täglich von 9—4 Uhr.

Specielle Histologie trägt Prof. *Krause* in zu verabredenden Stunden vor.

Allgemeine Histologie trägt Prof. *Krause* Donnerstag um 2 Uhr oder zu anderer passender Stunde öffentlich vor.

Mikroskopische Uebungen in allgemeiner Anatomie für Anfänger: Dr. *Schiefferdecker* vier Mal wöchentlich.

Mikroskopische Anatomie der Organe: Dr. *Schiefferdecker* vier Mal wöchentlich für Geübtere.

Mikroskopische Uebungen in der normalen Histologie hält Prof. *Krause* dreimal wöchentlich um 2 Uhr.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Medicinisch-chemisches Prakticum leitet Prof. *Flügge* sechsstündig in 2 Abtheilungen für Anfänger und Geübtere.

Bacteriologische Curse und Arbeiten im Institut für medicinische Chemie und Hygiene leitet Prof. *Flügge* täglich in passenden Stunden.

Arbeiten im physiologischen Institute leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Aetiologie trägt Prof. *Orth* Donnerstag von 6—7 Uhr öffentlich vor.

Ueber allgemeine Pathologie trägt Prof. *Orth* Dienstag bis Freitag von 12—1 Uhr vor.

Demonstrativen Cursus der pathologischen Anatomie hält Prof. *Orth* privatissime Mittwoch und Sonnabend von 2—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen in der pathologischen Histologie finden Dienstag und Freitag von 6—8 Uhr statt.

Physikalische Diagnostik lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr. Dasselbe in Verbindung mit praktischen Uebungen trägt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Uebungen in der Untersuchung des Harns hält Prof. *Damsch* Mittwoch von 4—5 Uhr.

Elektrotherapie mit Demonstrationen u. Uebungen am Krankenbett lehrt Prof. *Damsch* Montag u. Donnerstag von 6—7 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Montag, Dienstag, Freitag von 6—7 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 2—3 Uhr vor.

Specielle Toxikologie II. Theil verbunden mit Experimenten: Prof. *Marmé* für ältere Mediciner Montag und Donnerstag von 2—3 Uhr.

Ueber die thierischen und Fäulniß-Gifte trägt Prof. *Husemann* Mittwoch von 3—4 Uhr öffentlich vor.

Giftige Verfälschungen der Nahrungsmittel demonstrirt Prof. *Marmé* Donnerstag von 6—7 Uhr öffentlich.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Marmé* viermal wöchentlich Montag bis Donnerstag von 8—9 Uhr.

Pharmakognostisch-mikroskopische Uebungen für Vorgeschrittenere hält Prof. *Marmé* Sonnabend von 9—11 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie 2. Hälfte: Prof. *Ebstein* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Ebstein* fünfmal wöchentlich von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr.

Poliklinische Referatsstunde hält Prof. *Damsch* einmal wöchentlich.

Specielle Chirurgie lehrt Prof. *König* viermal wöchentlich in noch zu verabredenden Stunden; Dasselbe Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Ein Examinatorium über Chirurgie hält Prof. *König* einmal in der Woche öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Sechswöchentliche Repetitorien der speciellen Chirurgie veranstaltet wöchentlich Abends von 7—8 Uhr Prof. *Rosenbach*.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen trägt Prof. *Rosenbach* viermal wöchentlich in passenden Stunden vor.

Die chirurgische Klinik leitet Prof. *König* von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr täglich außer Sonnabend.

Chirurgische Poliklinik wird öffentlich Sonnabend von $10^3/_4$—12 Uhr von Prof. *König* und Prof. *Rosenbach* gemeinschaftlich gehalten.

Ueber Luxationen und Fracturen liest zweimal wöchentlich von 4—5 Uhr Dr. *W. Müller*.

Einen Verbandcursus hält Dr. *W. Müller* zweimal wöchentlich in passenden Stunden.

Instrumentenlehre behandelt einmal öffentlich Dr. *W. Müller.*

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Deutschmann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber die praktisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Einschluß der Anatomie des Ohrs und mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Ueber Taubstummheit liest Prof. *Bürkner* einmal wöchentlich, öffentlich, zu gelegener Stunde.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) an zwei noch zu bestimmenden Tagen von 12—1 Uhr.

Geburtskunde trägt Dr. *Droysen* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Pathologie des Wochenbetts lehrt Prof. *Schwartz* wöchentlich einmal zu gelegener Zeit.

Gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 8 Uhr.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit systematischen Vorträgen über Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Forensische Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen an Geisteskranken lehrt Prof. *Meyer* in wöchentlich zwei zu verabredenden Stunden.

Hygiene I. Theil mit Experimenten und Excursionen: Prof. *Flügge* Dienstag, Mittwoch und Freitag von 5—6 Uhr.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere, so wie Seuchenlehre trägt Prof. *Esser* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale hält Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Baumann*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Geschichte der Philosophie von Cartesius bis zur Gegenwart: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Ueber die Philosophie Platons: Prof. *Peipers*, Mittwoch 12 Uhr öffentlich.

Logik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr.

Logik: Prof. *Rehnisch*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

In einer psycholog. Societät wird Prof. *G. E. Müller* ausgewählte Kapitel der Psychologie behandeln: Mittwoch 4 Uhr, öffentlich.

Philosophische Uebungen: Prof. *Rehnisch*, öffentlich.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Montag und Donnerstag 11 Uhr, öffentlich.

Mathematik und Astronomie.

Algebraische Analysis: Dr. *Hölder*, Mont., Dienst., Donnerst. 12 Uhr.

Analytische Geometrie: Dr. *Schönflies*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Anwendungen der Differentialrechnung auf die Geometrie: Dr. *Schönflies*, Mittw. u. Sonnabend 9 Uhr.

Integralrechnung mit Uebungen: Prof. *Schwarz*, fünfmal, 11 Uhr.

Einleitung in die analytische Mechanik: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Freitag, 4 Uhr.

Partielle Differentialgleichungen mit Anwendungen auf physikalische Probleme: Dr. *Hugo Meyer*, Dienst. und Donnerst. 12 Uhr.

Anwendungen der elliptischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 9 Uhr.

Theorie der elliptischen Funktionen und Einleitung in die Theorie der Abelschen Funktionen: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Freitag, 5 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leiten mathematische Uebungen Prof. *Schering*, Montag 3 Uhr, und Prof. *Schwarz*, Mittwoch 12 Uhr. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 249.

Magnetische Beobachtungen im Gauss-Observatorium leitet Prof. *Schering* Donnerstag Nachm., privatissime, unentgeltlich.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* wie bisher privatissime, unentgeltlich, einmal zweiwöchentlich leiten.

Naturwissenschaften.

Embryologie und vergleichende Anatomie: Prof. *Ehlers*, Montag bis Freitag 10 Uhr.

Ueber Kunstfertigkeiten und Lebensgewohnheiten der Thiere: Prof. *Ehlers*, Montag und Dienstag 6 Uhr.

Die Parasiten des Menschen, mit Demonstrationen am Skioptikon: Dr. *Hamann*, Donnerstag und Freitag 6 Uhr.

Das Wandern der Thiere in Vergangenheit und Gegenwart: Dr. *Hamann*, Mittwoch 5 Uhr, unentgeltlich.

Zoologischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. und Mittw. 11—1 Uhr.

Zoologische Uebungen wird Prof. *Ehlers* täglich mit Ausnahme des Sonnabend von 10—1 Uhr anstellen.

Zoologische Societät: Prof. *Ehlers*.

Anatomie der Pflanzen: Prof. *Berthold*, Dienst. u. Freit. 12 Uhr.

Ueber Thallophyten (Algen und Pilze): Prof. *Graf zu Solms*, Dienstag und Donnerstag 4 Uhr.

Ueber Archegoniaten und Gymnospermen (Moose, Farne und Nadelhölzer): Prof. *Falkenberg*, Dienstag und Donnerstag 6 Uhr.

Palāophytologie: Prof. *Graf zu Solms*, Sonnabends 10—12 Uhr, öffentl.

Die Vegetation des Meeres: Prof. *Falkenberg*, Mittw. 6 Uhr, öffentl.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Berthold*, Sonnabend von 9—1 Uhr (für Pharmaceuten zweistündig).

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Anleitung zu selbstständigen Arbeiten im Laboratorium des botanischen Gartens, wesentlich für Vorgeschrittene: Prof. *Graf zu Solms*, privatissime, in zu bestimmenden Stunden.

Uebungen einer botanischen Societät: Prof. *Berthold*, in später festzusetzender Stunde, öffentlich.

Repetitorium der allgemeinen Botanik: Dr. *Arthur Meyer*, Mittwoch und Donnerstag 12 Uhr.

Mineralogie: Prof. *Klein*, 6 Stunden, 11 Uhr.

Geologie: Prof. *von Koenen*, Dienstag bis Sonnabend, 8 Uhr.

Ueber einzelne Klassen von Fossilien: Prof. *von Koenen*, eine Stunde, öffentlich.

Mineralogische Uebungen: Prof. *Klein*, Freitag, 2—4 Uhr, öffentlich.

Krystallographische Uebungen: Prof. *Klein*, privatissime, aber unentgeltlich, in zu bestimmenden Stunden.

Paläontologische und geologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, unentgeltlich.

Theorie des Galvanismus: Prof. *Voigt*, Mont. bis Freit. 10 Uhr.

Experimentalphysik, zweiter Theil: Magnetismus, Elektricität und Wärme: Prof. *Riecke*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Dynamische Meteorologie: Dr. *Hugo Meyer*, unentgeltlich.

Die Uebungen im physikalischen Institute leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Meyer*, Dr. *Krüger* und Kandid. *Hennig*, für Mathematiker: Dienst., Donnerst., Freit. 2—4 Uhr; für Pharmaceuten und Chemiker: Sonnabend 9—1 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar behandelt ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik Prof. *Riecke*, Mont. 2 Uhr, ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik Prof. *Voigt*, Sonnabend 10 Uhr. Vgl. *Mathematik und Astronomie* S. 247.

Allgemeine Chemie (unorganische Experimentalchemie): Prof. *V. Meyer*, sechs Stunden, 9 Uhr.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen: Dr. *Buchka*, Montag, Mittwoch, Donnerstag und Sonnabend, 12 Uhr.

Chemie der Benzolverbindungen, I. Theil: Dr. *Leuckart*, Dienstag und Freitag 12 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Analytische Chemie II. Theil (Quantitativer Theil): Dr. *Buchka*, Freitag und Sonnabend 8 Uhr.

Chemie der Metalle mit besonderer Berücksichtigung der Technik und Metallurgie: Dr. *Jannasch*, Montag, Dienstag, Mittwoch 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (organischer Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Gerichtlich-chemische Analyse: Prof. *Polstorff*, Freitag und Sonnabend 8 Uhr.

Technische Chemie für Landwirthe (Zuckerfabrikation, Gährungsindustrien, Molkerei etc.): Prof. *Tollens*, Mont., Dienst., Mittw., 10 Uhr.

Ueber Zuckeruntersuchungsmethoden, besonders Polarisation: Prof. *Tollens*, Donnerstag 6 Uhr, öffentlich.

Titrirmethoden: Dr. *Pfeiffer*, 1 Stunde, unengeltlich.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akadem. Laboratorium leitet Prof. *V. Meyer* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *Polstorff*, Dr. *Jannasch*, Dr. *Buchka* u. Dr. *Leuckart*,

und zwar: 1) Vollpracticum, Mont. bis Freit., von 8 bis 12 und von 2½ bis 5 Uhr; 2) Halbpracticum, je Vor- oder Nachmittags, täglich außer Sonnabends; 3) Chemisches Anfängerpracticum für Mediciner.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im chemischen Laboratorium (Stumpfebiel II) täglich (mit Ausschluß des Sonnab.) 8—12 und 2—4 Uhr.

Pharmacie lehrt Prof. *Boedeker* in fünf Stunden um 9 Uhr. Dasselbe lehrt Prof. *von Uslar* viermal wöchentlich um 3 Uhr.

Prof. *Tollens* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *Bauer*, Montag bis Freitag von 8—12 und von 2—4 Uhr.

Uebungen in der Maaßanalyse: Dr. *Pfeiffer*, Sonnabend 9—1 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Cursus in der griechischen Palaeographie: Prof. *Steindorff*, Dienstag 10—12 Uhr.

Anleitung zur Kritik der deutschen Kaiserurkunden: Prof. *Steindorff*, Donnerstag 10—12 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Griechische Geschichte bis zur Zeit des Perikles: Prof. *Volquardsen*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr.

Römische Verfassungsgeschichte: Prof. *Gilbert*, 2 Stunden, 5 Uhr.

Geschichte der Völkerwanderung und der germanischen Staatengründungen: Dr. *von Kap-herr*, 3 Stunden.

Geschichte des fränkischen Reichs, vornemlich unter den Karolingern: Prof. *Steindorff*, Mittwoch und Sonnabend 12 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte der Germanischen und Romanischen Völker von der Reformation bis zur Gegenwart: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Geschichte des Zeitalters der französischen Revolution und des ersten Kaiserreichs 1789—1815: Prof. *Kluckhohn*, viermal, 4 Uhr.

Geschichte Italiens im Mittelalter: Assessor Dr. *Wüstenfeld*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag, 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *Weiland*, Freit., 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen: Prof. *Kluckhohn*, Mittw., 6—8 Uhr öffentl.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 242.

Erd- und Völkerkunde.

Allgemeine Erdkunde I: Prof. *Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Entdeckungsgeschichte Afrika's: Prof. *Wagner*, Mittw. 6 Uhr, öffentl.

Geographische Uebungen: Prof. *Wagner*, Sonnabend 10—12 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Staatswissenschaft.

Nationalökonomie, grundlegender Theil, als Einleitung in das Studium der Staatswissenschaften: Prof. *Cohn*, vier Stunden 4 Uhr.

Volkswirthschaftspolitik (praktische Nationalökonomie): Prof. *Eggert*, vier Stunden, Montag und Donnerstag 5—7 Uhr.

Finanzwissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf das deutsche und preußische Steuerwesen: Prof. *Cohn*, 4 Stunden 5 Uhr.

Socialpolitische Theorien der Neuzeit: Prof. *Eggert*, Freitag 6—7 Uhr, öffentlich.

Staatswissenschaftliches Seminar: Prof. *Cohn*, Montag Abend 7—9 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Volkswirthschaftliche Uebungen: Prof. *Soetbeer*, privatissime, unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Landwirthschaft.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 Stunde, öffentlich.

Allgemeine Ackerbaulehre: Prof. *Drechsler*, 2 Stunden, 12 Uhr.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 11 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes, Schweines u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittwoch 5—7 Uhr, öffentlich.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Drechsler*, vier St., 12 Uhr.

Die Lehre vom Futter (I. Theil der landwirthschaftlichen Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Montag, Dienstag, Mittwoch, 11 Uhr.

Allgemeine Düngerlehre: Dr. *Kern.*

Landwirthschaftliches Praktikum: Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler* (Uebungen im landw. Laboratorium, Freit. und Sonnab. 9—1 Uhr; Uebungen in landw. Berechnungen, Dienst. und Donnerst. 6 Uhr); Excursionen und Demonstrationen, Mittw. Nachmittag.

Techn. Chemie und praktisch-chemische Uebungen für Landwirthe vgl. *Naturwissenschaften* S. 9. 10.

Anatomie, Physiologie und Pathologie der Hausthiere vgl. *Medicin* S. 246.

Landwirthschaftsrecht: s. *Rechtswissenschaft* S. 243.

Literär- und Kunstgeschichte.

Geschichte der griechischen Poesie (mit Ausschluß des Drama's) bis auf Alexander: Prof. *Dilthey*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Uebersicht der grammatischen Litteratur der Griechen und Römer: Prof. *von Willamowitz-Moellendorff*, vier Stunden, 3 Uhr.

Ueber das angelsächsische Volksepos (Einleitung zum Beówulf): Dr. *Schröder*, Dienstag und Freitag 9 Uhr.

Ueber deutsche Literatur des 16. Jahrh. liest Prof. *Goedeke*, Montags 5 Uhr, öffentlich.

Geschichte der deutschen Literatur im 18. Jahrh.: Dr. *Schröder*, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Geschichte der französischen Literatur im 13. 14. 15. Jahrh.: Prof. *Vollmöller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Molière's Leben und Werke nebst Erklärung des Misanthrope: Dr. *Andresen*, Dienstag und Freitag 8 Uhr.

Rom im Zeitalter der Renaissance: Prof. *Schmarsow*, 3 Stunden.

Ueber Michelangelo: Prof. *Schmarsow*, Donnerstag, 6 Uhr, öffentl.

Kunsthistorische Uebungen: Prof. *Schmarsow*, 2 Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Alterthumskunde.

Geschichte der griechischen Religionen und Erklärung der Göttersymbole: Prof. *Wieseler*, drei Stunden, 2—3 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* ausgewählte Bildwerke zur Erklärung vorlegen, Sonnabend 12 Uhr, und die auf Dionysos und seinen Dienst bezüglichen Bildwerke erläutern, Mittw. 12 Uhr, öffentlich. — Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Deutsche Heldensage: s. *Deutsche Sprache* S. 254.

Vergleichende Sprachlehre.

Bildung des Verbs und des Nomens in den indogermanischen Sprachen: Prof. *Fick*, 2 Stunden, 9 Uhr, öffentlich.

Grammatische Gesellschaft: Prof. *Fick*, 2 Stunden, privatissime.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. unter *Theologie* S. 242.

Arabische Grammatik: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Die Syrische Sprache lehrt Prof. *Bertheau*, Dienstag und Freitag 2 Uhr.

Syrische oder arabische Lektüre zu noch zu bestimmender Zeit: Prof. *de Lagarde*, öffentlich.

Grammatik der Sanskrit-Sprache und Erklärung des Panchatantra: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch und Sonnabend, 9 Uhr.

Erklärung schwieriger Sanskrittexte: Prof. *Kielhorn*, Mittwoch, Sonnabend, 10 Uhr.

Patanjali's Mahâbhâshya (Einleitung) oder Indische Inschriften: Prof. *Kielhorn*, 2 Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Hermeneutik und Kritik: Prof. *Sauppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Griechische Grammatik: Prof. *Bechtel*, in 4 passenden Stunden.

Ueber den Dialekt und die Abfassung der hesiodischen Gedichte: Prof. *Fick*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Erklärung der Gedichte des Pindaros: Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, 4 Stunden, 10 Uhr.

Aristophanes Frösche erklärt Prof. *von Leutsch*, Mittwoch und Sonnabend 12 Uhr.

Geschichte der griechischen Poesie: s. *Literär- und Kunstgeschichte* S. 252.

Die Philosophie Platons: s. *Philosophie* S. 247.

Die grammatische Literatur der Griechen und Römer: s. *Literärgeschichte* S. 252.

Ausgewählte Gedichte des Horatius, in chronologischer Folge: Prof. *Sauppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 4 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 11 Uhr; läßt die Hymnen des Kallimachos erklären Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Montag und Donnerstag, 11 Uhr; läßt Ciceros Orator erklären Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentl.

Im K. philologischen Proseminar wird Prof. *Dilthey* die Ovidischen Heroiden interpretiren lassen, sowie die Disputationen über die Arbeiten der Mitglieder leiten, Mittw. und Sonnab. 10 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Angelsächsische Grammatik: Prof. *Bechtel*, Mittw. u. Sonnab. 9 Uhr, unentgeltlich.

Formenlehre des Neuhochdeutschen auf historischer Grundlage: Prof. *Heyne*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Alt- und Mittelhochdeutsche Metrik: Prof. *Heyne*, 2 Stunden, 12 Uhr.

Das Nibelungenlied mit einer Einleitung über die deutsche Heldensage: Prof. *W. Müller*, vier Stunden, 3 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *W. Müller*, Dienstag 6 Uhr.

Altdeutsche Uebungen: Prof. *Heyne*, 1 Stunde, privatissime, unentgeltlich.

Textkritische Uebungen: Dr. *Schröder*, 1 Stunde.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte* S. 252.

Neuere Sprachen.

Angelsächsisches Volksepos: s. *Literärgeschichte* S. 252.

Französische Lautlehre: Prof. *Vollmöller*, Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte der französischen Literatur: s. *Literär- und Kunstgeschichte* S. 252.

Molière's Leben und Werke: s. *Literärgeschichte* S. 252.

Schillers Geschichte des dreißigjährigen Krieges: (Donnerstag 8 Uhr) und Exercices de style et de composition, (Freitag 8 Uhr); Grammatische Uebungen. — Lectüre u. Recitation: Lector *Kœune*.

Im Seminar für neuere Sprachen leitet Prof. *Vollmöller* Uebungen Mittw. 6 Uhr, leitet grammatische Uebungen Dr. *Andresen*, Montag 6 Uhr.

Der neu zu berufende Professor für englische Philologie wird seine Vorlesungen später anzeigen.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ. Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Vormittags v. 8—12 u. Nachm. (außer Sonnab.) v. 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* ist Dienstags von 2—4 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-palaeontologische Schausammlung* sind im Winterhalbjahr bis zum 1. December Sonnabends von 1 bis 2 Uhr dem Publikum geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, der *Biblio-*

thek des k. mathematisch-physikalischen Seminars, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Bartels* (Kleperweg 2), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. September. **№ 8.** 1885.

LIBRARY OF THE MUSEUM OF COMPARATIVE ZOOLOGY AT HARVARD COLLEGE

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 6. Juni 1885.

Ueber eine Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung, von welcher in der Theorie der elliptischen Functionen die Theilung der Perioden abhängt.

Von

L. Kiepert in Hannover, Corresp.

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften beehre ich mich, im Nachfolgenden einen Auszug aus einer von mir ausgeführten Untersuchung mitzutheilen, welche sich im Anschlusse an früher von mir veröffentlichte Abhandlungen über die Transformation der elliptischen Functionen[1]) mit der Theilung der Perioden und mit der Bildung einer Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung beschäftigt, von welcher diese Periodentheilung abhängt.

Ich werde mich dabei möglichst der Bezeichnungen bedienen, welche Herr H. A. Schwarz in den »Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Weierstrass« benutzt hat.

Der Kürze wegen werde ich in diesem Auszuge umfangreichere

1) Vergl. Crelle's Journal, Bd. 87, S. 199–216, Bd. 88, S. 205–212 und Bd. 95, S. 218–231. Diese drei Abhandlungen sollen in dem Folgenden der Kürze wegen nur durch Abh. 1, Abh. 2, Abh. 3 citirt werden.

No 10

Rechnungen und Literatur-Angaben fortlassen und verweise in dieser Beziehung auf meine demnächst erscheinende Abhandlung.

Abschnitt I.

Eigenschaften der speciellen Theilungsgleichung.

Sind n, λ, μ, α, β beliebige ganze Zahlen, und bezeichnet man der Kürze wegen die Größe $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$ mit $\wp_{\lambda,\mu}$, so ist

$$\wp_{\lambda+\alpha n,\, \mu+\beta n} = \wp_{\lambda,\mu}.$$

Um alle verschiedenen Werthe zu erhalten, welche $\wp_{\lambda,\mu}$ für denselben Werth von n annehmen kann, braucht man daher den Zahlen λ und μ nur die Werthe $0, 1, 2 \ldots n-1$ zu geben, wobei aber λ und μ nicht gleichzeitig gleich 0 sein sollen. Von diesen n^2-1 Größen $\wp_{\lambda,\mu}$ werden nun, wenn $n = 2m+1$ ist, noch je zwei einander gleich, weil

$$\wp_{\lambda,\mu} = \wp_{\lambda',\mu'}, \text{ wenn } \lambda+\lambda' \equiv \mu+\mu' \equiv 0 \pmod{n}.$$

Dasselbe gilt, wenn $n = 2m+2$ ist, nur sind hierbei die Größen $\wp\omega$, $\wp\omega'$, $\wp(\omega+\omega')$, welche einzeln auftreten, abzusondern. Es bleiben also bez. $\frac{1}{2}(n^2-1) = 2m(m+1)$, oder $\frac{1}{2}(n^2-4) = 2m(m+2)$ Größen $\wp_{\lambda,\mu}$ übrig, durch welche »das vollständige System der zur Zahl n gehörenden Theilwerthe der Function $\wp u$« definirt werden möge.

Setzt man nun

$$\wp u = s \text{ und } \psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2} u},$$

so wird

$$(1.)\quad \begin{cases} \psi_{2m+1}(u) = (2m+1)\prod(\wp u - \wp_{\lambda,\mu}) = (2m+1)\prod_{2m+1}(s), \\ \psi_{2m+2}(u) = -(m+1)\wp' u \prod(\wp u - \wp_{\lambda,\mu}) = -(m+1)\prod_{2m+2}(s), \end{cases}$$

wobei sich das Product über das vollständige System der Theilwerthe $\wp_{\lambda,\mu}$ erstreckt.

Die Gleichung

$$(2.)\qquad \prod_n(s) = 0$$

soll nun »die specielle Theilungsgleichung« heißen. Da außerdem [1])

---

1) Vergl. meine Abhandlung: Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen (Crelle's Journal, Bd. 76, S. 21—33).

$$(3.)\qquad \psi_n(u) = \frac{(-1)^{n-1}}{[1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!]^3}\begin{vmatrix} \wp'u & \wp''u & \ldots & \wp^{(n-1)}u \\ \wp''u & \wp'''u & \ldots & \wp^{(n)}u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)}u & \wp^{(n)}u & \ldots & \wp^{(2n-3)}u \end{vmatrix}$$

ist, so gelten die Sätze:

I. Die Coefficienten der speciellen Theilungsgleichung sind ganze rationale Functionen von g_2 und g_3.

II. Jede (ganze) symmetrische Function der zur Zahl n gehörenden Theilwerthe der Function $\wp u$, welche das vollständige System derselben bilden, ist eine (ganze) rationale Function von g_2 und g_3.

Ist jetzt $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo a, b, c, ... von einander verschiedene Primzahlen sind, so ist $\Pi_n(s)$ ohne Rest durch $\Pi_{\frac{n}{a}}(s)$ theilbar. Deshalb kann man von $\Pi_n(s)$ alle Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu} = s - \wp_{\lambda,\mu}$ absondern, bei denen λ und μ beide durch a theilbar sind. Ebenso kann man dann noch weiter die Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ absondern, bei denen λ und μ beide durch b, nicht aber beide durch a theilbar sind. Indem man so fortfährt, behält man schließlich nur noch das Product derjenigen Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ übrig, bei denen die Zahlen λ, μ, n keinen Factor besitzen, der allen dreien gemeinsam ist. Setzt man dieses Product gleich 0, so erhält man »die reducirte Theilungsgleichung«, deren Wurzeln $\wp_{\lambda,\mu}$ »das reducirte System der zur Zahl n gehörenden Theilwerthe der Function $\wp u$« ausmachen.

Es sei nun, wie gewöhnlich,

$$(4.)\qquad \begin{cases} \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots, \\ T(n) = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ldots, \end{cases}$$

so ist die Anzahl der das reducirte System bildenden Theilwerthe $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$, wenn n von 2 verschieden ist.

Aus der Bildung der reducirten Theilungsgleichung ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

III. Die Coefficienten der reducirten Theilungsgleichung sind ganze rationale Functionen von g_2 und g_3.

IV. Jede (ganze) symmetrische Function derjenigen zur Zahl n gehörenden Theilwerthe der Function $\wp u$, welche das reducirte System bilden, ist eine (ganze) rationale Function von g_2 und g_3.

Durch diese Sätze wird es möglich, Resolventen der reducirten Theilungsgleichung zu bilden.

Gehört nämlich

$$\wp(w_{\lambda,\mu}) = \wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right) = \wp_{\lambda,\mu}$$

zu den das reducirte System bildenden Theilwerthen, und ist k relativ prim zu n, so haben die Größen

$$\wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \quad \ldots \wp(k^{x-1} w_{\lambda,\mu})$$

dieselbe Eigenschaft. Nun sei x die kleinste Zahl, für welche

$$k^x \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

wird, und es sei $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function der Größen

$$\wp(w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \quad \ldots \wp(k^{x-1} w_{\lambda,\mu}),$$

dann wird

$$\wp(k^x w_{\lambda,\mu}) = \wp(w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^{x+1} w_{\lambda,\mu}) = \wp(kw_{\lambda,\mu}), \ldots$$

und deshalb

$$C_{\lambda,\mu} = F(\wp(w_{\lambda,\mu})) = F(\wp(kw_{\lambda,\mu})) = \cdots = F(\wp(k^{x-1} w_{\lambda,\mu})),$$

wo $F(\wp)$ eine rationale Function von $\wp$, g_2, g_3 bezeichnet.

Ist $\wp_{\lambda',\mu'} = \wp(w_{\lambda',\mu'})$ von den Größen

$$\wp(w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \ldots, \wp(k^{x-1} w_{\lambda,\mu})$$

verschieden, so findet man jetzt ebenso

$$C_{\lambda',\mu'} = F(\wp(w_{\lambda',\mu'})) = F(\wp(kw_{\lambda',\mu'})) = \cdots = F(\wp(k^{x-1} w_{\lambda',\mu'}))$$

und kann so fortfahren, bis die sämmtlichen das reducirte System bildenden Theilwerthe erschöpft sind.

Da ähnliche Schlüsse auf $C_{\lambda,\mu}^r$ Anwendung finden, wo r eine beliebige ganze Zahl ist, so gilt der Satz:

V. Ist $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function der Größen

$$\wp(w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \ldots \wp(k^{x-1} w_{\lambda,\mu}),$$

so wird $C_{\lambda,\mu}$ die Wurzel einer Gleichung N^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Dabei ist

$$xN = \tfrac{1}{2}\varphi(n)\, T(n).$$

Auch hier ist der Fall $n = 2$ ausgeschlossen.

Den verschiedenen Werthen, welche x haben kann, entsprechen aber auch Resolventen von verschiedenem Grade.

Abschnitt II.

Einführung der Größe $f\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$ und ihre Bedeutung für die Transformation der elliptischen Functionen.

Die angegebenen Sätze finden unter Anderem ihre Anwendung bei der Transformation der elliptischen Functionen.

Das Periodenpaar

$$2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\tilde{\omega}' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

sei dem Periodenpaare 2ω, $2\omega'$ äquivalent, d. h. es sei

$$pq' - p'q = +1,$$

dann ist

$$\sigma(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \sigma(u|\omega, \omega'), \qquad \wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \wp(u|\omega, \omega').$$

Auch die Invarianten g_2, g_3 ändern sich nicht, wenn das primitive Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ mit dem äquivalenten Periodenpaare $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ vertauscht wird.

Ist dagegen

$$2\omega_1 = 2\lambda\omega + 2\mu\omega', \qquad 2\omega_1' = 2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'$$

und

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = n > 1,$$

so sind $\sigma(u|\omega_1, \omega_1')$ und $\wp(u|\omega_1, \omega_1')$ von $\sigma(u|\omega, \omega')$ und $\wp(u|\omega, \omega')$ verschieden. Es besteht aber doch noch ein Zusammenhang zwischen diesen Functionen und den ursprünglichen, welcher durch die Transformation der elliptischen Functionen klar gelegt wird. Hierbei entstehen die ursprünglichen Functionen aus den neuen durch eine Transformation n^{ten} Grades. Nun läßt sich zeigen, daß man nur nöthig hat, den Zusammenhang zwischen den Functionen $\sigma(u|\omega, \omega')$, $\wp(u|\omega, \omega')$ und den transformirten Functionen

$$\sigma\left(u\middle|\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right), \qquad \wp\left(u\middle|\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$$

zu untersuchen, und zwar wird für $n = 2m+1$

$$(5.)\quad \begin{cases} \bar{\sigma}u = \sigma\left(u\middle|\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = e^{\frac{1}{2}B_1u^2}\sigma u \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right], \\ \bar{\wp}u = \wp\left(u\middle|\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right) + \wp\left(u + \frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right] - B_1 \end{cases}$$

und für $n = 2m+2$

$$(5a.)\quad \begin{cases} \bar{\sigma}u = \sigma\left(u\middle|\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = e^{\frac{1}{2}B_1u^2}\sigma_1 u\,\sigma^{n-1}u\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right], \\ \bar{\wp}u = \wp\left(u\middle|\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \\ = \wp u + \wp(u-\tilde{\omega}) + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u-\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)+\wp\left(u+\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right] - B_1, \end{cases}$$

wo

$$B_1 = \sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right), \qquad \sigma_1 u = \frac{e^{-\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}}$$

ist. Dabei kommt es hauptsächlich auf die Bestimmung von

$$(6.)\quad \begin{cases} P(s) = \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right] = \\ = \wp^m u - G_1\wp^{m-1}u + G_2\wp^{m-2}u - + \cdots \pm G_m \end{cases}$$

an, denn es wird

$$(7.)\qquad \bar{\wp}u = n\wp u - B_1 - \frac{d^2\lg P}{du^2},$$

oder

$$(7a.)\qquad \bar{\wp}u = (n-1)\wp u + \wp(u-\tilde{\omega}) - B_1 - \frac{d^2\lg P}{du^2},$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Zur Transformation n^{ten} Grades braucht man also nicht die Theilwerthe der Function $\wp u$ selbst, sondern nur die Größen $G_1, G_2, \ldots G_m$.

VI. Die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades ist höchstens gleich $T(n)$.

Man kann nun die Größe B_1 (oder, wenn $n = 2m+1$ ist, die Größe $G_1 = \frac{1}{2}B_1$) als Hülfsgröße einführen, da sich alle übrigen Größen, die bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten, rational durch B_1 darstellen lassen. Die Resolvente, deren Wurzel B_1 ist, wird aber schon für kleine Werthe von n ziemlich complicirt, so daß es nützlich ist, andere Hülfsgrößen aufzusuchen. Diese findet man aus der Discriminante der Gleichung $P(s) = 0$, nämlich aus

$$(8.)\qquad D = \prod_{\alpha=1}^{m}\prod_{\beta=1}^{m}{}'\left[\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\tilde{\omega}}{n}\right)\right],$$

wo der Strich bei dem Productzeichen Π andeuten möge, daß β nur die von α verschiedenen Werthe zwischen 1 und m annimmt.

Setzt man jetzt der Kürze wegen [1])

$$\sigma_{\alpha p,\,\alpha q} = -e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \tilde{\eta}\tilde{\omega}}\,\sigma\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right), \tag{9.}$$

so läßt sich zeigen, daß für $n = 2m+1$

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\,\frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{m}\sigma_{\alpha p,\,\alpha q}^{2m-2}} \tag{10.}$$

wird. Deshalb sei

$$f\left(\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m}\sigma_{\alpha p,\,\alpha q}, \tag{11.}$$

wodurch man dieselbe Größe f erhält, welche ich in Abh. 1 in die Transformationstheorie der elliptischen Functionen eingeführt habe. Aus ihrer Beziehung zur Discriminante der Gleichung $P(s) = 0$, welche durch die Formel

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} f^{-2m+2} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-3)} f^{-n+3} \tag{12.}$$

gegeben ist, kann man schon auf die Verwendbarkeit der Größe f schließen.

Durch die Gleichung

$$f^2\left(\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = f^2 = (-1)^{n-1}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\sigma_{\alpha p,\,\alpha q} \tag{13.}$$

soll die Definition der Größe f^2, welche bisher nur für ungerade Werthe von n gegeben war, auch auf gerade Werthe von n erweitert werden.

Es giebt außerdem noch mehrere Darstellungen der Größe f^2, welche für die späteren Untersuchungen von Wichtigkeit sind.

Es sei nämlich, wie gewöhnlich

$$h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}, \qquad s = e^{\frac{n\pi i}{2\omega}}, \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} \tag{14.}$$

und es werde derjenige Werth von f, welcher dem Falle $\tilde{\omega} = \omega$, $\tilde{\omega}' = \omega'$ entspricht, mit f_∞ bezeichnet, dann folgt aus Gleichung (13.)

$$f_\infty^2 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{n-1} n \prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1-h^{2n\nu}}{(1-h^{2\nu})^n}\right]^2. \tag{15.}$$

Indem man aus beiden Seiten dieser Gleichung die Quadrat-

---

1) Vergl. F. Klein, Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe. Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. in Leipzig vom 14. Nov. 1884.

wurzel zieht und das Vorzeichen so bestimmt, wie es aus Gleichung (11.) für ungerade Werthe von n folgt, erhält man die Gleichung

$$f_\infty = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt{n} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{2n\nu}}{(1-h^{2\nu})^n}. \tag{15a.}$$

Diese Gleichung soll jetzt auch für gerade Werthe von n die Größe f_∞ definiren, aus der dann die übrigen Werthe von f, nämlich $f\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$, hervorgehen, indem man das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ durch das äquivalente Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ ersetzt. Das Vorzeichen von $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ werde immer so bestimmt, daß der reelle Theil positiv ist; ist der reelle Theil gleich 0, so soll der Factor von i positiv genommen werden.

Setzt man jetzt

$$\left\{\begin{aligned} Q = Q(\omega, \omega') &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{1}{12}(6\lambda+1)^2}, \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

so wird

$$Q^{24}(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \Delta(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = g_2^3 - 27 g_3^2 \text{ [1]} \tag{17}$$

und

$$f = \frac{Q\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)}{Q^n(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}. \tag{18.}$$

Hat n die Form $6l \pm 1$, so wird

$$f^{-2} = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{m} \mathfrak{G}^2_{\alpha p, \alpha q}} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right] \tag{19.}$$

Diese Darstellung läßt sich noch verallgemeinern, indem man das Product

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\varkappa\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right]$$

bildet; es sind jedoch hierbei nicht alle Werthe von $\varkappa$ zulässig.

Hat n die Form $2m+1$, so wird

---

1) Diese Größe Δ ist in der oben angeführten Schrift »Formeln und Lehrsätze u. s. w.« mit $16G$ bezeichnet.

$$(20.) \qquad f^{-3} = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \wp'\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right).$$

Hat n wieder die Form $6l \pm 1 = 2m+1$, so wird

$$(21.) \qquad f = (-1)^{l+m} \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)},$$

eine Formel, welche zeigt, daß die Größe f eine rationale Function der Größen $\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)$, also auch der Größen $\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}\right)$ ist.

Setzt man nun für einen beliebigen Werth von n

$$S = f^2 e^{-\frac{1}{2}Bu^2} \frac{\bar{\sigma}u}{\sigma^n u}$$

und betrachtet S als eine Function von u, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, so genügt S der partiellen Differentialgleichung

$$(22.) \qquad \frac{n\pi i}{\tilde{\omega}} \frac{\partial S}{\partial \tilde{\omega}'} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + 2n \frac{\partial S}{\partial u}\left(\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\tilde{\eta} u}{\tilde{\omega}}\right) + n(n-1)S\left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}} + \wp u\right).$$

Man kann aber auch S als eine Function von $\wp u = s$, g_2, g_3 betrachten und dadurch dieser partiellen Differentialgleichung eine andere Form geben. Der Kürze wegen möge dabei D das durch die Gleichung

$$(23.) \qquad D(\varphi) = 18 g_3 \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial g_3}$$

definirte Operationssymbol sein, welches die Herren Frobenius und Stickelberger eingeführt haben[1]). Für dieses Symbol besteht die Gleichung

$$(24.) \qquad D(\Delta) = D(Q^{24}) = D(g_2^3 - 27 g_3^2) = 0.$$

Man erhält dadurch für S die partielle Differentialgleichung

$$(25.) \quad \begin{cases} 6(4s^3 - g_2 s - g_3)\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + [12(3-2n)s^2 - (3-4n)g_2]\frac{\partial S}{\partial s} - 4nDS + \\ \qquad + 6n(n-1)sS = 0. \end{cases}$$

Durch diese Differentialgleichung wird es möglich, alle Größen, welche bei der Transformation der elliptischen Functionen auftreten,

1) Crelle's Journal, Bd. 92, S. 311—327.

rational durch die Hülfsgröße f auszudrücken, sobald die zu dem Nenner n gehörende Gleichung zwischen den Größen f, g_2, g_3 hergestellt ist.

Der Einfachheit wegen sei zunächst $n = 2m+1$, dann wird

$$(26.)\quad S = f^3(s^m - G_1 s^{m-1} + \cdots \pm G_m) = f^3 s^m + \sum_{\alpha=1}^{m} (-1)^\alpha f^3 G_\alpha s^{m-\alpha}.$$

Indem man diesen Ausdruck in die Gleichung (25.) einführt und den Coefficienten von $(-1)^\alpha s^{m-\alpha+1}$ gleich 0 setzt, findet man

$$(27.)\begin{cases} 12\alpha(2\alpha+1)G_\alpha + 4nD(G_{\alpha-1}) + 12nG_{\alpha-1}D(\lg f) \\ +\frac{1}{3}(n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)g_2 G_{\alpha-2} + 3(n-2\alpha+5)g_3 G_{\alpha-3}] = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man die hieraus für $\alpha = 1$ folgende Gleichung

$$(28.)\qquad 3G_1 + nD(\lg f) = 0$$

benutzt,

$$(27a.)\quad 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha - 72G_1 G_{\alpha-1} + 8nD(G_{\alpha-1}) + \\ + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)g_2 G_{\alpha-2} + 3(n-2\alpha+5)g_3 G_{\alpha-3}] = 0.$$

Dies giebt

$$(29.)\quad \begin{cases} 240G_2 - 72G_1^2 + 8nD(G_1) + (n-1)(n+6)g_2 = 0, \\ 504G_3 - 72G_1 G_2 + 8nD(G_2) + \\ \qquad + (n-3)[(n+12)g_2 G_1 + 3(n-1)g_3] = 0, \\ 864G_4 - 72G_1 G_3 + 8nD(G_3) + \\ \qquad (n-5)[(n+18)g_2 G_2 + 3(n-3)g_3 G_1] = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ist $n = 2m+2$, so wird

$$S = f^3\sqrt{s-e_\lambda}(s^m - G_1 s^{m-1} + \cdots \pm G_m);$$

dadurch erhält man hier ähnliche Formeln wie bei $n = 2m+1$, nur tritt jetzt noch die Größe $e_\lambda = \wp\tilde{\omega}$ auf. Man kann aber sogleich beide Fälle vereinigen, indem man setzt

$$(30.)\qquad S^2 = f^6(s^{n-1} - B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} - + \cdots \pm B_{n-1}),$$

wobei für $n = 2m+1$

$$(31.)\quad B_1 = 2G_1, \qquad B_2 = 2G_2 + G_1^2, \qquad B_3 = 2G_3 + 2G_1 G_2, \ \ldots$$

und für $n = 2m+2$

$$(31a).\quad \begin{cases} B_1 = 2G_1 + e_\lambda, \qquad B_2 = 2G_2 + G_1^2 + 2e_\lambda G_1, \\ B_3 = 2G_3 + 2G_1 G_2 + e_\lambda(2G_2 + G_1^2), \ \ldots \end{cases}$$

wird. Dies giebt dann

$$(32.)\quad \begin{cases} 3B_1+2nD(\lg f) = 0, \\ 120B_2-48B_1^2+4nD(B_1)+(n-1)(n+6)g_2 = 0, \\ 252B_3-84B_1B_2+12B_1^3+4nD(B_2)+ \\ \quad +(n^2+7n-21)g_2B_1+3(n^2-4n+3)g_3 = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Noch einfacher gestalten sich die angegebenen Relationen, wenn man durch Multiplication mit einer passenden Potenz von Q alle Ausdrücke homogen von der 0ten Ordnung macht. Setzt man dann

$$\frac{g_2}{Q^8} = \gamma_2, \quad \frac{g_3}{Q^{12}} = \gamma_3, \quad Q^{3n-3}f^3 = \left(\frac{\bar{Q}}{Q}\right)^3 = \Gamma, \quad \Gamma G_\lambda = Q^{4\lambda}\Gamma_\lambda$$

und bezeichnet die Ableitungen nach γ_2 durch einen Accent, so gehen die Gleichungen (28.), (29.) und (27a.) über in

$$\begin{gathered} \Gamma_1+2n\gamma_3\Gamma' = 0, \\ 240\Gamma_2+144n\gamma_3\Gamma_1'+(n-1)(n+6)\gamma_2\Gamma = 0, \\ 504\Gamma_3+144n\gamma_3\Gamma_2'+(n-3)[(n+12)\gamma_2\Gamma_1+3(n-1)\gamma_3\Gamma] = 0, \\ 864\Gamma_4+144n\gamma_3\Gamma_3'+(n-5)[(n+18)\gamma_2\Gamma_2+3(n-3)\gamma_3\Gamma_1'] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 24\alpha(2\alpha+1)\Gamma_\alpha+144n\gamma_3\Gamma_{\alpha-1}'+ \\ +(n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)\gamma_2\Gamma_{\alpha-2}+3(n-2\alpha+5)\gamma_3\Gamma_{\alpha-3}] = 0. \end{gathered}$$

Da $\Gamma_{m+1} = 0$ ist, so ergiebt sich aus dieser Darstellung auch, daß Γ einer linearen Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung genügt.

Jetzt kann man auch die Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\bar{\wp}u$ berechnen. Es folgt nämlich aus den Entwickelungen von $\wp u$ und $\bar{\wp}u$ nach Potenzen von u

$$(33.)\quad \begin{cases} \bar{g}_2 = -120B_2+60B_1^2-(5n-6)g_2, \\ \bar{g}_3 = 420B_3-420B_1B_2+140B_1^3-21g_2B_1-(14n-15)g_3, \end{cases}$$

oder, wenn man die gefundenen Werthe von B_1, B_2, B_3 einsetzt,

$$(34.)\quad \bar{g}_2-n^2g_2 = \frac{4n^2}{3}f^2D^2(f^{-2}), \qquad \bar{g}_3 = \frac{n}{18}f^2D(f^{-6}\bar{g}_2).$$

Abschnitt III.

Verhalten der Größe $Q(\omega, \omega')$ bei einer linearen Transformation der Perioden.

Um die verschiedenen Werthe der Hülfsgröße

$$f = \frac{Q\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)}{Q^n(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}$$

zu erhalten, welche den $T(n)$ verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades entsprechen, muß man zunächst untersuchen, in welcher Weise sich $Q(\omega, \omega')$ ändert, wenn man das primitive Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ mit dem äquivalenten Paare

$$(35.)\quad 2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\tilde{\omega}' = 2p'\omega + 2q'\omega', \quad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht.

Da sich $Q^{24} = g_2^3 - 27g_3^2$ bei dieser Vertauschung nicht ändert, so muß

$$(36.)\qquad Q(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \rho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega')$$

sein, wobei $\rho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}$, oder kürzer ρ, eine 24te Wurzel der Einheit ist. Die Berechnung von ρ kann erfolgen, indem man die (auch für andere Zwecke wichtige) Function

$$(37.)\quad \Phi(u\,|\,\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{1}{12}(6\lambda+1)^2} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right)$$

verwendet, welche ich in Abh. 1 (Geichung (27.)) angegeben habe. Dort findet sich die Relation

$$\Phi(u) = \Delta^{\frac{1}{24}} e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u,$$

welcher man auch die Form

$$(38.)\qquad \Phi(u\,|\,\omega, \omega') = -\tfrac{1}{2} Q(\omega, \omega') e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \wp' u\, \sigma^3 u$$

geben kann. Hieraus ergiebt sich durch eine kurze Zwischenrechnung

$$(39.)\qquad \Phi(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \rho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} e^{\frac{3\eta u^2 \pi i}{4\omega\tilde{\omega}}} \Phi(u\,|\,\omega, \omega').$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit

$$2e^{-\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\bar{\omega}}-\frac{u\pi i}{2\omega}}du$$

multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und 2ω integrirt, erhält man

$$(40.)\quad \rho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3q}}e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}\sum_{\lambda=0}^{q-1}(-1)^{\lambda}e^{\frac{(6\lambda+1)^2q'\pi i}{12q}}\cos\left(\frac{(6\lambda+1)\pi}{6q}\right).$$

Der Fall $q=0$, welcher $p=\pm 1$, $q'=\pm 1$ erfordert, muß besonders behandelt werden. Man findet hierbei durch die vorhin angedeutete Integration

$$(41.)\quad \rho\begin{pmatrix}1, & 0\\ p', & 1\end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}p'\pi i}, \qquad \rho\begin{pmatrix}-1, & 0\\ p', & -1\end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{12}(p'+6)\pi i}.$$

Die Gleichung (40.) liefert den Werth von ρ noch nicht in der für die Anwendungen brauchbaren Form, weshalb eine Umgestaltung nothwendig ist.

Setzt man zunächst der Kürze wegen

$$(42.)\quad \begin{cases} F(\lambda) = e^{\frac{\pi i}{12p}[(6\lambda+1)^2q'+12\lambda q+12\lambda+2]}, \\ G(\lambda) = e^{\frac{\pi i}{12p}[(6\lambda+1)^2q'-12\lambda q-12\lambda-2]}, \end{cases}$$

so wird

$$(43.)\quad \rho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3q}}e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}\sum_{\lambda=0}^{q-1}[F(\lambda)+G(\lambda)].$$

Nun ist aber

$$F(\lambda+q) = F(\lambda), \qquad G(\lambda+q) = G(\lambda),$$

so daß für jeden ganzzahligen Werth von α

$$(44.)\quad \sum_{\lambda=0}^{q-1}F(\lambda) = \sum_{\lambda=\alpha}^{q-1+\alpha}F(\lambda), \qquad \sum_{\lambda=0}^{q-1}G(\lambda) = \sum_{\lambda=\alpha}^{q-1+\alpha}G(\lambda)$$

wird. Ferner ist

$$(45.)\quad \begin{cases} F(\lambda+\mu) = F(\mu)e^{\frac{\lambda\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+3\lambda q'+q+1]}, \\ G(\lambda+\mu) = G(\mu)e^{\frac{\lambda\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+3\lambda q'-q-1]}. \end{cases}$$

Durch passende Anwendung dieser Formeln findet man zunächst

$$(46.)\quad \begin{cases} \rho\begin{pmatrix} p, & 3\xi+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12q}} \sum_{\lambda=0}^{q-1} F(\lambda), \\ \rho\begin{pmatrix} p, & 3\xi-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{(p-q)\pi i}{12q}} \sum_{\lambda=0}^{q-1} F(\lambda), \\ \rho\begin{pmatrix} p, & 3\xi \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\lambda=0}^{\xi-1} F(\lambda), \\ \rho\begin{pmatrix} p, & 3\xi \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\lambda=0}^{\xi-1} G(\lambda). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke kann man nun auf Gauss'sche Summen zurückführen.

Setzt man nämlich in herkömmlicher Weise

$$(47.)\qquad \varphi(m, n) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{\frac{2\lambda^2 m\pi i}{n}},$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (44.) und (45.) durch passende Bestimmung von μ

$$(48.)\quad \begin{cases} \rho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((3\alpha+2)q', q\big)}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{1}{12}[q(p+q'+2)-5]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((q-p'q+3)q', 2q\big)}{2\sqrt{q}}\, e^{\frac{1}{12}[-p-q'-3+pp'(q+1)]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 3\zeta-1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((\alpha+1)q', 2\alpha+1\big)}{\sqrt{2\alpha+1}}\, e^{\frac{1}{12}[\zeta q\eta-p'-3]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 3\zeta+1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta+1 \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((\alpha+1)q', 2\alpha+1\big)}{\sqrt{2\alpha+1}}\, e^{\frac{1}{12}[-\zeta q\eta+p'-3]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((q-p'q+3)q', 2q\big)}{2\sqrt{q}}\, e^{\frac{1}{12}[p+q'-3-pp'(q-1)]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((3\alpha+1)q', q\big)}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{1}{12}[q(p+q'+2)-1]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 6\sigma+1, & 6\alpha \\ p', & 6\tau+1 \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((2\alpha-2\alpha p'+1)q', 4\alpha\big)}{2\sqrt{2\alpha}}\, e^{\frac{1}{12}[pp'-2p-1]\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 6\sigma-1, & 6\alpha \\ p', & 6\tau-1 \end{pmatrix} = \dfrac{\varphi\big((2\alpha-2\alpha p'+1)q', 4\alpha\big)}{2\sqrt{2\alpha}}\, e^{\frac{1}{12}[pp'-2p-5]\pi i}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich die folgende Tabelle für $q = 1$ bis $q = 7$

(49.)
$$\begin{cases} \rho\begin{pmatrix} p, & 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(p+q'-3)\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 2h+1, & 2 \\ p', & 2k+1 \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k-2)\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 3h+r, & 3 \\ p', & 3k+t \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k+r+t-5)\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 4h+r, & 4 \\ p', & 4k+t \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k+r+t-6)\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 5h+r, & 5 \\ p', & 5k+t \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k+r+t-7)\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 6h+r, & 6 \\ p', & 6k+t \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k+r+t-8)\pi i}, \\ \rho\begin{pmatrix} 7h+r, & 7 \\ p', & 7h+t \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k+r+t-9)\pi i}. \end{cases}$$

Wir können diese Fälle also in der Formel

$$\rho\begin{pmatrix} qh+r, & q \\ p', & qk+t \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(h+k+r+t-q-2)\pi i}$$

zusammenfassen.

Hierbei sollen r und t immer kleiner als q sein.

Abschnitt IV.

Untersuchung des Falles, in welchem n eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$ ist.

Ist $n = 2m+1$ eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$, und ist g eine primitive Wurzel von n, so wird nach Gleichung (19.)

$$f^{-2} = (-1)^{l} \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)\right] =$$

$$= (-1)^{l} \prod_{\alpha=0}^{m-1} \left[\wp\left(\frac{2g^{\alpha}\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\left(\frac{4g^{\alpha}\tilde{\omega}}{n}\right)\right]$$

eine cyklische Function der Größen

$$\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}\right), \qquad \wp\left(\frac{2g\tilde{\omega}}{n}\right), \qquad \cdots \wp\left(\frac{2g^{m-1}\tilde{\omega}}{n}\right)$$

und deshalb nach Satz V in Abschnitt I die Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Um die $n+1$ Wurzeln dieser Gleichung zu erhalten, braucht man nur zu beachten, daß das System der zum Nenner n gehörenden

Theilwerthe der Function pu durch die Größen

$$p\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}\right), \quad p\left(\frac{2g\tilde{\omega}}{n}\right), \quad \cdots \; p\left(\frac{2g^{n-1}\tilde{\omega}}{n}\right),$$

von denen f^2 eine cyklische Function ist, vollständig erschöpft wird, wenn man für $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ die $n+1$ Werthepaare

$$\begin{array}{rr} \omega, & \omega', \\ \omega', & -\omega, \\ 24\omega+\omega', & -\omega, \\ 48\omega+\omega', & -\omega, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 24(n-1)\omega+\omega', & -\omega \end{array}$$

setzt. Bezeichnet man also die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung mit

$$f_\infty^2, \quad f_0^2, \quad f_1^2, \quad \cdots \quad f_{n-1}^2,$$

so ist nach Gleichung (18.)

$$(50.) \quad \begin{cases} f_\infty = \dfrac{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{Q^n(\omega, \omega')}, & f_r = \dfrac{Q\left(\frac{24r\omega+\omega'}{n}, -\omega\right)}{Q^n(24r\omega+\omega', -\omega)} \\ (r = 0, 1, 2, \ldots n-1). \end{cases}$$

Nun ist aber nach der Tabelle (49.)

$$p\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{2}\pi i}, \qquad p\begin{pmatrix} 24r, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{12}(24r-3)\pi i} = e^{-\frac{1}{2}\pi i},$$

folglich wird

$$Q\left(\frac{24r\omega+\omega'}{n}, -\omega\right) = e^{-\frac{1}{2}\pi i} Q\left(\omega, \frac{24r\omega+\omega'}{n}\right),$$

$$Q(24r\omega+\omega', -\omega) = e^{-\frac{1}{2}\pi i} Q(\omega, \omega');$$

deshalb geht die Gleichung (50) über in

$$(50a.) \quad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{Q^n(\omega, \omega')}, \quad f_r = e^{\frac{1}{2}mn\pi i} \frac{Q\left(\omega, \frac{24r\omega+\omega'}{n}\right)}{Q^n(\omega, \omega')},$$

oder

$$(51.) \quad \begin{cases} Q^n f_\infty = \left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}\, h^{\frac{n}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2n\nu}), \\ Q^n f_r = e^{\frac{1}{2}mn\pi i} \left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{n}{2}} h^{\frac{1}{12}n} \varepsilon^r \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1-h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24r\nu}\right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke kann man nach Potenzen von h entwickeln und findet daraus unmittelbar die Jacobi'schen Relationen. Bezeichnet man nämlich mit β einen beliebigen Nichtrest von n, so wird

$$(52.)\quad \begin{cases} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} = e^{\frac{1}{2}(2l+m)\pi i} f_\infty \sqrt{n}, \\ f_0 + \varepsilon^{-\beta} f_1 + \varepsilon^{-2\beta} f_2 + \cdots + \varepsilon^{-(n-1)\beta} f_{n-1} = 0 \end{cases}$$

und

$$(53.)\quad \begin{cases} f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + \cdots + f_{n-1}^3 = e^{\frac{1}{2}m\pi i} f_\infty^3 \sqrt{n}, \\ f_0^3 + \varepsilon^{-3\beta} f_1^3 + \varepsilon^{-6\beta} f_2^3 + \cdots + \varepsilon^{-3(n-1)\beta} f_{n-1}^3 = 0. \end{cases}$$

Durch Entwickelung der Größen $f_\infty^{2\alpha}$ und $f_r^{2\alpha}$, oder noch besser der Größen

$$s_\alpha = f_\infty^{2\alpha} + \sum_{r=0}^{n-1} f_r^{2\alpha}$$

nach Potenzen von h kann man jetzt auch die Gleichung, welche zwischen den Größen f, g_2, g_3 besteht, verhältnißmäßig leicht bilden. In der Gleichung

$$f^{2n+2} + \mathfrak{g}_1 f^{2n} + \mathfrak{g}_2 f^{2n-2} + \cdots + \mathfrak{g}_{n+1} = 0$$

haben nämlich die Coefficienten $\mathfrak{g}_\alpha$ die Form $\frac{\mathfrak{G}_\alpha}{\Delta^{\alpha_1}}$, wo α_1 die größte ganze Zahl zwischen $\frac{1}{12}\alpha(n-1)$ und $\frac{1}{12}\alpha n$ ist, während $\mathfrak{G}_\alpha$ eine ganze Function von g_2 und g_3 mit ganzzahligen Coefficienten ist, welche in dem Sinne homogen vom Grade $6\alpha_1 - \frac{1}{2}(n-1)\alpha$ ist, daß man g_2 als eine Größe zweiter und g_3 als eine Größe dritter Dimension betrachtet. Da nun noch s_α dieselbe Form haben muß wie $\mathfrak{g}_\alpha$, und g_2, g_3 auch nach Potenzen von h entwickelt werden können, so lassen sich die fehlenden Zahlcoefficienten leicht mit Hülfe der Newton-schen Formeln finden.

Durch dieses Verfahren, das ich in Abh. 1 (§ 5) und Abh. 3 näher besschrieben habe, ist es mir geglückt, die zu den Nennern

$$n = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

gehörenden Gleichungen für die Größe f zu bilden. Durch Einführung der Bezeichnungen

$$L = Q^{n-1} f, \qquad \gamma_2 = \frac{g_2}{Q^2}, \qquad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}$$

lassen sich diese Gleichungen noch etwas vereinfachen. Ich beschränke mich in diesem Auszuge darauf, nur die zu den Nennern $n = 5$ und $n = 7$ gehörenden Gleichungen für die Größe L anzu-

geben, weil diese Gleichungen später noch gebraucht werden. Für $n = 5$ wird nämlich

$$L^{12}+10L^6-12\gamma_2 L^3+5 = 0, \tag{54.}$$

und für $n = 7$

$$L^{16}+14L^{12}+63L^8+70L^4+216\gamma_3 L^2-7 = 0. \tag{55.}$$

Sind die Gleichungen für die Größe L, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichungen für die Größe f gebildet, so findet man nach den Angaben in Abschnitt II auch alle übrigen Größen, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten. So wird jetzt für $n = 5$, indem man

setzt,

$$F_1 = \Delta^2 f^{10}+5\Delta f^4-2g_2$$

$$\left\{\begin{aligned} \sigma(u\,|\,\tfrac{1}{5}\tilde{\omega},\,\tilde{\omega}') &= e^{G_1u^2}\sigma^5 u(\wp^2 u - G_1\wp u + G_2),\\ F_1G_1 &= -30g_3,\\ 12G_2 &= \Delta f^4+g_2+7f^{-2} \end{aligned}\right. \tag{56.}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \bar{g}_2-g_2 &= 20(\Delta f^4+13f^{-2}),\\ F_1(\bar{g}_3-g_3) &= -420g_3(\Delta f^4+31f^{-2}). \end{aligned}\right. \tag{56a.}$$

Für $n = 7$ ist, wenn man

$$28F_1 = 8\Delta^4 f^{14}+84\Delta^3 f^{10}+252\Delta^2 f^6+140\Delta f^2+216g_3$$

setzt,

$$\left\{\begin{aligned} \sigma(u\,|\,\tfrac{1}{7}\tilde{\omega},\,\tilde{\omega}') &= e^{G_1u^2}\sigma^7 u(\wp^3 u - G_1\wp^2 u + G_2\wp u - G_3),\\ 12g_2G_1 &= \Delta^3 f^{10}+13\Delta^2 f^6+47\Delta f^3-54g_3+14f^{-2},\\ 12g_2^2G_2 &= -3g_3\Delta^3 f^{10}-39g_3\Delta^2 f^6-\Delta^2 f^4\\ &\quad -159g_3\Delta f^2-6\Delta+81g_3^2-132g_3f^{-2}+7f^{-4},\\ 144G_3 &= \Delta^3 f^{10}+13\Delta^2 f^6+59\Delta f^2-18g_3+74f^{-2} \end{aligned}\right. \tag{57.}$$

und

$$\begin{aligned} F_1(\bar{g}_2-g_2) &= 60g_2(\Delta^3 f^{10}+15\Delta^2 f^6+51\Delta f^2+10f^{-2}),\\ 3(\bar{g}_3-g_3) &= 7(\Delta^3 f^{10}+43\Delta^2 f^6+467\Delta f^2+1634f^{-2}). \end{aligned}$$

Abschnitt V.

Untersuchung des Falles, in welchem n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 1$ ist.

Sind a und b Primzahlen von der Form $6l \pm 1$, so hat $n = ab$ dieselbe Form. Indem man zuerst eine Transformation a^{ten} Grades

ausführt und dann auf die transformirte Function eine Transformation b^{ten} Grades anwendet, findet man ohne Weiteres die Wurzeln der Gleichung für die Größe L, welche zur Transformation n^{ten} Grades gehört. Diese sind für $a > b$

$$(58.)\quad \begin{cases} Q^2L^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right) = Q^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right), \\ Q^2L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right) = (-1)^{b-1}\, Q^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right), \\ (s = 0, 1, 2, \ldots b-1) \\ Q^2L^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right) = (-1)^{a-1}\, Q^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right), \\ (r = 0, 1, 2, \ldots a-1) \\ Q^2L^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(a+1)(b+1)}Q^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right). \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Wurzeln ist $(a+1)(b+1) = T(n)$.

In dem Falle aber, wo $a = b$ ist, wird

$$L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{\omega'}{a}\right) = (-1)^{a-1}a, \qquad L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{\omega'+24r\omega}{a}\right) = (-1)^{a-1}a.$$

Diese $a+1$ Wurzeln liefern keine eigentliche Transformation n^{ten} Grades, so daß sich die Gleichung für die Größe L nach Absonderung des Factors $[L^2-(-1)^{\frac{1}{2}(a-1)}a]^{a+1}$ auf eine Gleichung vom Grade $a(a+1)$ für die Größe L^2 reducirt.

Dieses Verfahren, das »wiederholte Transformation« heißen möge, läßt sich beliebig weit fortsetzen, so daß man für

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

eine Gleichung vom Grade $T(n)$ für die Größe L^2 erhält.

Wie man die Gleichung für die Größe L wirklich bildet, werden die Beispiele für $n = 25$ und $n = 49$ zeigen.

Vorher sei aber noch darauf hingewiesen, daß sich die Gleichung für die Größe L wesentlich reduciren läßt, wenn n eine Quadratzahl von der Form $6l+1$ ist. Dann ist nämlich nicht nur L^2, sondern schon L selbst die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades mit rationalen Coefficienten.

Der Beweis folgt wieder aus Satz V in Abschnitt I. Ist nämlich n zunächst gleich a^2, d. h. gleich dem Quadrate einer Primzahl, und ist g eine primitive Wurzel von n, so läßt sich f darstellen als cyklische Function der Größen

$$\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{2g\tilde{\omega}}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{2g^2\tilde{\omega}}{n}\right), \quad \cdots \wp\left(\frac{2g^{a\tau-1}\tilde{\omega}}{n}\right),$$

wo $\tau = \frac{1}{2}(a-1)$ ist.

Der allgemeine Satz folgt dann durch wiederholte Transformation.

Die $a(a+1)$ Wurzeln der Gleichung für die Größe f werden für $n = a^2$

$$f_\infty, \quad f_{r,s}, \quad f_t,$$

wo $r = 0, 1, 2, \ldots a-1$; $s = 0, 1, 2, \ldots a-1$; $t = 1, 2, \ldots a-1$; und zwar ist

$$(59.) \quad \left\{ \begin{aligned} Q^n f_\infty &= Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} a h^{\frac{n}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2n\nu}), \\ Q^n f_{r,s} &= Q\left(\omega, \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12n}} \varepsilon^{r+as} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1-h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24(r+as)\nu}\right), \\ Q^n f_t &= e^{\frac{1}{12}(aq'-3)\pi i}\left[\rho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}\right]^{-n} Q\left(\frac{\omega}{a}, \frac{24t\omega+a\omega'}{n}\right) \\ &= e^{\frac{1}{12}(aq'-3)\pi i} \rho^{-n} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{at} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu} \varepsilon^{24at\nu}). \end{aligned} \right.$$

Dabei sind p' und q' aus der Gleichung

$$24tq' - ap' = +1$$

zu bestimmen.

Jetzt kann man die Gleichung für die Größe f oder für die Größe L, deren Form ohne weiteres bekannt ist, durch Anwendung der Newton'schen Formeln und durch Entwickelung nach Potenzen von h bilden. Schneller führt die wiederholte Tansformation zum Ziele.

Für $n = 25$ geben die Gleichungen (59.)

$$(60.) \quad \left\{ \begin{aligned} Q^{25} f_\infty &= Q(\tfrac{1}{25}\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} 5 h^{\frac{25}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{50\nu}), \\ Q^{25} f_{r,s} &= Q\left[\omega, \tfrac{1}{25}(24(r+5s)\omega+\omega')\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{300}} \varepsilon^{r+5s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1-h^{\frac{2\nu}{25}} \varepsilon^{24(r+5s)\nu}\right), \\ Q^{25} f_t &= -(\tfrac{t}{5}) Q\left[\tfrac{1}{5}\omega, \tfrac{1}{25}(24t\omega+\omega')\right] \\ &= -(\tfrac{t}{5}) \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{5t} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu} \varepsilon^{120t\nu}), \end{aligned} \right.$$

wobei $(\frac{\cdot}{5})$ das Legendre'sche Zeichen ist. Ferner sei

$$L = \frac{Q(\frac{1}{25}\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}{Q(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}, \quad x = \frac{Q(\frac{1}{5}\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}{Q(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}, \quad \bar{x} = \frac{Q(\frac{1}{25}\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}{Q(\frac{1}{5}\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')} = \frac{L}{x},$$

dann ist nach Gleichung (54.)

(61.) $x^{12}+10x^6-12\gamma_2 x^3+5 = 0$ und $\bar{x}^{12}+10\bar{x}^6-12\bar{\gamma}_2\bar{x}^3+5 = 0,$

wobei der Werth von $\bar{\gamma}_2$ sich aus Gleichung (56.) ergiebt. Hieraus folgt

$$L^{12}+10x^6L^6-12(20x^6+\gamma_2 x^3+260)L^3+5x^{12} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in die Factoren

$$L^2-5, \quad L^5+5L^4+15L^3+25L^2+25L-x^6,$$
$$L^5-5L^4+15L^3-25L^2+25L+x^6,$$

von denen nur der mittelste gleich 0 sein kann, wie sehr leicht aus der Entwickelung nach Potenzen von h hervorgeht. Dadurch erhält man die Gleichung

(62.) $$x^6 = L^5+5L^4+15L^3+25L^2+25L.$$

Diesen Werth von x^6 hat man nur in die Gleichung

(63.) $$\left\{\begin{array}{l} 1728\gamma_2^3:(216\gamma_2)^2:1 = (x^{12}+10x^6+5)^3 \\ \qquad\qquad : (x^{12}+22x^6+125)(x^{12}+4x^6-1)^2 : x^6, \end{array}\right.$$

die sich unmittelbar aus Gleichung (61.) ergiebt, einzusetzen, so erhält man die zu dem Nenner $n = 25$ gehörende Gleichung für die Größe L. Diese Gleichung läßt sich etwas vereinfachen, wenn man $L+1 = M$ setzt; dann wird

(64.) $$\left\{\begin{array}{l} 1728\gamma_2^3:(216\gamma_2)^2:1 = (M^{10}+10M^9+35M^8-12M^5+50M^4 \\ \qquad -60M^3+25M^2-60M+16)^3 \\ \qquad : (M^2+4)(M^4+3M^2+1)^2(M^{10}+10M^8 \\ \qquad +35M^6-18M^5+50M^4-90M^3 \\ \qquad +25M^2-90M+76)^2 \\ \qquad : (M^5+5M^3+5M-11). \end{array}\right.$$

Für $n = 49$ erhält man in ähnlicher Weise die 56 Wurzeln der Gleichung für die Größe L aus den Gleichungen (59.). Die Gleichung für die Größe L selbst findet man durch Elimination von x^2 aus den Gleichungen

$$x^{16}+14x^{12}+63x^8+70x^4+216\gamma_3 x^3-7 = 0$$

und

$L^7+7L^6+21L^5+49L^4+147L^3+343L^2+343L+7(L^3+5L^2+7L)x^4-x^8=0.$

Auch hier tritt eine Vereinfachung ein, wenn man $L+1 = M$ setzt.

Diese Andeutungen mögen für den vorliegenden Auszug genügen.

Abschnitt VI.

Untersuchung des Falles, in welchem n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 2$ ist.

Ist $n = 2$, so läßt sich nicht f^2, sondern erst f^8 als rationale Function von $\wp\tilde{\omega}$ darstellen. Hier wird nämlich nach Gleichung (13.)

$$(65.)\quad f_\infty^8 = \mathfrak{G}_{1,0}^4 = e^{-2\eta\omega}\mathfrak{G}^4\omega = \frac{4(e_2-e_3)}{Q^{12}} = \frac{1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} = \frac{4}{12\wp^2\omega - g_2}.$$

Hieraus folgt dann

$$(66.)\quad \Delta f^{24} - 12 g_2 f^8 + 16 = 0 \quad \text{oder} \quad L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0.$$

$$(67.)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}(u|\frac{1}{2}\omega, \omega') = \bar{\mathfrak{G}}u = e^{\frac{1}{2}\eta u^2}\mathfrak{G}_1 u \mathfrak{G}u, \quad \bar{\wp}u = \wp u + \dfrac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u - e_1}, \\ (e_1-e_2)(e_1-e_3) = f_\infty^8, \quad e_1 = B_1 = \dfrac{-12 g_3}{\Delta f_\infty^{16} - 4 g_2}, \\ \bar{g}_2 - g_2 = 20 f_\infty^{-8}, \quad \bar{g}_3 - g_3 = \dfrac{-336 g_3}{\Delta f_\infty^{24} - 4 g_2 f_\infty^8}. \end{cases}$$

Die zu $n = 6l \pm 2$ gehörende Gleichung für die Größe L kann man jetzt dadurch erhalten, daß man die Transformation 2ten Grades einmal oder mehrere Male mit Transformationen combinirt, deren Grad die Form $6l_1 \pm 1$ hat. Dadurch aber, daß bei der Transformation zweiten Grades erst L^8 die Wurzel einer Gleichung dritten Grades ist, wird im Allgemeinen auch bei $n = 6l \pm 2$ erst L^8 die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades mit rationalen Coefficienten sein. Der Grad der Gleichung für die Größe L wird deshalb $8\,T(n)$, so daß — wenn man von den Fällen $n = 2$ und $n = 4$ absieht — die Größe L (oder f) hier nicht mehr die zweckmäßigste Hülfsgröße ist.

Man findet z. B. die zu den Nennern $n = 4$ und $n = 8$ gehörende Gleichung für die Größe L in folgender Weise.

Es sei

$$L^8(\tfrac{1}{2}\omega, \omega') = x, \quad L^8(\tfrac{1}{4}\omega, \omega') = y, \quad L^8(\tfrac{1}{8}\omega, \omega') = z,$$

$$\bar{x} = \frac{y}{x}, \quad \bar{y} = \frac{z}{x},$$

dann ist nach Gleichung (66.)

(66a.) $x^3-12\gamma_2 x+16 = 0$ und $\bar{x}^3-12\bar{\gamma}_2\bar{x}+16 = 0$,

oder, wenn man für $\bar{x}$ und $\bar{\gamma}_2$ ihre Werthe einsetzt,

(68.) $$(y-16)(y^2+16y-12\gamma_2 x+16) = 0.$$

Dies giebt

(68a.) $12\gamma_2 x = y^2+16y+16$, oder $x^3 = y^2+16y$.

Setzt man diesen Werth von x in die Gleichung (66a.) ein, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades in Bezug auf y, d. h. die zu dem Nenner $n = 4$ gehörende Gleichung für die Größe L.

Aus den Gleichungen (68a.) folgt jetzt, indem man noch eine dritte Transformation zweiten Grades ausführt,

(69.) $\bar{x}^3 = \bar{y}^2+16\bar{y}$, oder $y^3 = xz^2+16x^2z$.

Durch Elimination von x und y aus dieser und den vorigen Gleichungen findet man schließlich eine Gleichung 12ten Grades für z, d. h. die zu dem Nenner $n = 8$ gehörende Gleichung für die Größe L.

Ich beschränke mich in dem vorliegenden Auszuge auf diese Andeutungen; in der Abhandlung folgen die ausgeführten Rechnungen.

Abschnitt VII.

Untersuchung des Falles, in welchem n durch die Zahl 3 theilbar ist.

Auch bei der Transformation 3ten Grades ist nicht mehr f^2, sondern erst f^6 eine rationale Function von $\wp(\frac{2}{3}\tilde{\omega})$. Nach Gleichung (20.) wird nämlich

(70.) $$f_\infty^{-6} = 4\wp^3(\tfrac{2}{3}\omega)-g_2\wp(\tfrac{2}{3}\omega)-g_3.$$

Da $\wp(\frac{2}{3}\omega)$ die Wurzel einer Gleichung vierten Grades ist, nämlich der Gleichung

$$\wp'\wp'''-\wp''^2 = 0,$$

so folgt, daß f^6 die Wurzel einer Gleichung vierten Grades ist, welche die Form

$$\Delta^2 f^{24}+a\Delta f^{12}+bg_2 f^6-27 = 0$$

hat. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

(71.) $$f_\infty^6 = \frac{Q^6(\frac{1}{3}\omega,\ \omega')}{Q^{18}(\omega,\ \omega')},\quad f_r^6 = -\frac{Q^6[\omega,\ \frac{1}{3}(8r\omega+\omega')]}{Q^{18}(\omega,\ \omega')}.\quad (r = 0, 1, 2)$$

Durch Entwickelung nach Potenzen von h und Anwendung der Newton'schen Formeln findet man hieraus sehr leicht die Zahlwerthe von a und b, so daß sich für $n = 3$ die Gleichung

$$\Delta^2 f^{24} + 18\Delta f^{12} + 216 g_3 f^6 - 27 = 0 \tag{72.}$$

ergiebt. Hierbei ist

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\sigma} u &= e^{G_1 u^2} \sigma^3 u (\wp u - G_1), \\ 12 g_2 G_1 &= \Delta f^6 - 18 g_3 + 9 f^{-6}, \\ F_1 (\bar{g}_2 - g_2) &= 180 g_3 (\Delta f^6 + 3 f^{-6}), \\ 3(\bar{g}_3 - g_3) &= 7(\Delta f^6 + 39 f^{-6}), \end{aligned}\right. \tag{73.}$$

wobei

$$F_1 = \Delta^2 f^{18} + 9\Delta f^6 + 54 g_3.$$

Die zu Nennern von der Form $n = 6l \pm 3$ gehörende Gleichung für die Größe L findet man, indem man die Transformation 3ten Grades einmal oder mehrere Male mit Transformationen combinirt, deren Grad die Form $6l_1 \pm 1$ hat. Deshalb wird auch hier im Allgemeinen der Grad der zugehörigen Gleichung für die Größe L gleich $6T(n)$ sein, so daß — abgesehen von den Fällen $n = 3$ und $n = 9$ — die Einführung anderer Hülfsgrößen geboten erscheint.

Wenn n ein Quadrat ist, so wird der Grad der Gleichung für die Größe L auf $3T(n)$ sinken, denn man kann für $n = 9$ zeigen, daß schon f^3 eine cyklische Function der Größen

$$\wp\left(\tfrac{3}{9}\tilde{\omega}\right), \qquad \wp\left(\tfrac{4}{9}\tilde{\omega}\right), \qquad \wp\left(\tfrac{8}{9}\tilde{\omega}\right)$$

wird. Nun ist

$$\left\{\begin{aligned} Q^9 f_\infty &= Q\left(\tfrac{1}{3}\omega, \omega'\right) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} 3 h^{\frac{3}{4}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{18\nu}), \\ Q^9 f_{r,s} &= Q[\omega, \tfrac{1}{9}(8(r+3s)\omega + \omega')] \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{108}} \varepsilon^{\frac{1}{3}(r+3s)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{\frac{2\nu}{3}} \varepsilon^{8(r+3s)\nu}\right), \\ Q^9 f_1 &= -i Q[\tfrac{1}{3}\omega, \tfrac{1}{9}(8\omega + 3\omega')] \\ &= -i \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu} \varepsilon^{24\nu}), \\ Q^9 f_2 &= +i Q[\tfrac{1}{3}\omega, \tfrac{1}{9}(16\omega + 3\omega')] \\ &= +i \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^2 \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu} \varepsilon^{48\nu}). \end{aligned}\right. \tag{74.}$$

Die zu dem Nenner $n = 9$ gehörende Gleichung für die Größe L erhält man am bequemsten in folgender Weise. Es sei

$$L^3 = \frac{Q^3(\frac{1}{3}\omega, \omega')}{Q^3(\omega, \omega')}, \qquad x = \frac{Q^3(\frac{1}{3}\omega, \omega')}{Q^3(\omega, \omega')},$$

$$\bar{x} = \frac{Q^3(\frac{1}{3}\omega, \omega')}{Q^3(\frac{1}{3}\omega, \omega')} = \frac{L^3}{x},$$

dann ist nach Gleichung (72.)

(75.) $x^6+18x^4+216\gamma_3 x^3-27=0$ und $\bar{x}^6+18\bar{x}^4+216\bar{\gamma}_3\bar{x}^2-27=0,$

und wenn man $\bar{x} = \frac{L^3}{x}$ und für $\bar{\gamma}_3$ seinen Werth nach Gleichung (73.) einsetzt,

$$L^{24}+18x^4L^{12}+72(7x^4+3\gamma_3 x^3+273)L^6-27x^6 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in drei Factoren

$$L^6+27, \qquad L^9+9L^6+27L^3-x^4, \qquad L^9-9L^6+27L^3+x^4,$$

von denen nur der mittelste gleich 0 sein kann. Es wird also

(76.) $$x^4 = L^9+9L^6+27L^3 = (L^3+3)^3-27.$$

Setzt man der Kürze wegen $L^3+3 = M$ und eliminirt x^3 aus den Gleichungen (75.) und (76.), so wird

(77.) $$1728\gamma_3^3:(216\gamma_3)^3:1 = M^3(M^3-24)^3:(M^6-36M^3+216)^3:M^3-27.$$

Hat schließlich n die Form $6l$, so hat man zunächst die Transformation 2ten Grades mit der Transformation 3ten Grades zu combiniren. Daraus folgt schon, daß hier die Gleichung für die Größe L im Allgemeinen den Grad $24\,T(n)$ haben wird, d. h. man hat eine Gleichung für L^{24} zu bilden, welche den Grad $T(n)$ besitzt.

Die Schwierigkeiten der Rechnung werden dadurch so groß, daß man die Bildung dieser Gleichung vermeiden wird; und dies ist durch Einführung anderer, mit f verwandter Hülfsgrößen, welche ich gefunden habe, sehr wohl möglich.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1885.

(Fortsetzung).

Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XX. Jan.
Leopoldina Heft XIX. Nr. 23. 24.
Ungarische Revue 1884. Heft 6.
Proceedings of the royal physical society of Edinburgh. Session 1883/4.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. III. Coimbra 1881.
N. B. Φαρθυ, διατριβη περι ατονου και απνευματιστου γραφης της ἑλληνικης γλωσσης Μασσαλια 1884.
Irmischia. 1884. Nr. 11.
Abhandlungen des thüringischen botanischen Vereins Irmischia. Hft 3. p. 33—44.
G. van der Mensbrugghe, notice sur J. A. F. Plateau. Brux. 1884.
Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Vol. VII. Nr. 2—8. 11. Titel und Ind.
Rendiconti del r. istituto lombardo di scienze e lettere. Ser. II. Vol. XVI.
Memorie del r. istituto lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali Vol. XV. fasc. 2. Vol. XVI. fasc. 1. 2. Classe di scienze matemat. e naturali. Vol. XV. fasc. 2. 3.
Journal and proceedings of the 2. society of New South-Wales. Vol. XVII.
Memoirs of the geological survey of India. 10e ser. Vol. III. P. 4.
Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meissen. Bd. I. Heft 3.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. VI. Entr. 4.
Atti della societa toscana di scienze naturali. Processi verbali Vol. IV. pag. 125 - 145.
Resultados del observatorio nacional argentino en Cordoba. Vol. VII. VIII.
Hennike, F., das Reichspostmuseum S. A. aus Westermann's Monatsheften. (Geschenk des Herrn Staatssecretärs Stephan).
Bericht über die Wirksamkeit des electrotechnischen Vereins 1880—84 (desgl.).
Uebersichtskarte der Postanstalten des deutschen Reichs-Postgebiets nach dem Stande des Jahres 1883 gegen 1872 (desgl.).
Neues lausitzisches Magazin. Bd. LX. Heft 2.
John Hopkins University studies in historical and political science. 3. ser. I.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XVIII. Entr. 6.
Rhenus. Nr. 10—12.
Verhandlungen der physical.-med. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. XVIII.
Sitzungsberichte der physicalisch-medicin. Gesellschaft in Würzburg. 1884.
Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. 3e Reeks. IX.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche der kgl. ungarischen geologischen Anstalt. Bd. VII. Heft 2.
General-Index sämmtlicher Publicationen der ungarischen geolog. Gesellschaft. 1852—1882.
Simonyi, S., die ungarischen Bindewörter, zugleich Syntax des zusammengesetzten Satzes. Bd. I. Budapest 1881. 8 (Ungarisch).
Beiträge zur Kenntniß und Vergleichung der Ugrischen Sprachen. Heft 1. Herausgg. von Arvid Genitz. Budapest 1879. 8. (Ungarisch).
Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indie. D. X. St. 1.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXXVIII. Hft. 4.
A. Selwyn and G. M. Dawson, descriptive sketch of the physical geography and geology of the dominion of Canada. With map.
W. Fraser Tolmie and G. M. Dawson, comparative vocabularios of the Indian tribes of british Columbia. With a map.
Bulletin de l'académie imp. des sciences de Petersbourg. T. XXIX. Nr. 4.

Ztschr. für Naturwissensch. vom naturwissenschaftl. Verein für Sachsen u. Thüringen. Bd. LVII. Heft 5.
Wolf, astronomische Mittheilungen. LXIII.

Februar 1885.

Sitzungsberichte der physicalisch-medicin. Gesellschaft in Erlangen. Heft 16.
Mittheilungen aus dem anthropologischen Vereine in Coburg bei Gelegenheit des 10jähr. Stiftungsfestes. Coburg 1885. 4.
Astronomical papers prepared for the use of the american ephemeris and nautical Almanac. Vol. III. P. 2. 3.
G. vom Rath, Mineralogische Notizen. S.-A. aus den Verhandl. des rhein. naturhistor. Vereins.
Transactions and proceedings of the roy. society of Victoria. Vol. XX.
L. Vanderkindere, l'université de Bruxelles. Bruxelles 1884. 8.
Johns Hopkins university circulars. Vol. IV. Nr. 36.
Nature Nr. 797. 798. 799. 800.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. VII. Entr. 1.
Atti della reale accademia dei Lincei. Serie IV. Rendiconti. Vol. I. Fasc. 1. 2. 3.
Jahresbericht des nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. XXXVII.
Bulletin de la société mathemat. de France. T. XII. Nr. 5.
13. Bericht, Festschrift zur Halbsäcularfeier der naturforschenden Gesellschaft in Bamberg 1884.
Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Bd XX. Febr.
Flora batava. Afl. 267. 268.
American Journal of mathematics. Vol. VII. Nr. 2.
Ungarische Revue 1885. Heft 1.
Leopoldina. Heft XXI. Nr. 1. 2.
M. J. Boussinesq, application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris 1885.
Ders., sur la poussée d'une masse de sable à surface super. horizontale contre une paroi verticale ou inclinée.
Annales de la faculté des lettres de Bordeaux. 2e sér. Nr. 3.
Delisle, les registres d'Innocent III. Janv. 1885.
E. A. Bond and E. M. Thompson, the palaeographical society.
Bulletin de l'academie roy. des sciences etc. de Belgique. 3e sér. T. VIII. Nr. 12. T. IX. Nr. 1.
Annales de la société géologique de Belgique. T. XI.
Annuaire de l'academie roy. des sciences etc. de Belgique. 1885.
Atti della r. accademia dei lincei. Serie 4a. Rendiconti. Vol. I. fasc. 4.
Ohrtmann's Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XIV. Hft 2.
Annales du Musée Guimet. T. VII.
» » » » Revue de l'histoire des réligions. T. X. Nr. 1.
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLV. Nr. 3.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. VII. Entr. 2.
J. Strüver, über Columbit von Craveggia. S.-A.
Memoirs of the museum of comparat. zoology at Harvard's College. Vol. XI. P. 1.
Bijdragen tot de dierkunde uitgegeven door het genootschap Natura artis magistra te Amsterdam. 11e Afl.
Journal of the royal microscopical society. Vol. V. P. 1.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen u. historischen Classe der k. bairischen Academie der Wissenschaften. 1884. Hft. 3.
Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. XIX. Heft 3.
Bulletin of the american geographical society. 1884. Nr. 3.
Bulletin de la société mathématique de France. T. XII. Nr. 6.
Geologische Mittheilungen. Ztschr. der ungar. geolog. Gesellschaft. Bd. XIV. Heft 12. Bd. XV. Heft 1. 2.
Mittheilungen aus dem Jahrbuch der ungar. geolog. Anstalt. Bd. VII. Heft 3.
Jornal de sciencias matematicas e astronomicas. Vol. IV.
Verhandlungen der kais. königl. geologischen Reichsanstalt. 1884. Nr. 18.
Jahrbuch der kais. königl. geolog. Reichsanstalt. Bd. XXXIV. Heft 4.

Journal and proceedings of the r. society of New South Wales. Vol. XVI' Corrigendum for Vol. XV.
Memoirs of the geological survey of India. Vol. XX. P. 1. 2.
Palaeontologia indica. Ser. X. Vol. III. P. 2. 3. Ser. XIV. Vol. I. 3. Fasc. III.

März, April 1885.

Nature, Nr. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808 und 809.
Atti della r. accademia dei Lincei. Rendiconti. Vol. I. Fasc. 5. 6.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XX. März.
F. von Müller, a descriptive atlas of Eucalypts of Australia. Decad. X.
Anales de la officina meteorologica argentina. T. IV.
Bulletin de la société mathematique de France. T. XIII. Nr. 1. 2.
Proceedings of the London mathematical society. Nr. 231 - 234.
Journal of the New-York microscopical society. Vol. I. Nr. 2.
Anales de la sociedad cientifica argentina. T. XIX. Entr. 1.
Mittag-Leffler, acta mathematica. V, 2–4.
Ungarische Revue 1885. Heft 2. 3.
Carte géologique de la Finlande. Nr. 1—7.
Leopoldina. Heft XXI. Nr. 3. 4.
John Hopkins university studies in historical and political science. 3d series, II—III.
Local Institutions of Virginia by Edw. Ingle.
Anzeiger des germanischen Nationalmuseums. Bd. I. Heft 1.
Mittheilungen aus dem germanischen Museum. Bd. I. Heft 1.
Katalog der im germanischen Museum befindlichen Glasgemälde aus älterer Zeit. Nürnberg 1884.
L. von Borch, Beiträge zur Rechtsgeschichte des Mittelalters. Innsbruck 1881.
Verhandlungen des histor. Vereins von Oberpfalz. Regensburg. Bd. XXXVIII.
Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. XXVIII. P. 2.
Tijdschrift voor indische Land-, Taal- en Volkenkunde. D. XXIX. Afl. 5. 6.
Notulen van de algemeene en bestuursvergaderingen van het bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschapen. D. XXII. Afl. 2. 3.
A. Haga, nederlandsch Nieuw-Guinea en de papaesche eilanden. D. I. II. Batavia 1884.
F. v. Bezold, Rudolf Agricola, ein deutscher Vertreter der italienischen Renaissance. Festrede 1884.
Abhandlungen der mathematisch-physicalischen Classe der k. bair. Academie der Wissenschaften. Bd. XV. Abth. 1.
Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der k. bair. Academie der Wissenschaften. Bd. XVII. Abth. 1.
Reports of the scientific resultats of the voyage of H. M. ship Challenger. Zool. Vol. XI.
Astronomical and meteorological observations made during the year 1880 of the U. S. naval observatory. Washington 1884.
Proceedings of the boston society of natural history. Vol. XXII. P. 2. 3.
Memoirs of the boston society of natural history. Vol. III. Nr. 8—10.
Proceedings of the canadian institute Toronto. Vol. II. fasc. 3.
Monthly notices of the roy. astronomical society. Vol. XLV. Nr. 4.
G. Strüver, contribuzioni alla minerologia dei vulcani sabatini. P. I. S.-A.
Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba. T. VII. Entr. 3.
Atti del museo cirico di storia naturale di Trieste. Vol. VII.
C. Marchesetti, la necropoli di Vermo presso Pisino nell' Istria. S.-A.
Ders., di alcune antichità scoperte a Vermo presso Pisino d'Istria. S.-A.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

7. October. **№ 9.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 1. August 1885.

Riecke, Zur Pyroelectricität des Turmalins.

Voigt, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Wüstenfeld legt eine Abhandlung »Ueber die Scheriffe von Mekka im XI. (XVII.) Jahrhundert« vor.

von Koenen, Ueber die Krinoiden.

Dr. Hoppe, Das Spectrum des electrischen Büschellichtes (vorgelegt von Riecke).

Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen,

von **W. Voigt.**

(Mit einer Figurentafel.)

Obgleich durch Herrn von Helmholtz und Kirchhoff eine Methode gegeben ist, für den Fall einer ebenen Flüssigkeitsbewegung Probleme zu lösen, bei welchen die Flüssigkeit eine theilweise freie Oberfläche besitzt, sind doch erst wenige Beispiele der Art durchgeführt; es hat daher die folgende Mittheilung, welche eine Anwendung der Kirchhoff'schen Methode auf den Zusammenstoß von mehreren Flüssigkeitsstrahlen bringt, vielleicht einiges Interesse.

Bezeichnen φ_1, φ_2 für zwei Flüssigkeiten die Geschwindigkeitspotentiale stationärer Strömungen, so gelten bekanntlich bei ebenen Bewegungen innerhalb der Flüssigkeiten die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0, \tag{a}$$

$$\frac{p_1}{\varepsilon_1}=C_1-\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right), \qquad \frac{p_2}{\varepsilon_2}=C_2-\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right),$$

an den freien Oberflächen:

$$\frac{\partial\overline{\varphi_1}}{\partial n_1} = 0, \qquad \frac{\partial\overline{\varphi_2}}{\partial n_2} = 0, \qquad \overline{p_1} = c_1, \qquad \overline{p_2} = c_2, \qquad \text{b)}$$

worin p_1, p_2 die Drucke, ε_1, ε_2 die constanten Dichtigkeiten, C_1, C_2 und c_1, c_2 Constanten bezeichnen.

Längs der Trennungsfläche beider Flüssigkeiten, welche aus Stromcurven gebildet wird, die wir die singulären nennen wollen, gilt:

$$\frac{\partial\overline{\varphi_1}}{\partial n_1} = \frac{\partial\overline{\varphi_2}}{\partial n_2} = 0, \qquad \overline{p_1} = \overline{p_2}. \qquad \text{c)}$$

Wir wollen den Fall betrachten, daß zwei Strahlen aus dem Unendlichen kommen und im Endlichen zusammentreffen; die Geschwindigkeiten seien im Unendlichen in den Querschnitten constant G_1 und G_2, im Endlichen variabel V_1 und V_2, an den freien Oberflächen sei der Druck gleich Null; dann giebt die Grenzbedingung $\overline{p_1} = \overline{p_2}$ die Relation:

$$\varepsilon_1(G_1^2 - \overline{V}_1^2) = \varepsilon_2(G_2^2 - \overline{V}_2^2)$$

oder

$$\varepsilon_1 G_1^2 - \varepsilon_2 G_2^2 = \varepsilon_1 \overline{V}_1^2 - \varepsilon_2 \overline{V}_2^2. \qquad \text{c')}$$

Diese Formel zeigt, daß wenn im Unendlichen die lebendigen Kräfte der Volumeneinheit für beide Strahlen gleich sind, dieselben auch in jedem Punkte der gemeinsamen Grenze gleich sein müssen.

In diesem Falle kann man also die Bewegungen in beiden Strahlen durch das eine modificirte Geschwindigkeitspotential

$$\Phi$$

umfassen, welches im Gebiet der ersten Flüssigkeit gleich $\sqrt{\varepsilon_1}\,\varphi_1$, in dem der zweiten gleich $\sqrt{\varepsilon_2}\,\varphi_2$ ist und der Bedingung zu genügen hat, daß überall:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad 1)$$

n den freien Grenzen aber:

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}\right)^2 = G^2 \qquad 2)$$

sein muß; hierbei ist $\varepsilon_1 G_1^2 = \varepsilon_2 G_2^2 = G^2$ gesetzt.

Der Bequemlichkeit wegen wollen wir weiterhin Φ kurz das Geschwindigkeitspotential, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ die Geschwindigkeitscomponenten

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

7. October. **№ 9.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 1. August 1885.

Riecke, Zur Pyroelectricität des Turmalins.
Voigt, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.
Wüstenfeld legt eine Abhandlung »Ueber die Scheriffe von Mekka im XI. (XVII.) Jahrhundert« vor.
von Koenen, Ueber die Krinoiden.
Dr. Hoppe, Das Spectrum des electrischen Büschellichtes (vorgelegt von Riecke).

Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen,

von **W. Voigt.**

(Mit einer Figurentafel.)

Obgleich durch Herrn von Helmholtz und Kirchhoff eine Methode gegeben ist, für den Fall einer ebenen Flüssigkeitsbewegung Probleme zu lösen, bei welchen die Flüssigkeit eine theilweise freie Oberfläche besitzt, sind doch erst wenige Beispiele der Art durchgeführt; es hat daher die folgende Mittheilung, welche eine Anwendung der Kirchhoff'schen Methode auf den Zusammenstoß von mehreren Flüssigkeitsstrahlen bringt, vielleicht einiges Interesse.

Bezeichnen φ_1, φ_2 für zwei Flüssigkeiten die Geschwindigkeitspotentiale stationärer Strömungen, so gelten bekanntlich bei ebenen Bewegungen innerhalb der Flüssigkeiten die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0, \qquad \text{a)}$$

$$\frac{p_1}{\varepsilon_1}=C_1-\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right), \quad \frac{p_2}{\varepsilon_2}=C_2-\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right),$$

$$\Psi = \text{Const.}$$

das System der Strömungscurven, welche dem Geschwindigkeitspotential Φ entsprechen.

Es ist dann auch:

$$\frac{dz}{d\Omega} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}. \qquad 4)$$

»Nun setzen wir[1]):

$$\frac{dz}{d\Omega} = \zeta = \xi + i\eta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad 5)$$

und betrachten ξ und η als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, die wir die ζ-Ebene nennen werden; die ξ-Axe soll dabei parallel der x-Axe, die η-Axe parallel der y-Axe gewählt sein. Die Vergleichung der Gleichungen (4) und (5) zeigt dann, daß, wenn man von dem Punkte $\zeta = 0$ nach dem Punkte ζ eine gerade Linie zieht, die Länge dieser, also ρ, das Reciproke der Geschwindigkeit und ihre Richtung die Richtung der Bewegung in dem Punkte z ist«.

Da in unserm Problem n Strahlen mit gleichen (reducirten) Geschwindigkeiten aus dem Unendlichen kommen und in's Unendliche gehen, so kann derselbe Werth Ω an n verschiedenen Stellen der z-Ebene stattfinden mit Ausnahme derjenigen Werthe, welche der Geschwindigkeit Null entsprechen und welche an den oben definirten »Stoßcentren« eintreten.

Sind n stoßende Strahlen vorhanden so gehen nach dem Zusammenstoß auch n Strahlen in's Unendliche hinaus. Die Anzahl der Stoßcentren ist hierbei, wie man leicht durch die Anschauung erkennt, im Maximo $(n-1)$; in diesem Falle sind alle Stoßcentren auf der Grenze von nur je zwei Strahlen gelegen. Hängen in einem Stoßcentrum $(h+1)$ Strahlen zusammen, so kann man dasselbe als ein h-faches, durch Zusammenrücken von h ursprünglich getrennten einfachen Stoßcentren entstandenes betrachten. Der Grenzfall ist der nur eines $(n-1)$fachen Stoßcentrums.

Denken wir also die Werthe Ω, welche allen Punkten im Innern der Flüssigkeit entsprechen, auf einer Ω-Ebene ausgebreitet, so wird dieselbe n-blättrig zu wählen sein und innerhalb des Bereichs der Flüssigkeit in den $(n-1)$ Punkten, welche den Stoßcentren entsprechen und sämmtlich im Endlichen liegen, zusammenhängen. Das letztere

1) Kirchhoff, Mechanik p. 291, 1876.

Resultat liefert auch direct der von Riemann gegebene Satz[1]): Ist die Anzahl der Umdrehungen, welche die Grenze eines einfach zusammenhängenden endlichen Bereichs macht, gleich n, so ist die Anzahl der auf ihm liegenden einfachen Verzweigungspunkte gleich $(n-1)$.

Die freien Grenzen des Bereichs der Flüssigkeit sind in der ε-Ebene Stromcurven, müssen also in der Ω-Ebene Parallele zur Φ-Axe sein. Wir nehmen an, daß sie im ersten Blatt durch

$$\begin{array}{lll} & \Psi = +a_1 & \Psi = +b_1 \\ \text{im zweiten durch} & \Psi = +a_2 & \Psi = +b_2 \\ \text{im dritten durch} & \Psi = +a_3 & \Psi = +b_3 \\ & \cdots\cdots & \\ \text{im } n\text{ten durch} & \Psi = +a_n & \Psi = +b_n \end{array} \qquad 6)$$

gegeben seien; Punkte im Innern der Flüssigkeit entsprechen dabei Punkten zwischen diesen Geraden, das Gebiet der Flüssigkeit ist also der zwischen ihnen liegende n-fache Streifen. Damit derselbe zusammenhänge muß sein:

$$a_1 > b_1, \quad a_2 > b_2, \ \ldots\ldots \ a_n > b_n \text{ und auch}$$
$$a_2 > b_1, \quad a_3 > b_2, \ \ldots\ldots \ a_1 > b_n.$$

Da in den freien Grenzen ferner die constante (reducirte) Geschwindigkeit G stattfindet, so müssen sie sich in der ζ-Ebene nach dem Obigen als Theile eines Kreises vom Radius $R = 1/G$ um den Coordinatenanfang darstellen; Punkte im Innern der Flüssigkeit entsprechen dabei Punkten außerhalb des Kreises, da die Geschwindigkeit in der Grenze die größte sein muß, das ganze Gebiet der Flüssigkeit also der ganzen Umgebung des Kreises.

Dabei ist aber Folgendes hervorzuheben.

Die Radienvectoren von 0 nach ζ geben durch ihre Richtung an einer Stelle $\xi = R\cos\vartheta$, $\eta = R\sin\vartheta$ die Richtung der Bewegung, welche an der durch $\zeta = \xi + i\eta$ abgebildeten Stelle ε stattfindet. Die sämmtlichen beim Umlaufen der gesammten Flüssigkeit in den Grenzen anzutreffenden Bewegungsrichtungen müssen also beim Umlaufen des Kreises vom Radius R (das beiläufig in entgegengesetzter Richtung geschieht, da das Innere der Flüssigkeit der Umgebung des Kreises entspricht) durch die Richtungen der Radien wiedergegeben werden. Ist die Anzahl aller sich in's Unendliche erstreckenden (sowohl kommenden als gehenden) Strahlen gleich m, so

1) Riemann's Werke, Edit. H. Weber p. 106, Leipzig 1876.

ist die Summe der bei der Umlaufung angetroffenen Richtungsänderungen der Flüssigkeitsbewegung gleich

$$(m-2)\pi$$

oder da, wie oben gezeigt, m eine gerade Zahl $= 2n$ sein muß, weil ebenso viele Strahlen aus Unendlich kommen, wie nach Unendlich gehen müssen,

$$= 2(n-1)\pi.$$

Ebenso groß muß also auch die Summe der Richtungsänderungen bei Umlaufung des Kreises in der ζ-Ebene sein, d. h. die ζ-Ebene muß $(n-1)$ Blätter besitzen, welche außerhalb des Kreises vom Radius R in $n-2$ Punkten zusammenhängen, sodaß ein Umlauf längs des Kreises durch alle $(n-1)$ Blätter führt. Dies folgt aus dem oben citirten Riemann'schen Satz sogleich, wenn man nach der Methode der reciproken Radien die Umgebung des Kreises vom Radius R auf das Innere einer Kreisfläche vom Radius $\frac{1}{R}$ abbildet.

Wir betrachten die Abbildung des oben definirten n-fachen Streifens in der Ω-Ebene auf dieser $(n-1)$ blättrigen ζ-Ebene und wollen sie vermitteln durch die Abbildung auf einer einblättrigen ζ'-Ebene,

In dieser soll der $n$fache Streifen auf einem Kreis vom Radius R' so wiedergegeben werden, daß im ersten Blatt der Ω-Ebene der Punkt $\Phi = +\infty$ entspricht dem Punkt $\zeta' = R'$ der ζ'-Ebene,

ebenso $\Phi = -\infty$ $\qquad$ $\zeta' = R'e^{i\alpha_1'}$

im zweiten Blatte analog

$$\Phi = +\infty \text{ entspricht } \zeta' = R'e^{i\beta_1'}$$

$$\Phi = -\infty \qquad \zeta' = R'e^{i\alpha_2'}$$

im dritten Blatte

$$\Phi = +\infty \qquad \zeta' = R'e^{i\beta_2'}$$

$$\Phi = -\infty \qquad \zeta' = R'e^{i\alpha_3'}$$

. . . . . .

im $n$ten Blatte

$$\Phi = +\infty \qquad \zeta' = R'e^{i\beta_{n-1}'}$$

$$\Phi = -\infty \qquad \zeta' = R'e^{i\alpha_n'},$$

wobei $0 < \alpha_1' < \beta_1' < \alpha_2' < \beta_2' \ldots < \alpha_n' < \beta_n'$ und $\beta_n' = 2\pi$ ist.

Es muß also längs des Kreises vom Radius R' sein:

$$\begin{aligned}
\Omega &= ia_1 \text{ für } 0 < \vartheta' < \alpha_1' \\
\Omega &= ib_1 \;\; „ \;\; \alpha_1' < \vartheta' < \beta_1' \\
\Omega &= ia_2 \;\; „ \;\; \beta_1' < \vartheta' < \alpha_2' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Omega &= ia_n \;\; „ \;\; \beta_{n-1}' < \vartheta' < \alpha_n' \\
\Omega &= ib_n \;\; „ \;\; \alpha_n' < \vartheta' < \beta_n'.
\end{aligned} \tag{7}$$

Diesen Bedingungen wird genügt durch die Function:

$$\begin{aligned}
\Omega = \frac{i}{2\pi}[(a_1-b_1)\alpha_1'+(b_1-a_2)\beta_1'+(a_2-b_2)\alpha_2'+\cdots+(a_n-b_n)\alpha_n'+2\pi b_n] \\
+\frac{1}{\pi}\Big[(a_1-b_1)l\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\alpha_1'}\Big)+(b_1-a_2)l\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\beta_1'}\Big) \\
+\cdots(b_n-a_1)l\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{8}$$

Da bei der conformen Abbildung je ein innerer und ein Randpunkt sich beliebig entsprechend gewählt werden kann und letzterer bereits durch die Annahme, dass dem Punkt $\Phi = +\infty$ im ersten Blatt der Ω-Ebene $\zeta' = +R'$ entspricht, bestimmt ist, so kann nur noch über einen innern Punkt verfügt werden. Dem scheint zu widersprechen, daß bei willkürlich gewählten a_n, b_n noch $(2n-1)$ Größen α_n, β_n disponibel sind. Indeß ist zu beachten, daß die Verfügung über die a_n und b_n keineswegs den abzubildenden $n$fachen Streifen in der Ω-Ebene vollständig bestimmt, sondern dazu noch die Angabe der auf ihm liegenden $(n-1)$ Verzweigungspunkte nach Ort und Art erforderlich ist.

Die Bilder der Verzweigungspunkte in der ζ'-Ebene sind gegeben durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = 0$$

oder

$$0 = \frac{(a_1-b_1)e^{-i\alpha_1'}}{1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\alpha_1'}}+\frac{(b_1-a_2)e^{-i\beta_1'}}{1-\frac{\zeta'}{R'}e^{-i\beta_1'}}+\cdots \tag{9}$$

Die Gleichung ist vom $(2n-2)$ten Grade, da der Coefficient von $(\zeta')^{2n-1}$ identisch verschwindet. $(n-1)$ Wurzeln müssen Punkte innerhalb des Kreises vom Radius R' ergeben, da nach dem Riemann'schen Satz $(n-1)$ Verzweigungspunkte im Bereich der Flüssigkeit liegen müssen [1]).

---

1) Man kann aber diesen Nachweis hier einfach direct führen und somit sich der Anwendung jenes Satzes vollständig entschlagen. (s. folg. Seite.)

Ihre Lage wird bei unserm Problem kaum direct gegeben, sondern nur durch Verfügungen über Breite, Richtung und Lage der

---

Dazu bedenke man zunächst, daß

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = \Omega' \text{ gesetzt}$$

eine einwerthige Function von ζ' ist.

Ω' wird unendlich in den $2n$ Punkten $R'e^{i\alpha_1'}$, $R'e^{i\beta_1'}$, ... es muß also ebenso oft verschwinden. Zwei Nullpunkte fallen in's Unendliche, die übrigen im Allgemeinen in's Endliche. Wendet man den Satz, daß das Randintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d(l\Omega')$$

über eine beliebige geschlossene Curve ausgedehnt die Anzahl der umschlossenen Nullpunkte weniger der der umschlossenen Unendlichkeitspunkte giebt, auf einen Kreis an, der um den Punkt $\zeta' = 0$ mit einem unendlich wenig größeren oder kleineren Radius als R' beschrieben ist, so kann man die Anzahl der auf der Kreisfläche liegenden Nullpunkte von Ω' bestimmen.

Hierzu bemerke man, daß, weil die Größen a_ν, b_ν einen zusammenhängenden Streifen in der Ω-Ebene bestimmen sollen,

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= +A_1', \qquad a_2 - b_2 = +A_2', \ldots \\ -(b_1 - a_2) &= +B_1', \; -(b_2 - a_3) = +B_2', \ldots \end{aligned}$$

sämmtlich positive Größen sein müssen.

Die Gleichung $\Omega' = 0$ kann also geschrieben werden:

$$0 = \frac{A_1'}{R'e^{i\alpha_1'} - \zeta'} - \frac{B_1'}{R'e^{i\beta_1'} - \zeta'} \pm \ldots = \Phi' + i\Psi'$$

und stellt in ihrem reellen und imaginären Theil Φ' und Ψ' — mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen — die ξ- und η-Componente der Attraction dar, welche an der Stelle ζ' stattfinden würde, wenn in den Punkten $R'e^{i\alpha_1'}$, $R'e^{i\beta_1'}$, ... die Massen A_1, $-B_1$, A_2, $-B_2$, ... angebracht wären und nach dem Gesetz der (-1)ten Potenz der Entfernung wirkten. Das Integral

$$\int d(l\Omega')$$

wird hiernach

$$= \int d\left[\tfrac{1}{2} l(\Phi'^2 + \Psi'^2) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{\Phi'}{\Psi'}\right)\right],$$

und wenn man berücksichtigt, daß $\Phi'^2 + \Psi'^2$ das Quadrat der resultirenden Kraft, Ψ'/Φ' die negative Tangente des Winkels zwischen ihrer Richtung und der ξ-Axe ist, so erkennt man ohne alle Rechnung, daß der reelle Theil des Integrales über eine beliebige geschlossene Curve genommen verschwindet, der imaginäre die Summe aller Richtungsänderungen der resultirenden Kraft bei der Umlaufung der Curve ergiebt.

Für Punkte, welche einem Attractionscentrum unendlich nahe liegen, ist die Kraft nach diesem Centrum hin oder von ihm hinweg gerichtet je nach dem Vorzeichen der daselbst befindlichen Masse. Daher kann man für einen

Strahlen bestimmt sein. Sie ist bestimmt, wenn $(2n-2)$ reelle Relationen zwischen den a_ν, b_ν und α_ν, β_ν gegeben sind; da $(2n-1)$ α_ν, β_ν verfügbar sind, so bleibt, wie auch nöthig, bei festgesetzten a_ν, b_ν, noch eine übrig, um einen innern Punkt in den beiden auf einander abgebildeten Flächen sich entsprechen zu lassen. Wir wollen auf diese Verfügungen erst eingehen, wenn wir allgemein den Weg der Lösung vollständig angegeben haben.

Um die gewonnene Abbildung des $n$fachen Streifens auf dem Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene für unser hydrodynamisches Problem zu verwerthen, verfahren wir folgendermaßen.

Wir bilden zunächst den Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene in einer $(n-1)$ blättrigen ζ''-Ebene auf einen Kreis vom beliebigen Radius R' um den Coordinatenanfang so ab, daß die Punkte des ersteren, welche durch die Wurzeln der Gleichung (9) gegeben sind (d. h. die Bilder der Verzweigungspunkte in der Ω-Ebene) in letzterem übereinander und zwar in den Mittelpunkt fallen. Daß dies allgemein möglich ist erkennt man nach einer mündlichen Bemerkung meines verehrten Freundes H. Weber in Marburg leicht in folgender Weise.

Allgemein kann man außer einem Randpunkt nur einen innern Punkt bei der Abbildung sich entsprechen lassen. Geschieht die Abbildung des einfach zusammenhängenden Bereiches auf einer $(n-1)$ blättrigen Ebene, so sind die $(n-2)$ im Innern liegenden Verzweigungspunkte verfügbar und man kann durch ihre Wahl weitere $(n-2)$ innere Punkte sich entsprechen lassen; es können demnach im Ganzen die Bilder von $(n-1)$ Punkten des einblättrigen Kreises beliebig gewählt werden.

Schließlich bilden wir durch die Substitution

$$\zeta'' = \frac{1}{\zeta}$$

den Kreis vom Radius R'' in der $(n-1)$ blättrigen ζ''-Ebene auf der Umgebung des Kreises vom Radius $R = 1/R''$ in der gleichfalls

---

Kreis um den Punkt $\zeta' = 0$ der unendlich nahe dem das Flüssigkeitsgebiet begrenzenden liegt sogleich durch die Anschauung die Größe der obigen Richtungsänderung finden. Auf der Grenze selbst können keine Nullpunkte liegen, da in der Grenze die Geschwindigkeit gleich G, in den Verzweigungspunkten gleich Null ist.

Liegt der Kreis innerhalb desjenigen vom Radius R' so findet sich der Werth der Richtungsänderung $-(n-1)2\pi$, liegt er außerhalb $+(n+1)2\pi$; im ersteren Falle umschließt er nur die Nullpunkte im Innern des Kreises R'; im letzteren Falle auch die $2n$ Unendlichkeitspunkte; beides ergiebt übereinstimmend, daß sich insgesammt $(n-1)$ Nullpunkte auf der Fläche, also auch $(n-1)$ außerhalb befinden.

$(n-1)$ blättrigen ζ-Ebene ab, daß das Bild des Centrums in's Unendliche fällt. Dann ist zugleich der $n$fache Streifen in der Ω-Ebene ebenda so abgebildet, daß die Bilder seiner Verzweigungspunkte, d. h. der Stoßcentren, im Unendlichen, die seiner Grenzen auf der Peripherie des Kreises vom Radius R liegen.

Die gewonnene Relation zwischen Ω und ζ giebt dann für jedes System der darin vorkommenden Constanten a_n, b_n und α_n, β_n die Lösung eines Problemes des Stoßes für n Flüssigkeitsstrahlen. Nach (5) erhält man durch:

$$z = \int \zeta d\Omega + \text{Const.} \qquad 10)$$

zu jedem Punkt ζ oder Ω einen entsprechenden z der xy-Ebene; der Grenze des Streifens in der Ω-Ebene und zugleich dem Kreis vom Radius R in der ζ-Ebene entspricht die freie Grenze der Flüssigkeit ein negativer Umlauf des Kreises ergiebt einen positiven der Grenzen der Flüssigkeit. Wird auf dieser Kreislinie an den Punkten

$$-\vartheta = 0,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \ldots\ldots\ \alpha_n,\ \beta_n$$

(wobei $\beta_n = 2\pi(n-1)$ ist) Ω abwechselnd gleich $+\infty$ und $-\infty$, so geben

$$(\alpha_1 - 0),\ (\beta_1 - \alpha_1),\ (\alpha_2 - \beta_1),\ \ldots\ (\beta_n - \alpha_n)$$

die Richtungsänderungen der Strömung längs der $2n$ die freie Grenze der Flüssigkeit bildenden Stromfäden vom Unendlichen aus bis wieder in's Unendliche.

$$q = 0,\ \pi - \alpha_1,\ 2\pi - \beta_1,\ 3\pi - \alpha_2,\ \ldots\ (2n-1)\pi - \alpha_n,$$

sind daher die Winkel der x-Axe gegen die Radienvectoren nach den unendlich fernen Theilen der Strahlen oder gegen die Richtungen der Strahlen im Unendlichen selbst, diese Richtungen nicht im Sinne der Strömung, sondern stets in's Unendliche hinaus positiv gerechnet. Ist eine der Differenzen $\alpha_h - \beta_{h-1}$ oder $\beta_h - \alpha_h$ größer als π so schneidet das entsprechende Stück der Begrenzung sich selbst.

Fig. 1 giebt den Zusammenhang zwischen diesen Richtungen für eine zweiblättrige ζ-Ebene, also für drei zusammenstoßende Strahlen das untere Blatt ist schraffirt. Fig. 2 zeigt wie etwa bei gegebenen Constanten diese Flüssigkeitsbewegung verlaufen kann. Die punktirten Linien deuten die singulären Stromcurven an, ihre Schnittpunkte die Stoßcentren. Die Gleichungen der singulären Stromcurven erhält man, wenn man in der Formel (10), in welcher $\Omega = \Phi + i\Psi$ ist, dem Ψ successive diejenigen constanten Werthe beilegt, welche den Wurzeln der Gleichung (9)

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = 0$$

entsprechen; die Oerter der Stoßcentren geben sich, wenn man über Φ und Ψ demgemäß verfügt.

Wir wollen den vorstehend beschriebenen Weg der Lösung in dem einfachen, immer noch sehr allgemeinen Falle wirklich gehen, daß alle $(n-1)$ Stoßcentren zusammenfallen, d. h. die $(n-1)$ Verzweigungspunkte auf dem Kreis vom Radius R' identisch werden. Da dieser $(n-1)$ fache Verzweigungspunkt in den Coordinatenanfang von ζ' gebracht werden soll und dies nur auf eine Weise möglich ist, kann man ihn ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich bei der ersten Abbildung dahin fallen lassen. Hierzu ist erforderlich, daß die Gleichung (9) die $(n-1)$ fache Wurzel $\zeta' = 0$ besitzt und dies findet statt, wenn die $(n-1)$ Bedingungen erfüllt sind:

$$0 = (a_1 - b_1) e^{-ih\alpha_1'} + (b_1 - a_2) e^{-ih\beta_1'} + \cdots \qquad 11)$$

für $h = 1, 2, \ldots (n-1)$.

Dies giebt die $(2n-2)$ reellen Gleichungen [1]):

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 - b_1) \cos h\alpha_1' + \cdots \\ 0 &= (a_1 - b_1) \sin h\alpha_1' + \cdots \end{aligned} \qquad 12)$$

für $h = 1, 2, \ldots n-1$.

Soll dieser $(n-1)$ fache Windungspunkt $\Omega = 0$ entsprechen, was wegen der Willkürlichkeit des Coordinatenanfangs keine Beschränkung ist, so ist noch erforderlich, daß die b_λ sämmtlich negativ sind und gilt:

$$0 = (a_1 - b_1)\alpha_1' + (b_1 - a_2)\beta_1' + \cdots. \qquad 13)$$

Es sind also die $(2n-1)$ Größen α_λ, β_λ durch diese $(2n-1)$ Gleichungen bestimmt, wenn die a_λ, b_λ gegeben sind.

Nun werde gesetzt:

$$\zeta' = (\zeta'')^{\frac{1}{n-1}}$$

und

$$\zeta'' = \frac{1}{\zeta}, \text{ also } \zeta' = \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

so wird:

---

1) Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, daß bei Erfüllung dieser Relationen die übrigen $(n-1)$ Verzweigungspunkte sämmtlich in's Unendliche fallen.

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\Big[(a_1-b_1)\,l\Big(1-\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\frac{e^{-i\alpha_1'}}{R'}\Big) + (b_1-a_2)\,l\Big(1-\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\frac{e^{-i\beta_1'}}{R'}\Big)+\cdots\Big]$$

Hierin führen wir noch ein:

$$\alpha_h' = \frac{\alpha_h}{n-1} \quad \beta_h' = \frac{\beta_h}{n-1} \quad R' = \Big(\frac{1}{R}\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

und vertauschen die b_h mit $-b_h$, so erhalten wir:

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\Big\{(a_1+b_1)\,l\Big[1-\Big(\frac{Re^{-i\alpha_1}}{\zeta}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big] - (b_1+a_2)\,l\Big[1-\Big(\frac{Re^{-i\beta_1}}{\zeta}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big] \pm\cdots-(b_n+a_1)\,l\Big[1-\Big(\frac{R}{\zeta}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big]\Big\} \tag{14}$$

als diejenige Function, welche in dem behandelten Specialfall das Problem löst, wenn man dazu nimmt die Nebenbedingungen:

$$R = 1/G,$$

$$0 = (a_1+b_1)\,\alpha_1-(b_1+a_2)\,\beta_1+\cdots-b_n\,2\pi$$

$$0 = (a_1+b_1)\cos\frac{h\alpha_1}{n-1}-(b_1+a_2)\cos\frac{h\beta_1}{n-1}+\cdots + (a_n+b_n)\cos\frac{h\alpha_n}{n-1}-(b_n+a_1) \tag{15}$$

$$0 = (a_1+b_1)\sin\frac{h\alpha_1}{n-1}-(b_1+a_2)\sin\frac{h\beta_1}{n-1}+\cdots + (a_n+b_n)\sin\frac{h\alpha_n}{n-1},$$

für $h = 1, 2, \ldots n-1$.

Stoßen nur 2 Strahlen zusammen, so ist $n = 2$, die ζ-Ebene also einblättrig. Die obigen Formeln ergeben, wenn man dies einführt:

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\Big\{(a_1+b_1)\,l\Big(1-\frac{Re^{-i\alpha_1}}{\zeta}\Big)-(b_1+a_2)\,l\Big(1-\frac{Re^{-i\beta_1}}{\zeta}\Big) + (a_2+b_2)\,l\Big(1-\frac{Re^{-i\alpha_2}}{\zeta}\Big)-(b_2+a_1)\,l\Big(1-\frac{R}{\zeta}\Big)\Big\} \tag{16}$$

$$0 = (a_1+b_1)\,\alpha_1-(b_1+a_2)\,\beta_1+(a_2+b_2)\,\alpha_2-b_2\,2\pi$$

$$0 = (a_1+b_1)\cos\alpha_1-(b_1+a_2)\cos\beta_1+(a_2+b_2)\cos\alpha_2-(b_2+a_1) \tag{17}$$

$$0 = (a_1+b_1)\sin\alpha_1-(b_1+a_2)\sin\beta_1+(a_2+b_2)\sin\alpha_2.$$

Die Gleichung für z wird hiernach wegen

$$z = \int \varepsilon \, d\Omega + \text{Const.}$$

und falls man verfügt, daß ε mit Ω verschwinden, d. h. das Stoßcentrum in den Coordinatenanfang fallen soll:

$$z = \frac{R}{\pi}\{(a_1+b_1)e^{-i\alpha_1} l(\zeta - Re^{-i\alpha_1}) - (b_1+a_2)e^{-i\beta_1} l(\zeta - Re^{-i\beta_1}) + (a_2+b_2)e^{-i\alpha_2} l(\zeta - Re^{-i\alpha_2}) - (b_2+a_1) l(\zeta - R)\}. \quad 18)$$

Hieraus folgt, wenn man:

$$z = x + iy \qquad \zeta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

setzt:

$$\begin{aligned} x = \frac{R}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)\Big[\tfrac{1}{2}\cos\alpha_1 l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta+\alpha_1)) \\ &+ \sin\alpha_1 \operatorname{arctg}\Big(\frac{\rho\sin\vartheta + R\sin\alpha_1}{\rho\cos\vartheta - R\cos\alpha_1}\Big)\Big] \\ &-(b_1+a_2)\Big[\tfrac{1}{2}\cos\beta_1 l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta+\beta_1)) \\ &+ \sin\beta_1 \operatorname{arctg}\Big(\frac{\rho\sin\vartheta + R\sin\beta_1}{\rho\cos\vartheta - R\cos\beta_1}\Big)\Big] \\ &+(a_2+b_2)\Big[\tfrac{1}{2}\cos\alpha_2 l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta+\alpha_2)) \\ &+ \sin\alpha_2 \operatorname{arctg}\Big(\frac{\rho\sin\vartheta + R\sin\alpha_2}{\rho\cos\vartheta - R\cos\alpha_2}\Big)\Big] \\ &-(b_2+a_1)\tfrac{1}{2} l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\vartheta)\Big\}, \end{aligned} \quad 19)$$

$$\begin{aligned} y = -\frac{R}{\pi}\Big\{&(a_1+b_1)\Big[\tfrac{1}{2}\sin\alpha_1 l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta+\alpha_1)) \\ &- \cos\alpha_1 \operatorname{arctg}\Big(\frac{\rho\sin\vartheta + R\sin\alpha_1}{\rho\cos\vartheta - R\cos\alpha_1}\Big)\Big] \\ &-(b_1+a_2)\Big[\tfrac{1}{2}\sin\beta_1 l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta+\beta_1)) \\ &- \cos\beta_1 \operatorname{arctg}\Big(\frac{\rho\sin\vartheta + R\sin\beta_1}{\rho\cos\vartheta - R\cos\beta_1}\Big)\Big] \\ &+(a_2+b_2)\Big[\tfrac{1}{2}\sin\alpha_2 l(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta+\alpha_2)) \\ &- \cos\alpha_2 \operatorname{arctg}\Big(\frac{\rho\sin\vartheta + R\sin\alpha_2}{\rho\cos\vartheta - R\cos\alpha_2}\Big)\Big] \\ &-(b_2+a_1)\Big[-\operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\vartheta}{\rho\cos\vartheta - R}\Big]\Big\}. \end{aligned} \quad 19)$$

Nimmt man $\rho = R$ und läßt ϑ von 0 bis -2π abnehmen, so umläuft man zugleich in positiver Richtung die gesammte Flüssigkeit. Die Schwierigkeit, die in der Bestimmung des Werthes des arctg in den Ausdrücken von x und y liegt, umgeht man, indem man in (18) die Logarithmen entwickelt und den imaginären Theil nach der Formel:

$$\tfrac{1}{2}(\pi - \chi) = \sum \frac{\sin h\chi}{h} \quad \text{für } 0 < \chi < 2\pi$$

$$-\tfrac{1}{2}(\pi + \chi) = \sum \frac{\sin h\chi}{h} \quad \text{für } 0 > \chi > -2\pi$$

summirt. Man erhält so:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{R}{2\pi}\Big\{(a_1+b_1)\Big[\cos\alpha_1 l\Big(4\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big) \pm \sin\alpha_1(\pi \mp(\alpha_1+\vartheta)) \mp \cdots\Big]\Big\} \\ \bar{y} &= \frac{R}{2\pi}\Big\{(a_1+b_1)\Big[-\sin\alpha_1 l\Big(4\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big) \pm \cos\alpha_1(\pi \mp(\alpha_1+\vartheta)) \mp \cdots\Big]\Big\}.^{1)} \end{aligned} \qquad 20)$$

Das obere Zeichen gilt für $0 < (\alpha_1+\vartheta) < 2\pi$, das untere für $0 > (\alpha_1+\vartheta) > -2\pi$; analog in den anderen Gliedern.

Hiernach erkennt man sogleich, daß beim Passiren des Werthes $\vartheta = -\alpha_1$ springt:

$$\begin{aligned} \bar{x} &\text{ um } -R(a_1+b_1)\sin\alpha_1 \\ \bar{y} &\text{ um } -R(a_1+b_1)\cos\alpha_1. \end{aligned}$$

Es ist also $R(a_1+b_1) = A_1$ die Breite des in der Richtung α_1 aus Unendlich kommenden Stromes.

Ganz ebenso findet sich:

$$R(a_2+b_2) = A_2$$

die Breite des in der Richtung α_2 kommenden,

$$R(b_1+a_2) = B_1, \qquad R(b_2+a_1) = B_2$$

die Breiten der in der Richtung β_1 und β_2 $(= 0)$ in's Unendliche fließenden Strahlen.

Daß $A_1+A_2 \equiv B_1+B_2$ ist, sagt also aus, daß ebenso viel Flüssigkeit zu, wie abfließt.

Man kann hiernach die Resultate schreiben:

---

1) Hierin kann nach Formel (17) unter den Logarithmus der Factor 4 beliebig weggelassen werden.

$$\Omega = \frac{1}{\pi R}\{A_1 l(\zeta - Re^{-i\alpha_1}) - B_1 l(\zeta - Re^{-i\beta_1}) + A_2 l(\zeta - Re^{-i\alpha_2}) - B_2 l(\zeta - R)\}$$

$$z = \frac{1}{\pi}\{A_1 e^{-i\alpha_1} l(\zeta - Re^{-i\alpha_1}) - B_1 e^{-i\beta_1} l(\zeta - Re^{-i\beta_1}) + A_2 e^{-i\alpha_2} l(\zeta - Re^{-i\alpha_2}) - B_2 l(\zeta - R)\} \qquad 21)$$

$$x = \left\{\frac{A_1}{\pi}\left[-\frac{\cos\alpha_1}{2} l(\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\vartheta+\alpha_1)) + \sin\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{R\sin(\vartheta+\alpha_1)}{\rho - R\cos(\vartheta+\alpha_1)}\right] \mp \cdots\right\}$$

$$y = \left\{\frac{A_1}{\pi}\left[-\frac{\sin\alpha_1}{2} l(\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\vartheta+\alpha_1)) + \cos\alpha_1 \operatorname{arctg}\frac{R\sin(\vartheta+\alpha_1)}{\rho - R\cos(\vartheta+\alpha_1)}\right] \mp \cdots\right\}. \qquad 21)$$

Dazu die Bedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1\alpha_1 - B_1\beta_1 + A_2\alpha_2 - 2\pi b_2 R \\ 0 &= A_1\cos\alpha_1 - B_1\cos\beta_1 + A_2\cos\alpha_2 - B_2 \\ 0 &= A_1\sin\alpha_1 - B_1\sin\beta_1 + A_2\sin\alpha_2 \\ 0 &= A_1 - B_1 + A_2 - B_2. \end{aligned} \qquad 22)$$

Die zweite und drittte Gleichung hiervon hat den einfachen Sinn, daß die Schwerpunktsgeschwindigkeit der im Unendlichen in gleicher Zeit durch einen Querschnitt zu- und abströmenden Flüssigkeit gleich ist.

Es drückt sich nach diesen Formeln nicht Alles vollständig durch die Breiten und Richtungen der Strahlen aus, sondern es bleibt noch eine Größe (b_2) in den Formeln, die wesentlich von der Lage des Stoßcentrums abhängt. Da dieselbe nur in einer Gleichung vorkommt, so kann man sie willkürlich lassen und durch gegebene A, B und α, β bestimmen. Dabei ist nur das Eine zu beachten, daß b_2 sich positiv und kleiner als A_2/R und B_2/R ergeben muß, da $A_2 = (a_2 + b_2)R$, $B_2 = (b_2 + a_1)R$ ist und die a_k und b_k sämmtlich positiv sind; eine Bestimmung über den Zusammenhang zwischen den A, B und α, β giebt die erste Formel aber nicht.

Nach der Ableitung sind A_1, A_2 die Breiten der aus Unendlich kommenden B_1 B_2 der in's Unendliche gehenden Strahlen. Für die Discussion ist es bei der im Uebrigen gewählten Bezeichnung bequemer, diese Bedeutungen zu vertauschen. Dies ist erlaubt, d. h.

die ganze Flüssigkeitsbewegung kann einfach umgekehrt werden, weil wenn man in der Ω-Ebene das Coordinatensystem mit dem entgegengesetzten vertauscht, also die Bewegungsrichtung umkehrt (da wachsende Φ in abnehmende verwandelt werden) ε nichts weiter als das Vorzeichen ändert, also die Gestalt der Flüssigkeit erhalten bleibt und das ganze Bild nur um 180° gedreht wird. Da es aber auf die absolute Lage der Erscheinung nicht ankömmt, können wir diese Drehung auch ignoriren.

Die Bedingungen, um die es sich handelt, schreiben wir, indem wir alle Breiten durch $B_2 = B$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{A_1}{B} - \frac{B_1}{B} + \frac{A_2}{B} \\ 1 &= \frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\cos\beta_1 + \frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 \\ 0 &= \frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\sin\beta_1 + \frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 \\ 2\pi\frac{b_2 R}{B} &= \frac{A_1}{B}\alpha_1 - \frac{B_1}{B}\beta_1 + \frac{A_2}{B}\alpha_2. \end{aligned} \qquad 23)$$

Es gibt dabei:

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < 2\pi.$$

Man bemerkt: Sind alle drei Richtungswinkel α_1, β_1, α_2 gegeben, so sind der Verhältnisse der Breiten A, B vollständig bestimmt.

Es wird nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{B} &= \frac{\sin(\alpha_2-\beta_1) - (\sin\alpha_2 - \sin\beta_1)}{\Delta} \\ \frac{B_1}{B} &= \frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1) - (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}{\Delta} \\ \frac{A_2}{B} &= \frac{\sin(\beta_1-\alpha_1) - (\sin\beta_1 - \sin\alpha_1)}{\Delta} \end{aligned}$$

wenn: $\Delta = \sin(\alpha_2-\beta_1) + \sin(\beta_1-\alpha_1) - \sin(\alpha_2-\alpha_1)$ ist.

Einen physikalischen Sinn geben natürlich nur die Fälle, welche die A und B sämmtlich positiv werden lassen.

Die gewöhnliche Fragestellung wird die sein, daß das Verhältniß der Breiten B_1/B der stoßenden Strahlen und ihre gegenseitige Richtung, also β_1 gegeben ist, und die Breiten A_1, A_2 und Richtungen α_1, α_2 der resultirenden Strahlen gesucht werden.

Hier reichen die drei ersten Gleichungen (23) zur Bestimmung

nicht aus, sondern es giebt unendlich viele Lösungen. Bestimmt wird das Problem erst, wenn noch eine der Größen für die resultirenden Strahlen gegeben ist, oder über $b_2 R$, d. h. über die Lage des Stoßcentrums in der Flüssigkeit verfügt ist. Im letzteren Falle werden die Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten transcendent. Ist im ersteren, hiernach günstigeren Falle α_1 gegeben, so wird:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{B_1(1-\cos\beta_1)}{B_2(1-\cos\alpha_1)+B_1(1-\cos(\beta_1-\alpha_1))}$$

alles Uebrige ergiebt sich hieraus leicht.

Die Rolle, welche $b_2 R$ bei dem Problem spielt, übersieht man am deutlichsten in dem Falle gleich breiter, in entgegengesetzter Richtung zusammenstoßender Strahlen. Dann ergiebt sich wegen:

$$B_1 = B, \quad \beta_1 = \pi$$

sogleich:

$$B_1 = A_1 = A_2, \quad \alpha_2 = \pi + \alpha_1$$

und aus der vierten Formel (23) folgt:

$$\frac{Rb_2}{B}\pi = \alpha_1.$$

Es wird also $Rb_2/B = 0$ oder 1 wenn $\alpha_1 = 0$ oder π ist; im Falle, daß die Strahlen aneinander hingehen rückt also das Stoßcentrum in die Oberfläche, je mehr der Stoß central ist, um so näher liegt es der Mitte der Strahlen. Analoges gilt auch für den directen Stoß zweier ungleich breiter Strahlen.

Dies ist mit der directen Anschauung in vollkommenem Einklang. Ueberraschend ist aber, daß die Theorie auch für den schiefen Stoß in gleicher Weise eine verschiedene Lage des Stoßcentrums und demgemäß bei demselben gegenseitigen Richtungswinkel einen verschiedenen Verlauf der Erscheinung zuläßt. Man kann sich von der Nothwendigkeit dieser Thatsache Rechenschaft geben, indem man überlegt, daß wenn man ursprünglich entgegengesetzt gerichtete stoßende Strahlen um einen unendlich kleinen Winkel gegeneinander neigt, nothwendig auch nur eine unendlich kleine Aenderung der ganzen resultirenden Bewegung eintreten muß und hiernach bei verschiedenen in verschiedener Weise excentrisch stoßenden Paaren durch diese kleine Neigung nicht die gleiche Bewegung entstehen kann, sondern eine Verschiedenheit bestehen bleiben muß, wenngleich die verschiedenen Paare gleiche Breite und gleiche Richtung der stoßenden Strahlen besitzen.

Es muß also die stationäre Bewegung bei dem Zusammentreffen

mehrerer Flüssigkeitsstrahlen von den Umständen beim ersten Beginn dieser Bewegung abhängig sein. Etwas Aehnliches hat sich auch in andern Gebieten der Hydrodynamik ergeben.

Wir wollen schließlich ein einfaches Beispiel in Rücksicht auf das eben Erörterte ausführlicher behandeln.

Es sei gegeben

$$B_1 = B, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

d. h. der Zusammenstoß zweier gleich breiter Strahlen unter rechtem Winkel. Dann geben die 4 Bedingungen:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{A_1+A_2}{B} \\ 1 &= \frac{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}{B} \\ 1 &= \frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{B} \\ \frac{Rb_2}{B} &= \frac{A_1\alpha_1+A_2\alpha_2}{2\pi B}-\frac{1}{4} \end{aligned} \qquad 24)$$

also:

$$\frac{A_1}{B} = \frac{1}{2-(\cos\alpha_1+\sin\alpha_1)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{1-3\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}.$$

Ferner:

$$\Omega = \frac{B}{\pi R}\left\{\frac{A_1}{B}l(\zeta-Re^{-i\alpha_1})+\frac{A_2}{B}l(\zeta-Re^{-i\alpha_2})-l((\zeta-R)(\zeta+iR))\right\},$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = +\frac{B}{2\pi}\Big\{&\Big[\frac{A_1}{B}\cos\alpha_1 l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big)+\frac{A_2}{B}\cos\alpha_2 l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_2}{2}\Big)-l\Big(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\Big)\Big] \\ &+\Big[\pm\frac{A_1}{B}\sin\alpha_1(\pi\mp(\alpha_1+\vartheta))\pm\frac{A_2}{B}\sin\alpha_2(\pi\mp(\alpha_2+\vartheta))\mp\Big(\pi\mp\Big(\frac{\pi}{2}+\vartheta\Big)\Big)\Big]\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\Big\{&+\Big[\frac{A_1}{B}\sin\alpha_1 l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}\Big)+\frac{A_2}{B}\sin\alpha_2 l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\alpha_2}{2}\Big)-l\Big(\sin^2\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{2}\Big)\Big] \\ &+\Big[\mp\frac{A_1}{B}\cos\alpha_1(\pi\mp(\alpha_1+\vartheta))\mp\frac{A_2}{B}\cos\alpha_2(\pi\mp(\alpha_2+\vartheta))\pm(\pi\mp\vartheta)\Big]\Big\}. \end{aligned} \qquad 25)$$

Das obere Zeichen gilt in den 6 Gliedern, wenn resp. $(\alpha_1+\vartheta)$, $(\alpha_2+\vartheta)$, ϑ und $(\pi/2+\vartheta)$ zwischen 0 und 2π, das untere wenn es zwischen 0

und -2π liegt. Bei einem Umlauf der Flüssigkeit in positiver Richtung nimmt ϑ von 0 bis -2π ab, die Zeichenwechsel treten also bei

$$0,\ -\alpha_1,\ -\frac{\pi}{2},\ -\alpha_2,\ -2\pi \text{ ein.}$$

Wir wollen einige einfache Specialfälle untersuchen und durch Figuren eine ungefähre Vorstellung von dem Verlaufe der Flüssigkeitsbewegung zu geben versuchen. Nach dem Vorstehenden ist eine der beiden Größen α_1 und α_2 beliebig zu wählen. Wegen der allgemeinen Relation

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 = 2\pi$$

muß dabei aber sein:

$$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < 2\pi.$$

1) Sei zunächst: $\alpha_1 = 0$ so folgt:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2},\ A_1 = A_2 = B;\ a_1 = a_2 = \frac{B}{R},\ b_1 = b_2 = 0.$$

Die letzteren Werthe zeigen, daß der Streifen in der Ω-Ebene in beiden Blättern übereinanderfällt und ganz oberhalb der Φ-Axe liegt; der Verzweigungspunkt liegt auf der Begrenzung. Dieser Fall ist also nicht möglich, er giebt kein Problem des Stoßes; wir haben uns vorzustellen, daß dabei die beiden unter $\pi/2$ gegeneinander geneigten (normal zur z-Ebene gemessen unendlich dünnen) Strahlen übereinander hinwegfließen ohne sich zu treffen.

Nimmt man α_1 unendlich klein, so wird:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1,\quad A_1 = B_2(1+\alpha_1),$$

$$A_2 = B_2(1-\alpha_1),\quad b_2 = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right)\alpha_1 B_2$$

der Verzweigungspunkt liegt also auf dem Streifen. Dieser Fall ist durch Fig. 3 angedeutet.

2) Setzt man $\alpha_2 = \pi$

so wird $\operatorname{tg}(\alpha_1/2) = \frac{1}{3}$, also α_1 nahe $0{,}2\,\pi$. Zugleich folgt:

$$A_1 = \tfrac{5}{3}B,\quad A_2 = \tfrac{1}{3}B,$$

$$a_1 = 0{,}92\frac{B}{R},\quad a_2 = 0{,}25\frac{B}{R},\quad b_1 = 0{,}75\frac{B}{R},\quad b_2 = 0{,}083\frac{B}{R};$$

die letzteren Werthe sind nur angenähert. Die Gestalt des Streifens in der Ω-Ebene ist in Fig. 4 gegeben.

Was die Flüssigkeitsbewegung selbst anbetrifft so bietet der Umstand eine Schwierigkeit, daß wegen $\beta_2 = 2\pi$, $\alpha_2 = \pi$ zwei entgegengesetzte fließende Strahlen sich parallel der x-Axe in's Unendliche erstrecken. Ihre gegenseitige Lage erhellt aus der Gleichung

$$\bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\left\{ l\left(\frac{\sin\frac{\vartheta+\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\vartheta+\frac{\pi}{2}}{2}}\right)^2 \mp \tfrac{1}{3}(\pi \mp (\alpha_1+\vartheta)) \pm \tfrac{1}{3}(\pi \mp (\pi+\vartheta)) \pm (\pi \mp \vartheta)\right\}.$$

Hierin ist bereits benutzt, daß $\sin\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$ ist.

Für $\vartheta = 0$ erhält man

$$\bar{y} = +\frac{B}{2\pi}\left\{ l(5) + \frac{(\pi - 4\alpha_1)}{3} + \pi(1 \mp 1)\right\}$$

Der Strahl B liegt also im Unendlichen zwischen diesen beiden Ordinaten.

Für $\vartheta = \pi$ aber folgt:

$$\bar{y} = -\frac{B}{2\pi}\left\{ l(2) - \frac{(\pi - 4\alpha_1)}{3} + \pi(\tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{3})\right\}$$

Hiernach werden die beiden parallelen Strahlen etwa so liegen wie die Figur 4 angiebt, nämlich im Unendlichen mit ihren benachbarten Grenzen um etwa $0{,}37\,B$ von einander entfernt.

3) Setzt man $\alpha_1 = \pi/4$ so resultirt:

$$\alpha_2 = \frac{5\pi}{4},\quad A_1 = \frac{B}{2-\sqrt{2}} = 1{,}71\,B,\quad A_2 = B\frac{3-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 0{,}29B,$$

$$a_1 = 0{,}855\,\frac{B}{R},\quad a_2 = 0{,}145\,\frac{B}{R},$$

$$b_1 = 0{,}855\,\frac{B}{R},\quad b_2 = 0{,}145\,\frac{B}{R}.$$

Der Streifen in der Ω-Ebene liegt, wie Fig. 5 zeigt, symmetrisch um die Φ-Axe und den Verzweigungspunkt. Die Flüssigkeitsstrahlen selbst sind in ihrer Gestalt leicht vorzustellen und ebenda angedeutet.

4) Setzt man $\alpha_2 = 3\pi/2$

so wird $\operatorname{tg}(\alpha_1/2) = \frac{1}{2}$, α_1 also nahe $0{,}3\,\pi$, ferner

$$A_1 = \tfrac{5}{3}B,\quad A_2 = \tfrac{1}{3}B,$$

$$a_1 = 0{,}75\,\frac{B}{R},\quad a_2 = 0{,}083\,\frac{B}{R},\quad b_1 = 0{,}92\,\frac{B}{R},\quad b_2 = 0{,}25\,\frac{B}{R}.$$

Der Fall ist das Gegenbild zu 2) wie die Fig. 6 weiter darlegt.

5) Setzt man endlich $\alpha_1 = \pi/2$, so erhält man den zweiten Grenzfall, welcher 1) entspricht. Es wird

$$\alpha_2 = 2\pi, \quad A_1 = A_2 = B, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = b_2 = \frac{B}{R}.$$

Fig. 7 giebt das zugehörige Bild.

Die singulären Stromcurven und die Stoßcentren sind nur nach Schätzung eingezeichnet. Ihre genaue Bestimmung ist schwierig. Sie werden erhalten, wenn man in der Formel (24) für Ω den imaginären Theil gleich Null setzt und die dieser Gleichung genügenden Paare ρ und ϑ in die allgemeinen Gleichungen (21) für x und y einführt. Eine Discussion der Gestalt dieser Curven dürfte ohne höchst umständliche Rechnungen selbst in den einfachsten Specialfällen nicht möglich sein.

Das Spektrum des Büschellichtes.

Von

Dr. Edm. Hoppe, Hamburg.

Vorgelegt von Eduard Riecke.

Das Spektrum des elektrischen Lichtes ist gleich nach der Frauenhoferschen Entdeckung untersucht und vielfach bis auf den heutigen Tag Gegenstand der Forschung gewesen. In Bezug auf das Spektrum des elektrischen Funkens kann die Arbeit von Masson[1]) als abschließend betrachtet werden, deren Resultate durch spätere Untersuchungen nur bestätigt sind und wenig erweitert. Das Büschellicht in seiner violetten Färbung ist dagegen bis heute selten Gegenstand der Untersuchung gewesen, oder wenn es geschah, waren die positiven Resultate gering. Gewöhnlich begnügte man sich das Licht im sogenannten elektrischen Ei zu untersuchen[2]) und seit der Construktion der Geißlerschen Röhren ist die spektroskopische Untersuchung der durch diese Röhren hingehenden Entladung ja ein allgemein eingeführter Versuch im physikalischen Prakticum geworden. Das Büschellicht im nicht luftverdünnten Raume ist meines Wissens nur von Dove[3]) und eingehender von A. Schimkow[4]) untersucht

1) Ann. de Chim. et de Phys. Ser. III. T. 31. p. 295.
2) van der Willigen in Pogg. Annal. Bd. 98. p. 494 u. Bd. 106. p. 610.
3) Pogg. Annal. Bd. 101. p. 292.
4) Pogg. Annal. Bd. 129. p. 508.

worden. Heutzutage, wo Lemström[1]) behauptet durch seine bekannten Versuche auf der Finnischen Polarstation durch elektrische Entladung einer Influenzmaschine das Spektrum des Nordlichtes hergestellt zu haben, muß gerade das Spektrum des gewöhnlichen Büschellichtes besonders interessieren. Dies war die Veranlassung, daß ich mich der Untersuchung zuwandte.

Zunächst untersuchte ich das Funkenspektrum und das der Geißlerschen Luftröhre, ohne etwas neues dabei gefunden zu haben. Als ich jedoch die Geißlersche Röhre mit dem Elektroden einer Holzschen Influenzmaschine verband, zeigte sich eine wesentliche Modifikation, je nachdem beide Platinösen mit den beiden Elektroden verbunden waren, oder nur eine. Es tritt nämlich im ersten Falle das bekannte Luftspektrum ein in derselben Weise wie bei Anwendung eines Ruhmkorff'schen Induktors, verbindet man dagegen nur eine Platinspitze mit der + Elektrode, während die negative Elektrode zur Erde abgeleitet ist, so erfolgt an der Platinspitze ein ganz schwaches Glimmlicht und das violette Licht verschwindet fast vollständig, sodaß ein Spektrum nicht wahrgenommen werden kann. Verbindet man dagegen die Platinspitze mit der negativen Elektrode, während die positive zur Erde abgeleitet ist, und läßt die andere Platinspitze unabgeleitet in die Luft ragen, so erfolgt ein in schneller Reihenfolge sich wiederholendes Aufleuchten in der Röhre und dies ist stark genug um mit einem gewöhnlichen Spektroskop untersucht zu werden. Selbstverständlich sind die Verstärkungsflaschen von der Maschine entfernt, wie bei allen folgenden Untersuchungen. Ist die Maschine nicht stark genug erregt um dies Aufleuchten zu bewirken, so genügt zur Hervorbringung dieses Aufleuchtens, daß man dem nicht abgeleiteten Platinende auf eine Distanz bis zu 2 cm einen Conduktor (etwa den angefeuchteten Finger) nähert. Das Spektroskop war ein gewöhnliches mit einem Flintglasprisma von 60°, die Kirchhoffsche Skala durfte zur Bestimmung der bei diesem Aufleuchten sichtbaren Linien nur äußerst schwach beleuchtet werden. Die Untersuchung selbst fand im völlig dunkeln Zimmer statt, auch die zur Skalenbeleuchtung nothwendige Gasflamme war mit einem langen Eisencylinder umgeben, der nur eine kleine Oeffnung hatte, welche hinreichte die Skala zu beleuchten, während alles andere Licht gänzlich abgeblendet war. Diese Vorrichtung ist nothwendig um das Auge für die schwachen Linien empfindlich genug zu machen, um ihre Lage scharf bestimmen zu können. Während nun beim gewöhnlichen Leuchten der Röhre eine ganze Reihe von Linien sichtbar sind, ist bei diesem Aufleuchten nur

1) Nature. 19. Febr. 1885. p. 372. u. Compt. rend. Bd. 99. p. 91.

möglich 3 Linien von dem dunkeln Hintergrunde zu unterscheiden und das auffallende dabei ist, daß es nicht Linien sind, welche in dem gewöhnlichen Spektrum sich durch besondere Helligkeit auszeichnen, sondern es sind Linien die freilich im Spektrum immer vorhanden sind, jedoch schwächer wie die hellen Linien im Roth und Gelb. Die Wellenlänge dieser 3 Linien bestimmt sich als Mittel aus je 4 Bestimmungen zu:

1) 0,0005581 mm 2) 0,0005282 mm 3) 0,0004876 mm

Diese 3 Linien waren im violetten Theil der Luftröhre allein sichtbar, während in dem kurzen rothen Licht die gewöhnliche große Anzahl Linien sichtbar waren, diese 3 aber so schwach, daß ich sie nur mit Mühe wieder auf der Skala auffinden konnte. Der Spalt war so weit geöffnet, daß die Natronlinien (Kirchhoff 1002,8 und 1006,8) eben noch als 2 Linien gesehen werden konnten, dabei erschienen alle 3 Linien scharf begrenzt. Auch bei größerer Spaltöffnung erschienen keine neuen Linien, nur glaube ich jenseits der dritten Linie schwache Spuren eines Bandes gesehen zu haben, im rothen und gelben Theil des Spektrums vor der Linie 1) war aber nichts zu sehen. Linie 2) war die hellste und ließ eine blasgrünliche Färbung wohl erkennen, während bei 1) und 3) eine Färbung nicht gut angebbar war.

Ich ging nun dazu über das Spektrum des Büschellichtes zu untersuchen. Schimkow[1]) hat diese Untersuchung in der Weise gemacht, daß er das Spektroskop richtete auf den Raum zwischen den Elektroden der Maschine selbst und hat hierbei versucht die Linien zu orientieren nach den bei Funkenentladung beobachteten. Abgesehen davon, daß diese Orientierung eine wenig zuverlässige ist, da die Helligkeitsgrade des Funkenspektrums und dieses Büschelspektrums so sehr verschieden sind, daß unmittelbar nach einer Funkenentladung es ganz unmöglich ist, die Linien des Büschels zu sehen, ist noch ein anderes Bedenken, welches es mir wünschenswerth machte diese Anordnung nicht zu wählen. Schimkow giebt selbst an, daß die bei violettem Lichtbüschel auftretenden Linien verschieden sind von den bei röthlichen Funken sich zeigenden Linien, nun ist aber zwischen den Elektroden ein ruhiges violettes Licht nicht zu erhalten, sondern dasselbe ist selbst bei größtmöglicher Distanz von röthlichen Linien durchzogen, welche also das Spektrum stören. Daher erzeugte ich das Büschellicht durch eine besondere Vorrichtung.

Ein dünnes Messingdrahtnetz rollte ich auf und zog die heraus-

1) l. c. p. 512.

ragenden Drahtenden aus, sodaß ein Drahtbesen von 1 cm Durchmesser und 0,4 cm Höhe gebildet wurde. Diesen befestigte ich auf einer vertikal verschiebbaren Hartgummistange und stellte die Vorrichtung so ein, daß die Enden des Drahtes mit dem unteren Spaltende in einer Horizontalebene lagen in einer Distanz von etwa 4 cm vom Spalt des Spektroskops. Dies Netz wurde durch einen glatten Kupferdraht mit der negativen Elektrode der doppeltwirkenden Holtzschen Maschine verbunden, während die positive abgeleitet wurde zur Erde. Sobald die Maschine in Thätigkeit gesetzt wird, erscheint über dem Drahtbesen ein intensives violettes Licht bis zur Höhe von 3 cm, während die Drahtspitzen wie roth glühende Punkte aussehen. Dies violette Licht untersuchte ich mit dem Spektroskop. Es muß, wenn einige Aussicht auf Erfolg geboten werden soll, die Untersuchung in einem völlig finstern Zimmer vorgenommen werden und das Auge muß längere Zeit in solchem Dunkel verweilen, ehe es empfindlich genug ist, überhaupt etwas zu sehen. Nach einiger Zeit erscheinen dann eine Anzahl Linien. Ich versuchte diese zuerst mit einem vorzüglichen Prisma à vision directe, welches der deutschen Polarexpedition mitgegeben war, zu bestimmen. Die Linien waren so schwach, daß es nicht möglich war mit Hülfe der Beleuchtungsvorrichtung die Lage zu bestimmen. Dies Spektroskop hat aber eine besonders brauchbare Einrichtung für solche Untersuchungen. An Stelle des Fadenkreuzes nämlich ist ein phosphorescierendes spitzes rechtwinkliges Dreieck in das Ocular gebracht, sodaß man mit Hilfe dieses mattleuchtenden Dreiecks auf die Linien einstellen kann. Trotzdem gelang es mir nur zwei Linien damit zu bestimmen, die eine nach Kirchhoffscher Skala zwischen 1235 und 1240, die zweite auf etwa 1936, doch waren die Bestimmungen nicht scharf genug, da die Linien nur sichtbar wurden bei recht weitem Spalt. Ich kehrte daher zu meinem gewöhnlichen Spektrometer zurück mit dem einen Prisma. Dies lieferte in der That die Linien in größerer Zahl und Schärfe, da ich hier mit ziemlich engem Spalt beobachten konnte Schwierigkeit machte zunächst die Beleuchtungsvorrichtung für die Skala, allein nach einiger Zeit gewöhnte sich das Auge so an die Dunkelheit, daß die Skala bei ganz matter Beleuchtung doch scharf sichtbar blieb. Jetzt bestimmte ich die Linien auf der Skala und berechnete ihre Wellenlänge durch Interpolation mit Hülfe der Kirchhoffschen Festsetzung für die *D*- *E*- und *F*-Linie. Ich bemerke, daß die beifolgenden Zahlen die Resultate aus je 2 Ablesungen sind. Ich gebe die Beobachtungen von zwei verschiedenen Tagen, λ ist in 0,0001 mm ausgedrückt.

		λ	λ
Spalt recht eng:	1)	5,3734	5,3721
	2)	5,1850	5,1574
	3)	5,1382	—
	4)	5,0073	5,0074
	5)	4,8444	4,8441
	6)	4,7554	4,7499
Spalt erweitert:	7)	5,385	—
	8)	5,4992	—
Spalt ganz weit:	9)	5,5562	5,5534
Spalt mittlerer Weite:	(10)	—	5,2942
	11)	—	5,1741
	12)	—	5,1034
	13)	—	5,533
	14)	5,571	5,569
	15)	—	5,6362

Die unterstrichenen Wellenlängen sind für die hellsten Linien gültig, doch war keine Linie mit bestimmter Färbung zu erkennen, nur wenn die Skala nicht beleuchtet war, erschien Linie 1) und 14) grüngelb. Die Linie 15) war sehr lichtschwach und nur an einem Tage, wo die Feuchtigkeitsverhältnisse der Luft für die Thätigkeit der Maschine sehr günstig waren, bemerkbar. Die Messung ist nur für die unterstrichenen Linien so genau, wie sie sonst bei Spektrallinien möglich, während die andern weniger sicher bestimmbar waren. Ich bemerke ferner, daß das Büschellicht am gleichmäßigsten wird, wenn man über den Drahtbesen etwa in 3 cm Höhe einen Conduktor hält, am besten gelingt es mit dem angefeuchteten Finger. Man kann dann zur Controlle, ob während der Dauer der Versuche die Stellung des Apparates sich nicht geändert hat, auch mit Nutzen einmal einen schwachen Funken durch Annäherung des Fingers an den Draht vor dem Spalt erzeugen und hat dann das bekannte Funkenspektrum. Stellt man den Drahtbesen so ein, daß die leuchtenden Spitzen desselben auch im Gesichtsfeld erscheinen, so hat man die Controlle direkt, indem dann die zahlreichen Linien dieses Lichtes gleichmäßig an der oberen Seite des Gesichtsfeldes sichtbar sind, während die oben gemessenen Linien auf der Skala erscheinen. Die ganze Untersuchung erfordert aber eine große Geduld, da sehr oft die Maschine trotz sorgfältiger Erwärmung das violette Licht zu wenig intensiv giebt.

Ich habe dann statt mit dem Drahtbesen denselben Versuch mit einem kleinen feuchten Schwamme angestellt, doch ergab sich hier nicht die erhoffte Lichtstärke. Ueberzog ich dagegen den Schwamm mit einem weichen Stück Löschblatt, so erschien dieselbe Lichtstärke, der Schein aber wurde bedeutend höher und die Färbung eine mehr gelbliche, auch waren die Linien 5) und 6) dann nicht mehr sichtbar, während 9), 13), 14) und 15) besser einstellbar wurden. Wesentlich blieb die Gruppierung der Linien aber dieselbe.

Vergleicht man obige Linien mit den Spektrallinien des Nordlichtes, so ist bei letzteren die Unsicherheit in den Messungen sehr zu bedauern. Die charakteristische Linie des Nordlichtes ist von

Vogel an zwei aufeinanderfolgenden Tagen gemessen zu $\lambda = 5{,}572$; 5,574; 5,576 und 5,569[1]). Nordenskiöld[2]) giebt sie mit einer Wellenlänge 5,563, Angström[3]) mit 5,567 an. Es stimmt mit dieser die Linie 14) obigen Spektrums. Von den übrigen Linien der Vogelschen Messungen finde ich Uebereinstimmung zwischen der Nordlichtlinie 5,189 und Linie 2) oben, desgleichen 5,39 mit 1) oben und 5,004 mit 4) oben. Die übrigen Linien dagegen scheinen mehr oder weniger zu differieren, wenn deren Bestimmung überhaupt mit Genauigkeit erfolgen kann. Jedenfalls habe ich niemals im Spektrum dieses Büschellichtes eine Linie bemerken können von einer Wellenlänge 6,297, wie Vogel sie im Nordlichte bestimmte (die Zöllnersche rothe Linie), überhaupt war bei völlig unbeleuchteter Skala selbst nach mehrstündigem Aufenthalt im dunkeln Zimmer kein Licht vor der *D*-Linie zu sehen.

Daß jedoch die Uebereinstimmung dieser Nordlichtlinien mit den Linien des Büschellichtes eine rein zufällige sein sollte, wie Angström[4]) meint, scheint mir nicht glaubhaft. Denn das Nordlicht ist nicht nur in so hohen Luftschichten zu finden, daß die Verhältnisse dort ganz andere wären wie in dem Experimentierzimmer, nur die Temperatur ist eine andere. Schon Biot[5]) und Bergmann haben Nordlichter in niederen Höhen beobachtet, und auf mehreren Stationen der jüngsten Polarexpeditionen ist dies bestätigt, sodaß ich glaube, jene Uebereinstimmung ist in der elektrischen Natur des Nordlichtes begründet.

1) Pogg. Annal. 146. p. 569.
2) Die wissenschaftlichen Ergebnisse der Vega-Expedition I. p. 260.
3) Recherches sur le Spectre solaire p. 42.
4) Pogg. Annal. Jubelband p. 424.
5) Biot, Lehrbuch der Expm.-Phys. deutsch von Fechner. 1829. IV. p. 122 ff.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März, April 1885.

(Fortsetzung).

Records of the geological survey of India. Vol. XVIII. P. 1.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XX. Disp. 2.
Bulletin de l'académie roy. des sciences etc. de Belgique. 3e sér. T. IX. No. 2.
Johns Hopkins university circulars. Vol. IV. Nr. 37. 38.

Dr. Loewenberg, die Natur und Behandlung der Ozoena. S.-A aus der deutschen med. Wochenschrift.
Ders., eine neue Methode, die Wirkung des Politzer'schen Verfahrens auf ein Ohr zu localisiren. S.-A. ebendaher.
L. Kronecker, die Subterminanten symmetr. Systeme. Zur Theorie der ellipt. Functionen. Ueber den 3. Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes etc. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. S.-A. der Berliner Sitzungsberichte.
Ders., Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. Ebendah.
Ders., Addition au mémoire sur les unités complexes. S.-A. aus Comptes rendus.
Atti della r. accademia dei Lincei. Rendiconti. Vol. I. Fasc. 7.
Geologische Karte von Ungarn. Bd. Zone XVIII. Col. XXIX u. Erläuterung.
Beiträge zur Kenntniss der Flora der Vorwelt. Bd. II, herausg. von der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. XI. Abth. 1.
Commentaria in Aristotelem graeca edita consilio et autoritate academiae literarum reg. boruss. Vol. XVIII. P. 3.
Supplementum Aristotelicum. Vol. I. P. 1.
Mémoires de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. 7e sér. T. XXXII. Nr. 13.
Annalen des physicalischen Central-Observatoriums in St. Petersbourg. Jahrg. 1883. Thl. 1. 2.
Sitzungsberichte der k. preuss. Akademie der Wissenschaften 1884. XL—LIV.
Sitzungsberichte der mathematisch-physicalischen Classe der k. bair. Academie der Wissensch. 1884. Hft. 4.
Zeitschrift für Naturwissenschaften des naturwissenschaftl. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. III. Hft. 6.
Archives neerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. XIX. Livr. 4 (in duplo.)
Bijdragen tot de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-India. Deel X. St. 2.
Handelingen en mededeelingen van de maatschappij der nederlandsche letterkunde en Leiden 1884.
Levensberichten der afgestorvene medeleden van de maatschappij der nederlandsche Letterkunde. Bijlage tot de handelingen v. 1884.
Annales de l'école polytecnique de Delft. Livr. 2.
Bulletin de la societé impériale des naturalistes de Moskou. Année 1884. Nr. 2.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche der k. ungarischen geologischen Anstalt. Bd. VII. Heft 4
Atti della società toscana di scienze naturali. Memorie. Vol. IV. Fasc. 3.
P. Willems, Le sénat de la republique romaine. Appendice du tome I et registres. Louvain 1885. 8.
Verslagen en mededeelingen der koninklijke akademie van wetenschappen. Afd. natuurkunde. IIe reeks. Deel XIX und XX.
Naam- en Zaakregister op de verslagen en mededeelingen der k. akademie van wetenschappen. Afd. natuurkunde. IIe reeks. Deel I.
Verslagen en mededeelingen der k. akademie van wetenschappen. Afd. letterkunde. IIIe reeks. Deel I.
Jaarboek van de k. akademie van wetenschappen bevestigt te Amsterdam voor 1883.
Processen-verbaal van de gewone vergateringen der k. akademie van wetenschappen. Afd. natuurkunde. Mei 1883 — Maart 1884.
Petri Esseiva Juditha praemio aureo ornata in certamine poetico Hoeufftiano. Amstelodami 1884.
Ungarische Revue 1885. Heft 4.
54. 55. Jahresbericht des Vogtländischen Altertumsforschenden Vereins zu Hohenleuben und 6. u. 7. Jahresbericht des Geschichts- und Altertumsforschenden Vereins zu Schleiz.
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLV. Nr. 5.
Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Bd. XXII. Heft 1. 2. (In duplo.)

Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereines in Brünn über die Ergebnisse d. meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1882. (In duplo.)
Bulletin of the american geographical society. 1884. Nr. 4.
Irmischia. Jahrg. IV. Nr. 12. Tit. Jahrg. V. Nr. 1.
Johns Hopkins university circulars. Vol. IV. Nr. 34. 35. Tit.
Proceedings of the canadian institute. Toronto. 3d ser. Vol. III. Fasc. 1.
Bulletin of the california academy of sciences. Nr. 2. 3.
Boletin de la academia nacional de ciencias. Tomo VIII. Entr. 1a.
Atti della r. accademia dei Lincei. 4a ser. Rendiconti. Vol. I. Fasc. VIII.
Proceedings of the London mathematical society. Nos. 235. 236.
Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XX. April.
Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1884. Part. III. Nov. Dec.
Journal of the royal microscopical society. Vol. V. Part. 2.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. Vol. XX. Disp. 1. 3.
Memorie della reale accademia delle scienze di Torino. Ser. II. Tome XXXVI.
Anales estadistigos de la republica de Guatemala. 1883. Tomo II.
American journal of mathematics. Vol. VII. Nr. 3.
Den Norske Nordhavs-Expedition 1876–1878. XII. XIII. Zoologi.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1884. Heft 5 und 6.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. II.
Algumas Fumigações á Carga do vapor allemão »rosario«. Lisboa 1885.
Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Vereine von Neu-Vorpommern und Rügen. Jahrg. XVI.
Guido Hauck, die Grenzen zwischen Malerei und Plastik und die Gesetze des Reliefs. Rede zum Geburtstage des Kaisers in der k. technischen Hochschule zu Berlin 1885.
Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. XXXIV.
Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg. Bd. V.
Jahrbücher der k. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. N. F. Heft XIII.
Charles E. Putnam, Elephant Pipes in the museum of the academy of natural sciences. Davenport, Jowa.
S. de Wroblewski, Comment l'air a été liquéfié. Paris 1885.
F. von Maasburg, die Organisirung der böhmischen Halsgerichte im Jahre 1765. Prag 1884.
Ders., die Galeerenstrafe in den deutschen und böhmischen Erbländern Oesterreichs. Wien 1885.
Bulletin de la société mathém. de France. T. XIII. 1. 2.
Wroblewski, sur les phénomènes que présentent les gaz permanents evaporés. dans le vide. S.-A d. Comptes rendus de l'ac. d. sc.

Mai 1885.

Meddelanden af Societas pro fauna et flora fennica. Elfte Häftet. Helsingfors 1885. 8.
Bulletin de l'Acad. roy. des sciences des lettres et des beaux-arts de Belgique. 54 An. 3. sér. t. 9. Nr. 3.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XX. Disp. 4a.
Nature Nr. 809.
Atti della r. Accademia dei Lincei. Ser. 4. Rendiconti. Vol. I. Fasc. 9.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

9. December. **№ 10.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 7. November 1885.

Wieseler, Kritische Bemerkungen zu Pausanias Beschreibung der Akropolis von Athen, nebst zwei Exkursen archäologischen Inhalts.

De Lagarde kündigt die Herausgabe ungedruckter kappadokisch-griechischer Texte an. (Erscheinen in den Abhandlungen.)

Schwarz legt eine Abhandlung des Herrn Professor von Mangoldt in Hannover vor: Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte.

Voigt legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Volkmann in Königsberg i. Pr. vor: Ueber Mac Cullagh's Theorie der Totalreflexion für isotrope und anisotrope Medien.

Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

H. von Mangoldt.

(Vorgelegt von H. A. Schwarz.)

In der Abhandlung »zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen«[1]) hat Herr Weierstrass eine Reihe von Sätzen entwickelt, welche sich auf die Darstellung eindeutiger analytischer Functionen mit nur einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen durch unendliche Producte beziehen.

Diese Sätze können auf solche Functionen ausgedehnt werden, welche, wie die elliptischen Modulfunctionen, nur innerhalb eines

1) Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876.

4126 14/5

Teiles derjenigen Ebene existiren, deren Punkte die verschiedenen Werte der unabhängigen Veränderlichen geometrisch darstellen, und über die Begrenzung dieses Teiles hinaus eine analytische Fortsetzung nicht gestatten.

Es möge angenommen werden, die zu betrachtenden Functionen der unabhängigen Veränderlichen τ seien für alle diejenigen Werte dieser letzteren erklärt, welche eine positive zweite Coordinate besitzen. Das hierdurch charakterisirte Gebiet der Variabeln τ möge kurz als die »positive Halbebene« bezeichnet werden, und es sei ausdrücklich zugelassen, daß die Axe des Reellen für die Veränderlichkeit des Argumentes τ eine natürliche Grenze bilden darf. Dann gelten folgende Sätze:

1. Jede eindeutige Function von τ, welche im Innern der positiven Halbebene überall den Charakter einer ganzen Function besitzt, kann dargestellt werden in Gestalt eines Productes, dessen Factoren sämmtlich die Form haben

$$(k\tau + l) \cdot e^{g(\tau)},$$

wo k, l Constante bedeuten und $g(\tau)$ eine eindeutige Function von τ bezeichnet, welche im Innern der positiven Halbebene überall den Charakter einer ganzen Function besitzt.

2. Jede eindeutige Function von τ, welche im Innern der positiven Halbebene überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, kann als Quotient zweier Producte von der eben angegebenen Beschaffenheit dargestellt werden.

Schließt man den Fall aus, daß die betrachtete Function im Innern der positiven Halbebene Null- und Unendlichkeits-Stellen entweder gar nicht, oder nur in endlicher Anzahl besitzt, so darf man annehmen, daß jede der Constanten k den Wert 1 habe. Unter dieser Voraussetzung sind bei den erwähnten Darstellungen die linearen Bestandteile $(k\tau + l)$ der vorkommenden Factoren durch die Null- und Unendlichkeits-Stellen der darzustellenden Function völlig bestimmt, wogegen die zu jenen linearen Functionen hinzutretenden Zusatzfactoren $e^{g(\tau)}$ jedesmal in der manchfaltigsten Weise abgeändert werden können.

Will man für eine irgendwie gegebene eindeutige Function von τ, welche in der positiven Halbebene überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, die eben beschriebene Darstellung wirklich ausführen, so hat man zwei Aufgaben zu lösen: Man muß erstens

die Null- und Unendlichkeits-Stellen der gegebenen Function ermitteln und zweitens wenigstens ein System der Zusatzfactoren $e^{g(\tau)}$ bestimmen. Bei manchen elliptischen Modulfunctionen ist nun die Verteilung der Null- und Unendlichkeits-Stellen im Innern der positiven Halbebene bekannt, so daß man die linearen Bestandteile der Factoren, welche bei der erwähnten Darstellung dieser Functionen durch unendliche Producte auftreten, ohne Weiteres angeben kann. Aber die Bestimmung der hinzuzufügenden, die Convergenz bewirkenden Zusatzfactoren $e^{g(\tau)}$ ist für Functionen dieser Art meines Wissens bis jetzt noch in keinem einzigen speciellen Falle ausgeführt worden.

Deswegen ist es vielleicht nicht ohne Interesse, einige hierher gehörende Resultate mitzuteilen, deren Beweis auf Sätzen beruht, welche Herr Poincaré in seiner Abhandlung »Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes« [1]) entwickelt hat.

I.

Man betrachte den Modul k der Jacobischen elliptischen Functionen als eine Function des Periodenverhältnisses τ und setze

$$k^2 = \vartheta(\tau).$$

Ferner bezeichne man je zwei Werte der Größe τ als aequivalent, sobald der eine von ihnen aus dem anderen durch eine derjenigen linearen Substitutionen hervorgeht, welche die Function $\vartheta(\tau)$ ungeändert lassen, und verstehe unter ρ, σ irgend zwei im Innern der positiven Halbebene liegende nicht aequivalente specielle Werte von τ.

Dann kann man die Aufgabe stellen, die Function

$$\frac{\vartheta(\tau)-\vartheta(\rho)}{\vartheta(\tau)-\vartheta(\sigma)},$$

welche an der Stelle $\tau = \rho$ und jeder aequivalenten Stelle von der ersten Ordnung unendlich klein und an der Stelle σ und jeder aequivalenten Stelle von der ersten Ordnung unendlich gross wird, in der in der Einleitung angegebenen Form des Quotienten zweier Producte darzustellen.

Diese Aufgabe hat folgende Lösung:

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{(\tau+i)^6\cdot\left[\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\right]^3}{[\vartheta(\tau)]^2\cdot[\vartheta(\tau)-1]^2} = U(\tau)$$

1) Acta Mathematica, Bd. I, S. 193—294.

und bezeichne durch

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots \text{ und } \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$$

der Reihe nach die sämmtlichen Werte, welche dem Werte ρ, bezw. dem Werte σ aequivalent sind, wobei ρ_0 und σ_0 beziehentlich mit ρ und σ selbst übereinstimmen mögen. Dann besteht zunächst die Gleichung

$$\text{(1.)} \quad \frac{d}{d\tau}\log\frac{\theta(\tau)-\theta(\rho)}{\theta(\tau)-\theta(\sigma)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tau-\rho_\lambda}+\frac{U(\tau)-U(\rho_\lambda)}{U(\rho_\lambda)\cdot(\tau-\rho_\lambda)}\right\}-\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tau-\sigma_\lambda}+\frac{U(\tau)-U(\sigma_\lambda)}{U(\sigma_\lambda)\cdot(\tau-\sigma_\lambda)}\right\}.$$

Hier ist jede der beiden rechts vorkommenden unendlichen Reihen unbedingt convergent, und zwar nicht nur so lange τ im Innern der positiven Halbebene liegt, sondern auch dann noch, wenn τ mit irgend einem reellen rationalen Werte zusammenfällt.

Die zu den rationalen Functionen $\frac{1}{\tau-\rho_\lambda}$ und $\frac{1}{\tau-\sigma_\lambda}$ hinzutretenden, die Convergenz bewirkenden transcendenten Functionen

$$\frac{U(\tau)-U(\rho_\lambda)}{U(\rho_\lambda)\cdot(\tau-\rho_\lambda)} \quad \text{und} \quad \frac{U(\tau)-U(\sigma_\lambda)}{U(\sigma_\lambda)\cdot(\tau-\sigma_\lambda)}$$

haben sämmtlich im Innern der positiven Halbebene überall den Character ganzer Functionen. Daher wird durch Gleichung (1.) die Auflösung der Größe

$$\frac{d}{d\tau}\log\frac{\theta(\tau)-\theta(\rho)}{\theta(\tau)-\theta(\sigma)}$$

in eine convergente unendliche Reihe geleistet, von deren Gliedern jedes im Innern der positiven Halbebene nur an einer einzigen Stelle unendlich wird.

Aus (1.) folgt durch Integration zwischen den Grenzen 1 und τ und Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen

$$\text{(2.)} \quad \frac{\theta(\tau)-\theta(\rho)}{\theta(\tau)-\theta(\sigma)} = \frac{\prod_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\tau-\rho_\lambda}{1-\rho_\lambda}\cdot e^{\frac{1}{U(\rho_\lambda)}\cdot\int_1^\tau\frac{U(\tau)-U(\rho_\lambda)}{\tau-\rho_\lambda}d\tau}}{\prod_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\tau-\sigma_\lambda}{1-\sigma_\lambda}\cdot e^{\frac{1}{U(\sigma_\lambda)}\cdot\int_1^\tau\frac{U(\tau)-U(\sigma_\lambda)}{\tau-\sigma_\lambda}d\tau}}.$$

Hier verhalten sich die rechts auftretenden Exponenten im In-

nern der positiven Halbebene überall regulär, so daß der gefundene Ausdruck in der That die verlangte Form besitzt.

Aehnliche Formeln können auch für den Zähler $\theta(\tau) - \theta(\rho)$ des eben betrachteten Bruches allein hergestellt werden, doch fallen dieselben complicirter aus. Versteht man nämlich jetzt unter σ eine Hülfsgröße, welche im Innern der positiven Halbebene willkürlich angenommen werden darf, jedoch so, daß sie der Größe ρ nicht aequivalent ist, und fügt man zu den bisherigen Bezeichnungen, welche sämmtlich beibehalten werden mögen, noch die neue hinzu

$$U(\tau) \cdot \frac{\theta(\tau) - \theta(\sigma)}{\theta(\rho) - \theta(\sigma)} = U_1(\tau),$$

so besteht die Gleichung

(3.)
$$\frac{d \log [\theta(\tau) - \theta(\rho)]}{d\tau} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau - \rho_\lambda} + \frac{U_1(\tau) - U_1(\rho_\lambda)}{U_1(\rho_\lambda) \cdot (\tau - \rho_\lambda)} - \frac{\theta(\tau) - \theta(\sigma)}{\tau - \sigma_\lambda} \cdot \frac{U(\tau)}{[\theta(\rho) - \theta(\sigma)] \cdot U(\sigma_\lambda)} \right\}.$$

Hier ist die rechts stehende Reihe convergent, so lange τ im Innern der positiven Halbebene liegt. Die beiden Functionen welche in dem allgemeinen Gliede der Reihe zu der rationalen Function $\frac{1}{\tau - \rho_\lambda}$ hinzutreten, haben für jeden Wert von λ im Innern der positiven Halbebene überall den Charakter ganzer Functionen.

Bezeichnet man nun durch τ_0 irgend einen speciellen Wert von τ, für welchen die Function $\theta(\tau) - \theta(\rho)$ weder gleich Null, noch unendlich wird, so kann man aus Gleichung (3.) ähnlich wie oben eine Darstellung der Function

$$\frac{\theta(\tau) - \theta(\rho)}{\theta(\tau_0) - \theta(\rho)}$$

durch ein unendliches Product ableiten, welche indessen hier nicht angegeben werden soll.

II.

Aehnliche Sätze, wie diejenigen, welche im Vorhergehenden in Bezug auf die Function $k^2 = \theta(\tau)$ aufgestellt wurden, gelten von der sogenannten absoluten Invariante der elliptischen Functionen

$$j(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}.$$

Man nenne jetzt zwei Werte der Veränderlichen τ aequivalent,

sobald die Function $j(\tau)$ für beide den nämlichen Wert erlangt. Ferner bezeichne man wie vorher durch ρ und σ irgend zwei im Innern der positiven Halbebene liegende nicht aequivalente specielle Werte der Variabeln τ und durch

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots \text{ und } \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \quad (\rho_0 = \rho, \sigma_0 = \sigma)$$

der Reihe nach die sämmtlichen Größen, welche der Größe ρ, bezw. der Größe σ aequivalent sind. Endlich setze man zur Abkürzung

$$\frac{(\tau+i)^{11} \cdot \left[\frac{dj(\tau)}{d\tau}\right]^6}{[j(\tau)-1]^3 \cdot [j(\tau)]^4} = V(\tau).$$

Dann besteht die Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \log \frac{j(\tau)-j(\rho)}{j(\tau)-j(\sigma)}$$

$$(4.) \quad = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau-\rho_\lambda} + \frac{V(\tau)-V(\rho_\lambda)}{V(\rho_\lambda)\cdot(\tau-\rho_\lambda)} \right\} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau-\sigma_\lambda} + \frac{V(\tau)-V(\sigma_\lambda)}{V(\sigma_\lambda)\cdot(\tau-\sigma_\lambda)} \right\},$$

und hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 und τ und Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen

$$(5.) \quad \frac{j(\tau)-j(\rho)}{j(\tau)-j(\sigma)} = \frac{\prod_{\lambda=0}^{\infty}\left(1-\frac{\tau}{\rho_\lambda}\right) e^{\frac{1}{V(\rho_\lambda)} \cdot \int_0^\tau \frac{V(\tau)-V(\rho_\lambda)}{\tau-\rho_\lambda} d\tau}}{\prod_{\lambda=0}^{\infty}\left(1-\frac{\tau}{\sigma_\lambda}\right) e^{\frac{1}{V(\sigma_\lambda)} \cdot \int_0^\tau \frac{V(\tau)-V(\sigma_\lambda)}{\tau-\sigma_\lambda} d\tau}}.$$

Die hier vorkommenden unendlichen Reihen und Producte sind sämmtlich unbedingt convergent, und zwar sowohl, wenn τ im Innern der positiven Halbebene liegt, als auch dann noch, wenn τ mit einem reellen rationalen Werte zusammenfällt. Die Functionen

$$\frac{V(\tau)-V(\rho_\lambda)}{V(\rho_\lambda)\cdot(\tau-\rho_\lambda)} \quad \text{und} \quad \frac{V(\tau)-V(\sigma_\lambda)}{V(\sigma_\lambda)\cdot(\tau-\sigma_\lambda)}$$

und deren Integrale verhalten sich im Innern der positiven Halbebene überall regulär. Jeder Factor der beiden vorkommenden Producte ist daher eine eindeutige Function von τ und hat die Eigenschaft, im Innern der positiven Halbebene nur an einer einzigen Stelle zu verschwinden.

Endlich kann eine Gleichung aufgestellt werden, welche der Gleichung (3.) analog ist, und das System der Formeln (4.) und (5.) vervollständigt. Setzt man nämlich

$$V(\tau) \cdot \frac{j(\tau) - j(\sigma)}{j(\rho) - j(\sigma)} = V_1(\tau),$$

so erhält man

$$\frac{d}{d\tau} \log [j(\tau) - j(\rho)]$$

(6.)

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau - \rho_\lambda} + \frac{V_1(\tau) - V_1(\rho_\lambda)}{V_1(\rho_\lambda) \cdot (\tau - \rho_\lambda)} - \frac{j(\tau) - j(\sigma)}{\tau - \sigma_\lambda} \cdot \frac{V(\tau)}{[j(\rho) - j(\sigma)] \cdot V(\sigma_\lambda)} \right\}$$

Diese Gleichung gilt, solange τ im Innern der positiven Halbebene liegt. Die Größe σ ist hier wieder als eine Hülfsgröße anzusehen, welche der Größe ρ nicht aequivalent sein darf, aber sonst im Innern der positiven Halbebene willkürlich angenommen werden kann.

Die Betrachtungen, auf welchen die hier angegebenen Resultate beruhen, können auf allgemeinere eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich ausgedehnt werden.

Kritische Bemerkungen zu Pausanias' Beschreibung der Akropolis von Athen.

Nebst zwei archäologischen Excursen.

Von

Friedrich Wieseler.

Es war mir überraschend, als ich bei genauerer Prüfung des betreffenden Abschnittes von Pausanias' Beschreibung Griechenlands zu der Ueberzeugung gelangte, daß selbst in ihm, trotzdem daß er in neuerer Zeit von kundigen Gelehrten besonders eindringlich behandelt ist, noch zahlreiche nicht genügend erkannte und verbesserte Textesfehler stecken. Die im Folgenden behandelten Stellen sind nur ein Theil von denen, welche ich nebst Anderen für verderbt halte. Täusche ich mich nicht, so beruhen besonders viele Fehler auf Auslassungen von einzelnen Buchstaben, Worten, ja selbst ganzen Sätzen. Durch den Erweis dieses Umstandes kann selbst die in neuerer Zeit besonders angefochtene Zuverlässigkeit des Schriftstellers unter Umständen in ein besseres Licht gestellt werden.

I.

I, 22, 5, S. 3, Z. 8 fg. giebt der Jahn-Michaelis'sche Text: *ἀνήγειο μὲν γὰρ ἡ ναῦς μέλασιν ἱστίοις ἡ τοὺς παῖδας φέρουσα ἐς*

Κρήτην· Θησεὺς δὲ — πρὸς τὸν πατέρα προεῖπε χρήσεσθαι ἱστίοις λευκοῖς, ἣν ὀπίσω πλέῃ τοῦ ταύρου κρατήσας. τούτων λήθην ἔσχεν Ἀριάδνην ἀφηρημένος. ἐνταῦθα Αἰγεὺς ὡς εἶδεν ἱστίοις μέλασι τὴν ναῦν κομιζομένην — ἀφεὶς αὑτὸν διαφθείρεται.

In der Anm. zu Z. 8 wird bemerkt: »*ἱστίοις* Hitzigius Beitr. zur textkritik d. Paus. p. 12: *τοῖς ἱστίοις* codices«. Ohne Zweifel soll sich diese Angabe auf Z. 10 beziehen, wo die Handschriften in der That *χρήσεσθαι τοῖς ἱστίοις λευκοῖς*. Hitzig's Schrift ist mir nicht zur Hand. Ist seine Herstellungsweise die richtige, so würde das ohne Zweifel verderbte *τοῖς* als durch eine Dittographie und eine darauf folgende Correctur des ersten *ἱστίοις* entstanden zu betrachten sein. Aber man kann auch schreiben: *αὖθις*, »nachher« oder »hingegen«, welches Wort leicht in *τοῖς* verderbt werden konnte, nachdem seine beiden ersten Buchstaben wegen der beiden Endbuchstaben von *χρήσεσθαι* ausgefallen waren.

Auch in Z. 8 steckt vielleicht ein Fehler. Es befremdet, mein' ich, dass man in den Worten *μέλασιν ἱστίοις* das Adjectiv vor das Substantiv gesetzt findet, während jenes in Z. 9 fg. (*ἱστίοις λευκοῖς*) und Z. 11 (*ἱστίοις μέλασι*) hinter diesem steht. Sollte nicht auch dort *ἱστίοις μέλασιν* geschrieben gewesen sein?

II.

Sollte in den auf die sieben Weisen bezüglichen Worten I, 23, §. 1, Z. 1 fg.: *τούτων καὶ τὸν Λέσβιον τύραννον καὶ Περίανδρον εἶναί φασι τὸν Κυψέλου*, nicht zwischen *καὶ* und *τὸν* ausgefallen sein *Πιττακὸν*, was ja so leicht möglich war? Es gab ja nicht bloss einen, sondern mehrere Lesbische Tyrannen.

III.

Cap. 23, §. 3 ist bei Jahn-Michaelis S. 6 also gegeben: *Πλησίον δέ ἐστι Διιτρέφους χαλκοῦς ἀνδριὰς ὀιστοῖς βεβλημένος. οὗτος ὁ Διιτρέφης ἄλλα τε ἔπραξεν ὁπόσα λέγουσιν Ἀθηναῖοι καὶ Θρᾷκας μισθωτοὺς ἀφικομένους ὕστερον ἢ Δημοσθένης ἐς Συρακούσας ἐξέπλευσε, τούτους ὡς ὑστέρησαν ὁ Διιτρέφης ἀπῆγεν ὀπίσω. καὶ δὴ κατὰ τὸν Χαλκιδικὸν ἔσχεν Εὔριπον, ἔνθα Βοιωτῶν ἐν μεσογαίᾳ πόλις Μυκαλησσὸς ἦν· ταύτην ἐπαναβὰς ἐκ θαλάσσης ὁ Διιτρέφης εἶλε.*

In Z. 10 bieten die Handschriften *Διιτρεφοῦς* und *Διιτρέφης*. Bei Jahn-Michaelis ist Bergk's *Διιτρέφους* aufgenommen, aber nicht auch sein *βεβλημένον*, welches Letztere man für nöthig halten würde, wenn *Διιτρέφους* sicher stände. Wir ziehen aber vielmehr die andere Lesart *Διιτρέφης* vor, schreiben also: *Διιτρέφης, χ. ἀ. ὀ. βεβλημένος*, wobei gar keine Buchstabenveränderung nöthig ist. Auch weiter unten

§. 4 wird der Ausdruck *Διιτρέφης* von dem Erzbild dieses Mannes gebraucht: *Τοῦ δὲ Διιτρεφοῦς πλησίον (τὰς γὰρ εἰκόνας τὰς ἀφανεστέρας γράφειν οὐκ ἐθέλω).*

In Z. 11 fg. ist vor dem Worte *τούτους* sicherlich etwas ausgefallen. Die Vulgata kann unmöglich richtig sein, und anzunehmen, daß die Worte *τούτους — Διιτρέφης* ein Einschiebsel seien, hat durchaus keine Wahrscheinlichkeit. Die leichteste Herstellung ist wohl die, in Z. 11 zu schreiben: *καὶ τὰ ἐς Θρᾷκας*, oder *καὶ τὰ ἐς τοὺς Θρ.*, in welchem letzteren Falle auch hinter *μισθωτοὺς* ein *τοὺς* einzusetzen sein wird, was keine schwere Veränderung ist (die Handschriften geben: *μισθῷ τοὺς*). Mit *τούτους* beginnt also ein neuer Satz.

In Z. 13 haben die Handschriften *ἐσαναβὰς* an der Stelle der aufgenommenen Conjectur Letronne's *ἐπαναβὰς*. Nöthig ist diese keinesweges, da man zu *ἐσαναβὰς* ergänzen kann: *ἐς τὴν μεσόγαιαν.* Auch die von Letronne angeführte Stelle des Thukydides VII, 29, 3 spricht nicht für die Conjectur.

Nachdem Pausanias über die Thraker und die Mykalessier gesprochen, kehrt er §. 4, Z. 17 fg. zu dem Erzbilde des Diitrephes zurück mit den Worten: *τοσοῦτον μὲν παρέστη μοι θαῦμα ἐς τὴν εἰκόνα τοῦ Διιτρέφους, ὅτι ὀισιοῖς ἐβέβλητο* u. s. w. In ihnen steckt gewiß ein durch Auslassung mehrerer Worte entstandener Fehler. Der Perieget schrieb etwa: *τοσοῦτον μὲν [εἰρήσθω περὶ τῶν Θρᾳκῶν καὶ τῶν Μυκαλησσίων, ἰδόντι* (oder *λογιζομένῳ*) *δὲ] παρέστη* u. s. w. Vgl. Cap. 24, §. 6, S. 16, Z. 40.

IV.

Cap. 23, §. 5, S. 7, Z. 26 fg.: *Ἔστι δὲ λίθος οὐ μέγας, ἀλλ' ὅσον καθίζεσθαι μικρὸν ἄνδρα· ἐπὶ τούτῳ λέγουσιν ἀναπαύσασθαι τὸν Σειληνόν.*

Michaelis bemerkt: *μικρὸν* corruptum putant Schubartius et Walzius, delet Jahnius. Allein *μικρὸν* befremdet keinesweges, wenn man *μέγας* in dem Sinne von »hoch« faßt und die Worte *ὅσον — ἄνδρα* so, »daß ein kleiner Mann sich darauf niedersetzen kann« (ohne hinaufzuklettern zu brauchen). Die kleine, oft zwerghafte, Gestalt des Silen ist ja bekannt.

Z. 28 fg. heißt es weiter: *περὶ δὲ Σατύρων, οἵτινές εἰσιν, ἑτέρου πλέον ἐθέλων ἐπίστασθαι πολλοῖς αὐτῶν τούτων ἕνεκα ἐς λόγους ἦλθον.*

Schubart sah in Fleckeisen's Jahrb. für Philol. CXI, S. 415 richtig ein, dass *αὐτῶν* verderbt sei. Er schlug dafür vor: *ναύταις.* Viel leichter und passender ist die Veränderung in *ζητῶν*, »untersuchend, forschend«.

V.

Cap. 23, §. 6, Z. 31 fg. spricht Pausanias über die von den Schiffern Σατυρίδες genannten νῆσοι. Die verderbte Stelle am Anfang habe ich schon im Philologus XXVI, S. 354 besprochen. Mir erscheint noch jetzt der dort vorgeschlagene Verbesserungsversuch: ἐν δὲ ταύταις οἰκεῖν ἄνδρας ἀγρίους· ἄλλως δὲ οὐκ ἐθέλειν νηῒ προσίσχειν, als der wahrscheinlichste.

Dann kommt Z. 34 eine andere, noch nicht zur Genüge verbesserte Stelle: εἶναι δὲ τοὺς ἐνοικοῦντας καταπύρρους καὶ ἵππων οὐ πολὺ μείους ἔχειν ἐπὶ τοῖς ἰσχίοις οὐράς. Καταπύρρους ist Conjectur von Siebelis. In den meisten Handschriften steht καὶ πυρρούς, im Vb καὶ πυρούς, im cod. Mosquensis καὶ καπυρρούς. Siebelis dachte daneben auch an πυρρούς mit Streichung des vorhergehenden καὶ, wie Clavier, während Schubart καὶ πυρρούς aufgenommen hat, was auch Siebelis im Texte beließ. Dagegen schlug Clavier auch καπυρούς vor, ebenso Schäfer und zuletzt noch Dindorf im Thesaurus von Stephanus u. d. W. Σάτυρος. Dies ist jedoch gewiß nicht das Richtige. Καταπύρρους würde in sprachlicher Hinsicht sehr wohl passen, besser als καὶ πυρρούς, da das καὶ auffällig ist. Aber es hat keine Wahrscheinlichkeit, daß bei Pausanias von röthlicher Haar- oder Hautfarbe der Satyrn die Rede gewesen sei, wie diese von Hippokrates dem Σκυθικὸν γένος zugeschrieben wird p. 292, 44. Den Σκιρτὸς πυρρογένειος des Dioscorides in der Anth. Pal. VII, 707 wird schwerlich Jemand veranschlagen wollen. Wer darauf achtet, daß im Folgenden von der widernatürlichen Unzucht und Geilheit der Satyrn ein Beispiel beigebracht wird, der wird wohl für das Wahrscheinlichste halten, daß καταπύγους geschrieben war. Die Form καταπυγος bezeugen Photius und Suidas ausdrücklich, indem sie καταπύγους durch κιναίδους erklären, auch Hesychius: καταπύγου· κιναίδου, ἤγουν ἀσελγοῦς. Der Comparativ καταπυγότερος findet sich von Sophron gebraucht bei Athen. VII, p. 281, E.

Wenn es schließlich Z. 36 fg. heißt: τοὺς ναύτας βάρβαρον γυναῖκα ἐκβαλεῖν ἐς τὴν νῆσον· ἐς ταύτην οὖν ἐρρίζειν τοὺς Σατύρους, οὐ μόνον ἧ καθέστηκεν, ἀλλὰ καὶ πᾶν τὸ σῶμα, so scheint uns in den letzten Worten καὶ in κατὰ zu verändern zu sein.

VI.

Cap. 23, §. 8, S. 9, Z. 46 fg. steht in Beziehung auf den ἵππος δούριος geschrieben: Μενεσθεὺς καὶ Τεῦκρος ὑπεκκύπτουσιν ἐξ αὐτοῦ, προσέτι δὲ καὶ οἱ παῖδες οἱ Θησέως.

Die Handschriften haben anstatt des von Bursian im Rhein. Mus. N. F. X, S. 517 vorgeschlagenen ὑπεκκύπτουσιν, welches Wort ein

ἄπαξ λεγόμενον sein würde, ὑπερκύπτουσιν. Bursian wurde zu seiner Conjectur durch die Ansicht veranlaßt, daß die Oeffnung gewiß nicht auf dem Rücken des Pferdes, sondern an der Seite desselben angebracht war. Auf den betreffenden uns erhaltenen Bildwerken sieht man die Griechen allerdings aus einer länglich viereckigen, vorher verdeckt gewesenen Oeffnung an der Seite des Bauches des Pferdes aus diesem herauskommen oder herausschauen, vgl. die Gemme bei Winckelmann Mon. ined. n. 140 = Millin Gal. myth. pl. CLXVII, n. 606 = Inghirami Gal. Omer. t. III, n. 29 = Overbeck Galler. her. Bildw. Taf. XXV, n. 19, wo ein Grieche unter Beihülfe Sinons aus der Oeffnung vermittelst der angelegten Leiter herabzusteigen im Begriff ist, während zwei andere sich schon an einem Seile auf den Boden herabgelassen haben; das Miniaturbild bei A. Mai Virgilii picturae ant. ex cod. Vatican., Romae 1835, t. XXV, wo Sinon von der entgegengesetzten Seite des Pferdes her die Klappe hebt, ein Kopf aus der Oeffnung über den unteren Rand derselben herausschaut, ein Grieche sich am Seile herunterläßt; das Relief der Etruskischen Aschenkiste in der Gal. Omer. n. 19 und besser abgebildet in Raoul-Rochette's Mon. inéd. pl. LVII, n. 1, und danach bei Overbeck a. a. O. Taf. XXV, n. 20, wo, wenn Overbeck S. 613 Recht hat, was ich aber bezweifele, ein ausgestiegener Grieche schon im Kampf mit den Trojanern befindlich erscheint und ein zweiter eben über eine Treppe aus dem Pferde heraussteigt[1]). Aber in der Darstellung des Erzbildes auf der Akropolis war ein früherer Augenblick, war die Sache überhaupt anders dargestellt. Die vier Griechischen Helden, sämmtlich Athener, hatten selbst von innen her die Bedeckung der Oeffnung, aus welcher sie hervorschauen, entfernt. Von Sinon und einer Leiter zum Herabsteigen ist gar nicht die Rede. Ich will nicht betonen, daß, wäre

1) Die »Treppe« statt der Leiter ist bedenklich, um so mehr als sie in eigenthümlicher Weise an der nicht sichtbaren Seite des Pferdes angelegt zu denken sein müßte. — Die übrigen Bildwerke, auf denen das hölzerne Pferd vorkommt, gehören nicht hieher. Sie sind meist von Overbeck a. a. O. S. 607 fg. zusammengestellt. Das von ihm S. 610, Anm. 5 erwähnte Relief des K. Mus. zu Berlin, ein Bruchstück eines Sarkophagdeckels, ist von Heydemann Iliupersis Taf. III, n. 2 herausgegeben und findet sich jetzt in Conze's Verzeichn. der ant. Sculpturen jenes Mus. unter n. 868 aufgeführt. Es bezieht sich auf die Einbringung des Pferdes. Auf die Verfertigung desselben wird die eigenthümliche Darstellung eines zu Saponara in der Basilicata gefundenen Carneols bezogen, der in Avellino's Bullett. arch. Napoletano, A. III, 1845 tav. III, n. 17 herausgegeben und p. 123 fg. besprochen ist. Von dem bei Overbeck S. 609 fg. erwähnten längst bekannten Etruskischen Spiegel befindet sich nach Gerhard's Angabe (Auserl. Vasenb. III, S. 149, Anm. 56) eine »Replik, vielleicht echt, in Thorwaldsen's Sammlung«.

die Oeffnung nur an der Seite angebracht gewesen, dieselbe eine Breitendimension gehabt haben müßte, welche den Anblick der betreffenden Seite zu einem recht unschönen gemacht haben würde. Die Hauptsache ist die, daß die oben erwähnten zunächst stehenden Bildwerke das Pferd nur von einer Seite zur Anschauung bringen, das Erzbild aber ein Rundwerk war. Bei einem solchen Werke mußte der Künstler beiden Seiten gleichmäßige Berücksichtigung widmen. Wer wird aber glauben, daß derselbe an jeder der beiden eine Oeffnung und je zwei der aus ihr hervorschauenden Athenischen Heroen dargestellt habe? Er genügte der Anforderung am Besten, wenn er die Heroen aus dem Pferde oben hervorragend und über dasselbe weg schauend bildete, so zwar, daß je zwei derselben das Gesicht nach den entgegenstehenden Seiten hinwandten. Jenes Hervorragen und Drüberwegsehen wird aber gerade durch das *ὑπερκύπτειν ἐξ αὐτοῦ* bezeichnet und zwar ganz genau; *ὑπεκκύπτειν* würde nicht so gut dazu passen, eher zu dem, was auf dem Miniaturbilde zu Vergil zu sehen ist. Bei Hesychios findet man angegeben: *Δούριος Ἵππος Ἀθήνησιν ἐν ἀκροπόλει χαλκοῦς ἐστιν, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκκύπτει ὁράτα.* Auch diese Angabe spricht für unsere Annahme.

VII.

Cap. 24, §. 1, S. 9 finden wir die in neuerer Zeit wiederholt behandelte Stelle über die Darstellung der Athena und des Marsyas nach den Handschriften ohne Veränderung wiedergegeben: *Ἐνταῦθα Ἀθηνᾶ πεποίηται τὸν Σειληνὸν Μαρσύαν παίουσα, ὅτι δὴ τοὺς αὐλοὺς ἀνέλοιτο ἐρρῖφθαι σφᾶς τῆς θεοῦ βουλομένης.*

Daß *παίουσα* verderbt ist, unterliegt gewiss keinem Zweifel, wenn auch Overbeck Gesch. der Griech. Plastik I, S. 209 u. 240, Anm. 165 anderer Meinung ist. Freilich dürfte keiner der bisher vorgebrachten Verbesserungsvorschläge das Richtige treffen. Ich meine jetzt, daß der Perieget schrieb: *Μαρσύαν αὐλοῦντα ἀναπαύουσα.* Die Handlung war demnach eine, welche sich an die auf der Berliner Gemme in den Denkm. d. a. Kunst II, 22, 239, c der dritt. Ausg. dargestellte unmittelbar anschloß.

VIII.

Cap. 24, §. 2, S. 10, Z. 6 fg. finden wir bei Jahn-Michaelis geschrieben: *Κεῖται δὲ καὶ Φρίξος ὁ Ἀθάμαντος ἐξενηνεγμένος ἐς Κόλχους ὑπὸ τοῦ κριοῦ. θύσας δὲ αὐτὸν ὅτῳ δὴ θεῷ, ὡς δὲ εἰκάσαι Διὶ τῷ Λαφυστίῳ καλουμένῳ παρὰ Ὀρχομενίοις* u. s. w. *Διὶ* fehlt in den Handschriften. Es beruht nur auf einer Conjectur Porson's, die keinesweges unumgänglich nöthig erscheint. Ich will nicht ver-

anschlagen, daß auf dem zuletzt von Conze im Verzeichniß der ant. Sculpturen d. K. Mus. z. Berlin S. 128, n. 718 aufgeführten, auf der Pnyx zu Athen gefundenen Votivrelief an Zeus Hypsistos *Εὐτυχία Ὑψίστῳ εὐχήν* steht. Wenn auch Dionysos gleichfalls den Beinamen *Λαφύστιος* hatte (Etymol. magn. u. d. W.), so kann doch unter dem *Λαφύστιος καλούμενος παρὰ Ὀρχομενίοις* nur Zeus verstanden werden. Wer jedoch glaubt, daß der Name des Zeus der Deutlichkeit wegen ausdrücklich angegeben gewesen sei (wie denn allerdings in der Stelle X, 34, 4 *τοῦ Διὸς τοῦ Λαφυστίου* steht), der wird vielmehr *τῷ Διὶ τῷ Λαφ.* zu schreiben haben, weil so leichter erhellt, wie die beiden ersten Worte ausfallen konnten, da auf sie ein anderes *τῷ* unmittelbar folgte.

IX.

Cap. 24, §. 3, S. 10, Z. 14 fg. steht folgender auf die Athenäer bezügliche Satz: *πρῶτοι μὲν γὰρ Ἀθηνᾶν ἐπωνόμασαν Ἐργάνην, πρώτους δ' ἀκώλους Ἑρμᾶς * * ὁμοῦ δέ σφισιν ἐν τῷ ναῷ Σπουδαίων δαίμων ἐστίν.*

Daß hinter *Ἑρμᾶς* etwas ausgefallen ist, steht sicher. Porson meinte: *ἀνέθεσαν.* Viel größere Wahrscheinlichkeit hat *εἰργάσαντο.* Doch ist es durchaus wahrscheinlich, daß mehr verloren gegangen ist als bloß das Verbum.

Für *ὁμοῦ* wollte Thiersch *ὁμοίως*, was schon an sich keine Wahrscheinlichkeit hat, wenn es auch unzweifelhaft ist, daß man *ὁμοῦ* nicht in der Bedeutung von simul, insuper, praeterea zu fassen hat, wie Siebelis Adnotationes p. 84 wollte. Welcker verband in der Griech. Götterlehre III, S. 218 *ὁμοῦ* mit *σφισιν*, indem er deutete »mit ihnen«, d. h. »mit Ergane und Hermes, in deren Tempel der Dämon aufgestellt war«. Für den Umstand, daß Athena Ergane und Hermes in einem und demselben Tempel verehrt worden seien, geben aber die vorhergehenden Worte auch nicht den mindesten Beleg. Auch sonst mangelt es an einem Zeugniß dafür durchaus und schon an sich ist die Sache nicht wahrscheinlich, da, wenn in dem Tempel der Ergane ein anderer höherer Gott mit dieser verehrt worden wäre, dieser eher Hephästos als Hermes gewesen sein würde, wie ja in dem Tempel des Hephästos zu Athen nach Pausanias I, 14, 5 neben der Statue desselben sich die der Athena befand. Daß nun in der Lücke hinter *Ἑρμᾶς*, wenn auch in ihr mit einigen Worten von dem Tempel der Ergane die Rede war, mehr als ein Bild, das der Göttin, als in demselben befindlich erwähnt gewesen wäre, hat durchaus keine Wahrscheinlichkeit. Daher wird man *σφισιν* auf die Athenäer zu beziehen haben, was auch schon an sich das Zunächstliegende ist. Dann fehlt aber vor *ἐν τῷ ναῷ* Etwas, das mit *ὁμοῦ* zu verbinden ist. Durch das betreffende Wort oder die betreffenden Worte wird

zugleich bezeichnet gewesen sein, welcher Gottheit ὁ ναὸς gehört habe[1]). So giebt es wohl keine leichtere Ergänzung als: ὁμοῦ δὲ [τῇ θεῷ] σφισιν ἐν τῷ ναῷ, »zugleich mit der Göttin«. Mit dieser kann nur Athena Ergane, d. h. die Statue derselben, und mit dem Tempel der ihrige gemeint sein.

In den Tempel der Ergane paßt auch die Statue des Σπουδαίων δαίμων auf das Beste. Daß an der so oft angetasteten handschriftlichen Ueberlieferung des ersteren Wortes nicht zu zweifeln ist, wird nun noch wahrscheinlicher. Wir schreiben auch Σπουδαίων und fassen das Wort als Nominativ eines nomen proprium, wie zuerst Kuhn that. Siebelis vergleicht p. 84 passend die dea Strenua apud August. C. D. IV, 11 a strenuum faciendo dicta. Welcker erklärt a. a. O. den Dämon als »Arbeitslust«.

X.

Cap. 24, §. 3, S. 11, Z. 17 fg.: κράνος ἐστὶν ἐπικείμενος ἀνῆρ * * Κλεοίτου, καί οἱ τοὺς ὄνυχας ἀργυροῦς ἐνεποίησεν ὁ Κλεοίτας.

Die Andeutung einer Lücke vor Κλεοίτου rührt von Jahn her. Daß diese an der betreffenden Stelle anzunehmen sei, scheint mir fraglich, so fest ich auch von dem Ausfall mehrerer Worte vor καί οἱ überzeugt bin.

Was stand etwa in der Lücke? Ueber Namen und Herkunft des ἀνῆρ verlautete gewiß ebenso wenig wie in Buch 6, Cap. 20, §. 14. Daß das ἐπίγραμμα nicht mitgetheilt war, erhellt aus derselben Stelle. War die Inschrift als Beleg für die Urheberschaft des Kleoitas veranschlagt, was allerdings nicht unmöglich ist, so war das ganz in der Kürze geschehen und eher hinter dem Worte Κλεοίτου als vor demselben, etwa mit den Worten: Κλεοίτου [ἔργον, ὡς τὸ ἐπίγραμμα δηλοῖ]. Endlich erregt auch die Nichtangabe des Materials nicht das mindeste Bedenken, um so weniger als aus den letzten Worten zur Genüge erhellt, daß das Werk von Bronze war.

Weiter hilft etwa die genauere Betrachtung der Worte von καί οἱ an. Warum heißt es: τοὺς ὄνυχας, nicht, ohne Artikel: ὄνυχας? Weshalb wird als derjenige, welcher jene ἐνεποίησεν, noch einmal ausdrücklich Kleoitas genannt, und zwar mit Hinzufügung des Artikels ὁ, welcher bei der ersten Angabe des Namens fehlt?

1) Gelegentlich mögen auch zwei auf die Athena Ergane bezügliche Schriftstellen berücksichtigt werden, welche in der Jahn-Michaelis'schen Ausgabe S. 11, zu Z. 15 angeführt sind. Aelian Var. hist. I, 2 erwähnt ὑφαντικὴν καὶ ὑφαίνειν, δῶρα Ἐργάνης δαίμονος. Sollte nicht zu schreiben sein: δαήμονος? Bei Plutarch de fort. 4, p. 99 B steht: τὴν γὰρ Ἐργάνην καὶ τὴν Ἀθηνᾶν u. s. w. Die drei letzten Worte wollte Hercher getilgt wissen. Ich glaube eher, daß für καὶ τὴν geschrieben war: κλητὴν.

Wenden wir uns zuerst zu der Beantwortung der letzteren Frage, so wird der befremdende Umstand ohne Zweifel am Leichtesten beseitigt werden durch die Annahme, daß ein Fehler in dem Worte *Κλεοίτας* am Schlusse des Satzes steckt. Pausanias schrieb vermuthlich: *ὁ Κλεοίτα*, »der Sohn des Kleoitas«. Damit ist *Ἀριστοκλῆς μαθητής τε καὶ υἱὸς Κλεοίτα* (Pausan. V, 24, 5) gemeint. Der Genetiv lautet auch bei Pausanias VI, 20, 14 *Κλεοίτα*. In der hier mitgetheilten metrischen Inschrift der Athenischen Statue steht als Nominativ *Κλειοίτας*, nicht *Κλειοίτης*. Wie leicht die Verderbniß von *Κλεοίτα* in *Κλεοίτας* war, liegt auf der Hand. Auch das vorhergehende *Κλεοίτου* dürfte in *Κλεοίτα* zu verändern sein. Daß die silbernen Nägel nicht erst nach der Zeit des Kleoitas hinzugefügt sind, liegt wohl auf der Hand. Aristokles ist also als Mitarbeiter des Vaters zu betrachten, wenn auch nur für eine solche Einzelnheit wie die Nägel, die er gewiß auch im Auftrag und unter Anweisung des Vaters machte. Daß er nicht selbstständig mitwirkte, geht aus dem Umstand hervor, daß seiner in der Inschrift gar keine Erwähnung geschieht. Von wem Pausanias die Notiz über des Aristokles Theilnahme an dem Werke hatte, läßt sich nicht nachweisen. Aller Wahrscheinlichkeit nach stammt dieselbe aber nicht bloß aus mündlicher Tradition. Sein Gewährsmann muß die silbernen Nägel für besonders beachtenswerth gehalten haben, und das sind sie auch für uns. Ich wenigstens kenne solche Nägel nur noch in einer verhältnißmäßig kleinen Zahl von Beispielen, von denen keins bis zur Zeit des Kleoitas hinaufreicht. H. E. K. Köhler giebt in einem Aufsatze über die zehn Bronzen aus Paramythia in Epirus, welche er längere Zeit unter Händen hatte, in den Gesammelten Schriften, herausg. von Stephani, Bd. VI, S. 34 an: »An allen sind die Nägel an Händen und Füßen, sowie die Augen nach einem allgemeinen Geschmacke bei den Alten in Arbeiten von Erz mit einer dünnen Silberplatte belegt und der Stern des Auges durch eine Vertiefung angegeben, die wahrscheinlich vormals mit einem Steine ausgefüllt war«. Hiernach sieht es ganz so aus, als ob solche silberne Nägel etwas Gewöhnliches seien. Dasselbe scheint Brunn's Meinung zu sein, wenn er in der Gesch. d. Griech. Künstler I, S. 108 sagt, das Einsetzen der Nägel aus Silber »beruhe auf einem Gebrauch, der in weiterer oder engerer Anwendung durch die Griechische Kunst aller Zeiten hindurchgehe«. Durch Köhler's Angabe erhalten wir wesentlich nur Beispiele für eine Gegend und eine Zeit, da die betreffenden zehn Statuetten aus einem und demselben Fundorte und aus derselben Zeit, der Hellenistischen Epoche, stammen[1]). Außerdem

1) Es darf zudem nicht verschwiegen werden, daß im Texte zu den Specim.

hören wir nur noch, und zwar schon durch Winckelmann Werke V, S. 154, §. 8, von silbernen Nägeln an Händen und Füßen »an ein paar kleinen Figuren in dem Herculanischen Museo«, deren eine ohne Zweifel die unten in Excurs I aufzuführende Pallas sein soll.

Wenden wir uns jetzt zu dem an erster Stelle als beachtenswerth Bezeichneten, dem Artikel vor *ὄνυχας*, so erklärt sich der am Leichtesten durch die Annahme, daß die *ὄνυχες* schon vorher kurz erwähnt worden seien.

Die oben mitgetheilten Worte werden von Pausanias eingeleitet durch folgende: *ὅσοις δὲ τὰ σὺν τέχνῃ πεποιημένα ἐπίπροσθε τίθεται τῶν ἐς ἀρχαιότητα ἡκόντων, καὶ τάδε ἔστιν οἱ θεάσασθαι.* Nun bemerkte schon Fr. Thiersch »Ueber die Epochen der bildenden Kunst unter den Griechen« S. 281, Anm., d. zw. Aufl.: »das *τὰ σὺν τέχνῃ πεποημένα* wird auf die auch in den silbernen Nägeln sinnreiche Ausführung gehen«, und auch H. Brunn giebt a. a. O. zu, das Einsetzen der Nägel aus Silber, wodurch Pausanias seinen Vordersatz begründe, sei ein Zeichen nicht gewöhnlicher Sorgfalt. Daß Pausanias die *τέχνη* in den silbernen Nägeln gefunden hat, unterliegt wohl keinem Zweifel; wohl aber ist es mehr als fraglich, ob er die Nägel allein als Belege für die *τέχνη* beigebracht hat. Daß die silbernen Nägel die einzige stofflich verschiedene Verzierung des Bronzewerks ausmachten, ist schon an sich unglaublich. In den erhaltenen Beispielen finden sie sich meines Wissens nie allein. Was das Werk des Kleoitas anbetrifft, so wäre es besonders auffallend, wenn dieser gar nichts von den Verzierungen in eingelegter Arbeit, welche Pausanias als zur *τέχνη* gehörend betrachtet, gearbeitet hätte. Dieselben sind an erhaltenen Bronzewerken von verschiedenem Stoff und an verschiedenen Stellen des Körpers oder der Bekleidung angebracht, wie wir in Excurs I des Genaueren sehen werden. Sie mußten nicht weniger als die von Aristokles herrührenden *ὄνυχες ἀργυροῖ* vor *καί οἱ* kurz angegeben sein, und zwar war das, wie wir glauben, so geschehen, daß neben den von Kleoitas selbst herrührenden Arten der eingelegten Arbeit, von denen nicht besonders gesagt zu sein brauchte, daß der Meister selbst sie gemacht habe, der Uebersicht wegen schon »silberne Nägel« miterwähnt waren, ohne Angabe des Namens des Verfertigers, etwa so: »es hat aber der Mann silberne Helmverzierungen, silberne Nägel an Händen und Füßen u. s. w., und die Nägel hat ihm eingesetzt der Sohn des Kleoitas«. An welchen Theilen des

---

of ant. sculpture bezüglich der von Köhler besprochenen Stücke, welche in diesem Werke mitgetheilt sind, von silbernen Nägeln nichts verlautet.

Körpers oder der Rüstung sich diese befanden, läßt sich jetzt nicht vollständig mit Sicherheit bestimmen. Handelte es sich um einen Todten mit geschlossenen Augenlidern, so waren die Augen nicht aus anderem Material eingesetzt, sondern etwa nur die Lippen, da doch diese gewiß nicht von dem Helm bedeckt waren. Trug der Mann eine Rüstung am Körper, so kamen die Brustwarzen nicht zum Vorschein, wird aber die Rüstung mit eingelegter Arbeit, sicherlich aus Silber, verziert gewesen sein. Täusche ich mich nicht, so war weder jenes noch dieses der Fall. Aber ohne allen Zweifel war der sicher bezeugte Helm mit Verzierungen aus Silber geschmückt, und zwar durch Kleoitas selbst, von dem auch die übrigen eingelegten Arbeiten mit Ausnahme der Nägel herrührten. So schrieb Pausanias, selbstverständlich nach demselben Gewährsmanne, durch welchen er die Kunde über die Verfertigung der Nägel durch Aristokles hatte, den Hauptantheil an der τέχνη dem Kleoitas zu. Die Ausführung einer der leichtesten Arbeiten überließ dieser dem Sohne. Diese Einsetzung der Nägel aus Silber, welche also keinesweges der wichtigste Beleg der τέχνη war, mag aber damals zuerst vorgekommen sein und so dem Aristokles die ihm zu Theil gewordene besondere Erwähnung zu Wege gebracht haben.

XI.

Cap. 24, §. 4, S. 11, Z. 24 geben die Handschriften: *Καὶ Διός ἐστιν ἄγαλμα, τό τε Λεωχάρους καὶ ὁ ὀνομαζόμενος Πολιεὺς —.*

Für ἄγαλμα vermuthete Siebelis ἀγάλματα, Overbeck ἀγάλματε (noch in der Griech. Kunstmyth. I, S. 564, wo irrthümlich angegeben wird, daß Jahn N. Memor. d. Inst. arch. p. 3 stillschweigend ἀγάλματα geschrieben habe; Jahn ließ vielmehr p. 21, A. 4 ἄγαλμα unverändert). Wäre nur unter ihnen zu wählen, so würde ohne Zweifel der Siebelis'schen Conjectur der Vorzug zu geben sein, ebensowie Cap. 23, §. 4, S. 6, Z. 23 fg. Ich glaube, daß Pausanias vor oder nach Διός gesetzt hatte: διττόν, was so leicht ausfallen konnte. Durch διττὸν sollte bezeichnet werden, daß es sich um zwei äußerlich verschiedene, aber den Zeus in derselben Eigenschaft darstellende Statuen handele, was auch nach Jahn's Darlegung in den N. Memor. p. 22 fg. der Fall war.

XII.

Cap. 24, §. 4, S. 12, Z. 27 fg. ist geschrieben: *καλοῦσι δέ τινα τῶν ἱερέων βουφόνον * * καὶ ταύτῃ δίψας τὸν πέλεκυν — οἴχεται φεύγων*

Michaelis bemerkt: lacunam indicavit Jahnius, videtur excidisse *ὃς κτείνας τὸν βοῦν.* Die ausgefallenen Worte lassen sich natürlich nicht mit Sicherheit bestimmen. In den Parallelstellen finden sich

neben κτείνειν auch die Ausdrücke σφάζειν und παταίσσειν. Vermuthlich war dem Verbum auch πελέκει hinzugefügt und noch wahrscheinlicher zudem ἐπὶ τοῦ βωμοῦ.

XIII.

Cap. 24, §. 6, S. 16, Z. 36 fg.: τούτους τοὺς γρῦπας ἐν τοῖς ἔπεσιν Ἀριστέας μάχεσθαι περὶ τοῦ χρυσοῦ φησὶν Ἀριμασποῖς τοῖς ὑπὲρ Ἰσσηδόνων.

Das τοῖς ist zuerst von Clavier eingesetzt, nicht von Schubart, wie in der Jahn-Michaelis'schen Ausgabe angegeben wird. Danach müßte man annehmen, daß Pausanias noch andere Arimaspen angenommen hätte, als die oberhalb der Issedonen wohnenden. Das hat aber durchaus keine Wahrscheinlichkeit; vgl. unten I, 31, 2. Die Angabe des Periegeten stimmt durchaus mit der bei Herodot IV, 13 überein: Ἰσσηδόνων δ' ὑπεροικέειν Ἀριμασποὺς ἄνδρας μονοφθάλμους, ὑπὲρ δὲ τούτων τοὺς χρυσοφύλακας γρῦπας. Dennoch zweifele auch ich nicht, daß hinter Ἀριμασποῖς etwas ausgefallen ist. Es handelt sich gewiß nicht um die Angabe des Platzes des Kampfs zwischen den Greifen und Arimaspen, der ja als im Lande der goldhütenden Greifen vor sich gehend gedacht wurde, so daß ὑπὲρ Ἰσσηδόνων eine Bestimmung enthalten würde, die nicht genau genug wäre (Herodot III, 116), sondern um die Angabe des Wohnsitzes der Arimaspen. Demnach wird man geneigt sein, nach Herodot V, 13 hinter Ἀριμασποῖς einzusetzen: οἰκοῦσιν.

XIV.

Cap. 24, §. 7, S. 16, Z. 41 fg. ist in Beziehung auf die Athena Parthenos des Phidias geschrieben: καὶ Νίκη ὅσον τε τεσσάρων πηχῶν, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ χειρὶ δόρυ ἔχει.

In der mehrfach behandelten Stelle bieten die Handschriften Νίκη τε ὅσον und ἐν δὲ τῇ χειρί. Wenn Jahn nach Schubart Νίκη in Νίκην verändern wollte, trotzdem daß er hinter πηχῶν eine Lücke annahm, was sein Vorgänger nicht that, so hat das durchaus keine Wahrscheinlichkeit. Auch die Versetzung des überlieferten τε an die Stelle unmittelbar hinter ὅσον steht keinesweges sicher. Allerdings stand τε schwerlich hinter Νίκη, wenn auch καὶ-τε sonst in der Bedeutung »und auch« bei Pausanias vorkommt (I, 35, 2, VII, 10, 2 u. 5, VIII, 21, 2, X, 13, 5). Wer hinter ὅσον ein τε vermißt, der kann dasselbe mit allem Schein dort einsetzen, wo es wegen der Anfangsbuchstaben von τεσσάρων leicht ausfallen konnte. Daß die Stelle vor ἐν δὲ τῇ lückenhaft ist, liegt auf der Hand. Ohne Zweifel war davon die Rede, daß die Nike auf der Rechten der Athena stand. Aber es fragt sich sehr, ob nur eine Lücke, hinter πηχῶν, anzunehmen

ist. Man beachte, daß in der Beschreibung des ἄγαλμα τῆς Ἀθηνᾶς in §. 7 sowohl vorher als auch nachher der Platz, an welchem sich die Attribute befinden, stets gleich am Anfang angegeben wird (καί οἱ κατὰ τὸ στέρνον ἡ κεφαλὴ Μεδούσης u. s. w., und nachher: καί οἱ πρὸς τοῖς ποσὶν ἀσπίς τε κεῖται u. s. w.). So hat es, meine ich, große Wahrscheinlichkeit, daß etwa geschrieben war: καὶ [ἐπὶ τῆς δεξιᾶς oder δ. χειρὸς ἕστηκε] Νίκη [ἀνέχουσα στέφανον ταινίαν] τε ὅσον [τε] u. s. w.

Hinter den unmittelbar darauf folgenden Worten ἐν δὲ τῇ ist wiederum eine Lücke anzunehmen, die Schubart durch ἑτέρᾳ ausgefüllt hat. Man könnte noch eher an λαιᾷ denken.

XV.

Cap. 24, §. 8, S. 19, Z. 50 fg. ist bei Gelegenheit der Erwähnung des Phidias'schen Apollon Parnopios von den Heuschrecken die Rede: τρὶς δὲ αὐτὸς ἦδη πάρνοπας ἐκ Σιπύλου τοῦ ὄρους οὐ κατὰ ταὐτὰ οἰδα φθαρέντας, ἀλλὰ τοὺς μὲν ἐξέωσε βίαιος ἐμπεσὼν ἄνεμος, τοὺς δὲ ὕσαντος τοῦ θεοῦ καῦμα ἰσχυρὸν καθεῖλεν ἐπιλαβόν, οἱ δὲ αἰφνιδίῳ ῥίγει καταληφθέντες ἀπώλοντο. τοιαῦτα μὲν αὐτοῖς συμβαίνοντα εἶδον.

Daß in καῦμα ein Fehler steckt, liegt auf der Hand. Jahn schlug dafür ῥεῦμα vor. Noch wahrscheinlicher würde uns νᾶμα sein.

Vor dem drittletzten Worte αὐτοῖς nimmt Michaelis den Ausfall von αὐτὸς an. Daß dieses ursprünglich im Texte stand, glaube auch ich. Da aber αὐτοῖς keinesweges nöthig ist, kann man eher annehmen, daß es aus αὐτὸς entstand, nachdem das ς des folgenden Wortes doppelt geschrieben war.

XVI.

Cap. 25, §. 2, S. 20, Z. 12: Ἔστηκε δὲ καὶ Ὀλυμπιόδωρος, μεγέθει τε ὢν ἔπραξε λαβὼν δόξαν καὶ οὐχ ἥκιστα τῷ καιρῷ.

Die Handschriften geben: τῶν καιρῶν. Daß καιρῷ geschrieben war, liegt auf der Hand. Dagegen trifft die Bekker'sche Veränderung auch des τῶν in τῷ sicherlich nicht das Richtige. Ist doch auch nicht τῷ μεγέθει geschrieben. Für τῶν ist vielmehr αὐτῶν (sc. ἐκείνων ἃ ἔπραξε) zu schreiben. Der Wegfall des αὐ- wurde durch das -α am Ende des vorhergehenden Wortes veranlaßt. So erhellt auch, wie καιρῷ in καιρῶν überging.

XVII.

Cap. 26, §. 4, S. 22, Z. 21: Λεῖ δέ με ἀφικέσθαι τοῦ λόγου πρόσω, πάντα ὁμοίως ἐπεξιόντα τὰ Ἑλληνικά.

Es ist sehr zu verwundern, daß Niemand an dem letzten Worte Anstoß genommen hat, welches hieher, wo nur von der Akropolis

zu Athen die Rede sein kann, durchaus nicht paßt. Ohne Zweifel ist zu schreiben: ἕδη. Aus ΕΔΗ entstand zunächst ΕΛΗ. Dann wurde dieses ganz unsinnige Wort von einem Interpolator zu Ἑλληνικά ergänzt. Unmittelbar darauf ist von dem Sitzbilde der Athena, welches Kallias weihte und Endoios verfertigte, die Rede; dann noch von anderen Götterbildern, auch stehenden, welche durch den Ausdruck ἕδος nicht ausgeschlossen werden (L. Roß Archäol. Aufsätze I, S. 187 fg.).

XVIII.

Cap. 26, §. 5, S. 24, Z. 31 ist von den Worten τριαίνης ἐστὶν ἐν τῇ πέτρᾳ σχῆμα das letzte schwerlich richtig. Göttling wollte: σῆμα. Ich möchte lieber: σχίσμα.

XIX.

Cap. 26, §. 6, S. 25, Z. 31 ist die Loescher'sche Herstellung des handschriftlichen πολλοῖς πρότερον νομισθὲν ἔτεσι ἢ συνῆλθον durch Einsetzung von ἔτεσιν ἢ keinesweges sicher, da zunächst hinter ἔτεσι ein Wort vorauszusetzen zu sein scheint, das mit einem Konsonanten anfing. Demnach hat man vermuthlich zu schreiben: ἔτεσι πρὶν ἢ σ. Πρότερον πρὶν ἢ auch sonst bei Pausanias, vgl. I, 1, 2, V, 24, 2, VI, 6, 2.

XX.

Cap. 27, §. 4, S. 30, Z. 23 fg.: ἔστι δὲ ἀγάλματα μεγάλα χαλκοῦ, διεστῶτες ἄνδρες ἐς μάχην· καὶ τὸν μὲν Ἐρεχθέα καλοῦσι, τὸν δὲ Εὔμολπον. καίτοι λέληθέ γε οὐδένα τῶν Ἀθηναίων ὅσοι τὰ ἀρχαῖα ἴσασιν, Ἰμμάραδον εἶναι παῖδα Εὐμόλπου τοῦτον τὸν ἀποθανόντα ὑπὸ Ἐρεχθέως.

Schubart tilgte das fünftletzte Wort. Auch mir erregt dasselbe Bedenken. Wenn mit Recht, so ist es jedenfalls wahrscheinlicher, τοῦτον in τούτου zu verändern. Es gab mehrere Eumolpos'. Εὔμολπος οὗτος ist der kurz vorher genannte, derjenige, unter welchem der Krieg der Thraker mit Erechtheus statthatte.

XXI.

Cap. 27, §. 6, S. 31, Z. 14 heißt es von Kyknos: περὶ δὲ τὸν ποταμὸν τὸν Πηνειὸν ἀπέθανεν ὑφ' Ἡρακλέους.

Porson wollte das τὸν vor Πηνειὸν getilgt wissen, und noch in der Jahn-Michaelis'schen Ausgabe findet sich diese Meinung angemerkt. Man könnte ebensowohl schreiben: περὶ δὲ ποταμὸν τὸν Π., vgl. III, 18, 7: ἐπ' Εὐήνῳ τῷ ποταμῷ. Aber daß die handschriftliche Lesart von sprachlicher Seite durchaus nichts gegen sich hat, zeigte schon Siebelis in den Adnotationes p. 98.

XXII.

Cap. 27, §. 8, S. 31, Z. 46 fg. steht in Beziehung auf Aegeus und Theseus geschrieben: *ὁ δὲ ἐπὶ τούτῳ (λόγος ἐστὶ Τροιζηνίοις), κρηπῖδας Αἰγέα ὑπὸ πέτρᾳ καὶ ξίφος θεῖναι γνωρίσματα εἶναι τῷ παιδί. καὶ τὸν μὲν ἐς Ἀθήνας ἀποπλεῖν. Θησέα δὲ — τὴν πέτραν ἀνώσαντα οἴχεσθαι τὴν παρακαταθήκην τὴν Αἰγέως φέροντα. τούτου δὲ εἰκὼν ἐν ἀκροπόλει πεποίηται τοῦ λόγου, χαλκοῦ πάντα ὁμοίως πλὴν τῆς πέτρας.*

Die Handschriften bieten: *οἴχεσθαι καὶ τὴν.* Clavier tilgte das *καὶ*. Jahn war der Ansicht, daß vor diesem Worte etwas ausgefallen sei. Ich zweifle nicht, daß geschrieben war: *οἴχεσθαι ἔκειτο.*

Was dann die im letzten Satz erwähnte Erzdarstellung anbetrifft, so ist es gewiß nicht wahrscheinlich, daß Aegeus Fußbekleidung und Schwert unter dem Felsen bergend und Theseus dieselben unter dem gehobenen Felsen findend oder dieses Letztere und ausserdem Theseus mit dem Schwert und den Krepiden, im Begriffe nach Athen abzugehen, dargestellt war, sondern bloß die Hebung des Felsens durch Theseus, und die Findung der unter jenem verborgenen Gegenstände; obgleich die Worte des Periegeten jenen Annahmen keineswegs entgegenstehen. Unter dieser Voraussetzung könnte man etwa geneigt sein, die Mutter des Theseus, Aethra, welche ihm den Stein gezeigt und den Auftrag des Aegeus offenbart hatte, mit dargestellt zu erachten. Aber Wahrscheinlichkeit hat das keineswegs. Pausanias deutet die Anwesenheit der Aethra auch nicht mit einem Worte an und diejenigen Bildwerke, welche wir als der in Rede stehenden Gruppe zunächst stehend zu betrachten haben, zeigen keine Spur von der Aethra, worüber unten in Excurs II des Weiteren die Rede sein wird. Es ist die Frage, ob der Perieget durch die Worte *χαλκοῦ πάντα ὁμοίως* die Masse des verbrauchten Erzes besonders habe hervorheben wollen. Wäre das der Fall gewesen, so würde er wohl gethan haben, wenn er die Aethra erwähnt und die Gruppe als colossal bezeichnet hätte. Ich denke mir aber, daß er sagen wollte, nicht bloß Theseus und das Schwert und die Krepiden seien aus Erz gewesen, sondern auch der Fels, der doch nicht aus Erz hergestellt zu sein brauchte, sondern durch einen wirklichen Felsen hätte ersetzt werden können. Daß der Fels in dem Bronzewerk in der That auch aus Erz war, unterliegt wohl keinem Zweifel. Mir wenigstens ist kein Beispiel bekannt, das auch nur im Entferntesten mit der Beschreibung des Bronzewerks, die wir jetzt bei Pausanias lesen, verglichen werden könnte. Aber der jetzige Text ist sicherlich verderbt. Es scheint zwischen *ὁμοίως* und *πλὴν* ausgefallen zu sein: *οὐ μόνον τὰ λοιπά. Τὰ λοιπὰ πλὴν* auch unten Cap. 28, §. 2, p. 34, Z. 12 Freilich haben auch so die Gedanken und Worte des Periegeten etwas

Befremdendes, indem Etwas, was durchaus nichts Auffallendes hat, sondern für den Kunstkenner selbstverständlich ist, besonders hervorgehoben wird. Allein das darf bei einem Schriftsteller wie Pausanias schwerlich befremden. In dem vorliegenden Falle wäre es nicht unmöglich, daß der Umstand, daß das Postament des Bronzewerks aus einem natürlichen Felsen hergestellt war, ihn irre führte.

XXIII.

Cap. 27, §. 9, S. 31, Z. 51 fg.: *πάλαι δὲ ἄρα τὰ θηρία φοβερώτερα ἦν τοῖς ἀνθρώποις, ὡς ὅ τε ἐν Νεμέᾳ λέων καὶ ὁ Παρνάσιος.*

Für das letzte Wort schlug C. Fr. Hermann außer dem doch zu fern stehenden *Χαραδραῖος* vor: *Περμήσιος*. Noch näher stände *Παρμήσιος*, von *Παρμησός*, wie nach Krates in den Scholien zu Hesiod's Theog. Vs 5 die Eingeborenen den Fluß nannten. Doch steht sehr in Frage, ob man diese Form bei Pausanias voraussetzen darf, was selbst von *Περμήσιος* gilt, da der betreffende Fluß bei dem Periegeten IX, 29, 5 *Τερμησσὸς* heißt. Ueberall ist es nicht wahrscheinlich, daß der Löwe von einem Fluß und nicht von einem Berge oder Orte oder einer Landschaft benannt gewesen sei. Dazu kommt, daß unter den ziemlich zahlreichen Stellen der alten Schriftsteller, in welchen der Löwe der Böotischen Sage erwähnt wird, keine ist, in der dieser als *Περμήσιος* oder *Τερμήσιος* bezeichnet wird. Die Stellen hat R. Unger Thebana Paradoxa p. 401 fg. aufgeführt (wo die auch bei Suidas u. d. W. *Χαραδραῖος λέων* vorkommende Stelle des Zenobius VI, 39 falsch emendirt ist und zu schol. Hom. Il. II, 507 über Leontarne hinzugefügt werden kann Tzetzes zu Lykophron Vs 645). Dagegen wird der Löwe von Späteren mehrfach als der Teumessische bezeichnet, und *Τευμήσιος* ist die einzige unter den schriftlich bezeugten Bezeichnungen des Böotischen Löwen, aus welcher das *Παρνάσιος* des Pausanias'schen Textes allenfalls verderbt sein kann. Der Umstand, daß der Perieget den Löwen anderswo (I, 41, 4. 5) als den Kithäronischen und auf dem Kithäron getödtet bezeichnet, verschlägt gewiß nichts. Wer trotzdem *Παρνάσιος* als von Pausanias gesetzt erachtet, kann das nur als aus augenblicklichem Irrthum geschehen ansehen. Oder will man etwa annehmen, daß Pausanias *Παρνήσιος* geschrieben habe (welche Veränderung allerdings die denkbar leichteste wäre) und daß dieser Beiname auf Tradition beruhte, was der Fall sein könnte, da der Parnes ebenso wie der Kithäron an der Grenze Böotiens lag und diesem benachbart war?

XXIV.

Cap. 28, §. 2 ist von der Phidias'schen ehernen Colossalstatue die Rede.

Ob in den Anfangsworten des Paragraphen, welche in den Handschriften lauten: *Χωρὶς δέ γε ὅσα κατέλεξα*, Bekker's Verbesserungsversuch *δὲ ἢ* für *δέ γε* das Richtige trifft, steht dahin. In Buch I, Cap. 34, §. 3 findet sich: *χωρὶς δὲ πλὴν*.

S. 32, Z. 5 fg. steht geschrieben: *καί οἱ τὴν ἐπὶ τῆς ἀσπίδος Λαπιθῶν πρὸς Κενταύρους μάχην — λέγουσι τορεῦσαι Μῦν*. Das Wort *μάχην* fehlt in den Handschriften. Es ist erst von Clavier eingesetzt. Gewiß mit Recht, denn wenn Siebelis Adnot. p. 99 meint, daß hier das Wort *μάχη* ebensogut weggelassen sein könne wie I, 13, 4: *Λακεδαιμονίοις δὲ πρὸ μὲν τῆς ἐν Λευκτροις οὐδὲν ἐγεγόνει παῖσμα*, so will das nichts sagen, da offenbar zwischen *μὲν* und *τῆς* ausgefallen ist *μάχης*, oder wahrscheinlicher *τῆς μάχης*. Ob aber Clavier *μάχην* an die richtige Stelle gesetzt hat, ist sehr zweifelhaft. Ich schlage vor: *καί οἱ τὴν μάχην τὴν* u. s. w. So erklärt sich auch hier wie in I, 13, 4 der Grund des Ausfalles viel eher als bei der Clavier'schen Annahme.

XXV.

Cap. 28, §. 2, S. 33, Z. 7 fg. steht: *ταύτης τῆς Ἀθηνᾶς ἡ τοῦ δόρατος αἰχμὴ καὶ ὁ λόφος τοῦ κράνους ἀπὸ Σουνίου προσπλέουσίν ἐστιν ἤδη σύνοπτα*.

Wer zu diesen Worten die Angaben von Michaelis in den Mittheilungen des Deutschen archäol. Instituts II, S. 88 fg. und die Bedenken Overbeck's in der Gesch. der Griech. Plastik I, S. 251 der dritten Aufl. gegen das *ἤδη* berücksichtigt, der wird wohl nicht daran zweifeln wollen, daß unmittelbar nach *ἤδη* ein paar Worte des Inhalts »nach Umschiffung des Vorgebirges Zoster, hinter dem Vorgeb. Zoster«, ausgefallen seien.

XXVI.

Cap. 28, §. 3, S. 34, Z. 12 fg.: *Τῇ δὲ ἀκροπόλει, πλὴν ὅσον Κίμων ᾠκοδόμησεν αὐτῆς ὁ Μιλτιάδου, περιβαλεῖν τὸ λοιπὸν λέγεται τοῦ τείχους Πελασγοὺς οἰκήσαντάς ποτε ὑπὸ τὴν ἀκρόπολιν*.

Das Wort *αὐτῆς* »abesse malit Michaelis«. Das Wort ist sicherlich verderbt, und zwar aus *ὁ παῖς*. Vgl. oben Cap. 22, §. 4, Z. 5: *οἱ παῖδες οἱ Ξενοφῶντος*, und §. 6, Z. 16: *τοὺς παῖδας τοὺς Νικλίου*. Pausanias deutet an, daß es sich um Kimon, den Sohn des Miltiades, nicht aber um Kimon, den Sohn des Stesagoras, handele.

(Die archäologischen Excurse erscheinen in einer späteren Nummer.)

Ueber Mac Cullagh's Theorie der Totalreflexion für isotrope und anisotrope Medien.

Von

Paul Volkmann.

(Vorgelegt von W. Voigt.)

Mac Cullagh hat vor nunmehr 40 Jahren in einer Reihe kurzer Notizen[1]), ohne Beweise und Ableitungen mitzutheilen, eine Theorie der Totalreflexion gegeben, welche vielleicht wegen ihrer überaus gedrängten und daher oft schwer zu verstehenden Darstellung bisher völlig unbeachtet geblieben zu sein scheint. Ich verdanke es meinem hochverehrten Freunde, Herrn Th. Liebisch, auf dieselbe aufmerksam gemacht zu sein. Die meisten Autoren haben sich vielmehr einer wenige Jahre vorher von F. E. Neumann[2]) für isotrope Medien gegebenen theoretischen Darstellung der Totalreflexion angeschlossen. Uebrigens soll am Schluß gezeigt werden, daß beide Theorien wesentlich identisch sind.

Neumann führt unter Beibehaltung des gewöhnlichen Brechungsgesetzes im Anschluß[3]) an eine Darstellung Cauchy's in dem Ausdruck für die Phase der bei der totalen Reflexion angenommenen gebrochenen Welle einen imaginären Brechungswinkel ein. Dadurch wird dem Vorgang der totalen Reflexion theilweise die geometrische Deutung entzogen, welcher derselbe z. B. nach der Theorie von Mac Cullagh fähig ist. Eine Erweiterung der Neumann'schen Theorie auf anisotrope Medien ist bisher wohl nur von Kirchhoff[4]) angedeutet worden.

Mac Cullagh, wie in allen seinen Arbeiten von dem Streben beseelt jedem analytisch errungenen Fortschritt auch geometrisch zu folgen, setzt für die bei der Totalreflexion erregte eigenthümliche Lichtbewegung der gebrochenen Welle einen Ausdruck an, der in allen seinen Theilen eine geometrische Deutung zuläßt. Es gelingt dies durch Einführung eines Begriffs der gebrochenen Wellenebene resp. Wellennormale bei der totalen Reflexion, welcher mit dem bei

1) Proceedings of the Royal Irish Academy Vol. II May 24. 1841. November 30. 1841. Vol. III January 13. 1845. cf. auch Collected Works 1880 pag. 187. 218. 250.

2) Pogg. Ann. 40 1837 pag. 497.

3) Pogg. Ann. 40 1837 pag. 507.

4) Kirchhoff ges. Abh. pag. 373. — In der großen Arbeit Neumanns Abh. d. Berl. Acad. 1835 sind pag. 72. 73 zwar im Falle einaxiger Medien Ausdrücke für die Amplituden des total reflectirten Lichts nach Analogie der Fresnelschen Deutung der Imaginären aufgestellt, von der gebrochenen Welle ist jedoch nicht die Rede.

der partiellen Reflexion bekannten nicht identisch ist. Beide Begriffe gehen aber im Grenzfall der totalen Reflexion in einander über. Die Theorie ist von Mac Cullagh sogleich für den allgemeinen Fall zweiaxiger Medien entwickelt worden.

Ich habe im Folgenden nach den von Mac Cullagh gegebenen Andeutungen diese Theorie ausgearbeitet und die von ihm aufgestellten Sätze bewiesen. Abgesehen von der Totalreflexion, schien mir dieses auch in Bezug auf Metallreflexion und Absorption lohnend, haben Speculationen darüber sich doch immer mehr oder weniger an den bei der Totalreflexion auftretenden Ausdruck für die gebrochene Welle angelehnt. Daß ich bei der Darstellung der Theorie auch auf einige Resultate kam, welche sich bei Mac Cullagh nicht finden, liegt jedenfalls mehr in der knappen Darstellung des Autors, welcher Alles, was eine geometrische Deutung nicht zuließ, unterdrückte, als daß ihm dieselben entgangen sein sollten.

Ich behandle hier den Fall, daß Licht in einem isotropen stärker brechenden Medium auf ein anisotropes Medium auffällt und totale Reflexion erleidet. In der Nähe der Grenzebene entstehen dann im anisotropen Medium Lichtbewegungen, die bereits in geringer Tiefe völlig verschwinden. Mit diesen Lichtbewegungen wollen wir uns zunächst beschäftigen, sie bilden den hauptsächlichsten Gegenstand der Arbeit.

Mathematische Hülfssätze über die analytische Darstellung einer Ellipse im Raum.

Bei Mac Cullagh[1]) findet sich aus den »Examination Papers of the year 1842« unbewiesen folgender Satz, der sich für die folgende Darstellung als sehr fruchtbar erweist:

Es sei eine Ellipse im Raum gegeben, der Mittelpunkt derselben werde als Coordinatenpunkt gewählt. Bezeichnen nun die Punkte x, y, z, x', y', z' die Enden irgend welchen Paares conjugirter Durchmesser, dann sind die complexen Größen:

$$\frac{y+iy'}{x+ix'}, \quad \frac{z+iz'}{x+ix'}, \qquad \text{wo } i = \pm\sqrt{-1}$$

constant für jedes System conjugirter Durchmesser.

Der Beweis dieses Satzes ist einfach[2]):

Denken wir uns die gegebene Ellipse dargestellt als Schnitt einer Ebene und eines Ellipsoids:

1) Mac Cullagh Coll. Works 1880 pag. 251.

2) Aus einer brieflichen Mittheilung des Herrn B. Minnigerode ersehe ich, daß derselbe wesentlich denselben Beweis schon vor längerer Zeit gefunden.

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Dann folgt, indem wir die Gleichungen:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1,$$
$$xx'/a^2 + yy'/b^2 + zz'/c^2 = 0,$$
$$x'^2/a^2 + y'^2/b^2 + z'^2/c^2 = 1,$$

der Reihe nach mit 1, $2i$, -1 multipliciren und addiren:

$$(x+ix')^2/a^2 + (y+iy')^2/b^2 + (z+iz')^2/c^2 = 0.$$

Ferner ist:

$$A(x+ix') + B(y+iy') + C(z+iz') = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist aber sofort ersichtlich, daß sich die Ausdrücke

$$\frac{y+iy'}{x+ix'}, \quad \frac{z+iz'}{x+ix'}$$

als Wurzeln zweier quadratischer Gleichungen ergeben und in A, B, C a, b, c werden ausdrücken lassen. Nun ist i ebensowohl $+$ wie $-\sqrt{-1}$, insofern sind die obigen Ausdrücke nicht zweideutig, sondern vollkommen eindeutig durch die gegebene Ellipse bestimmt.

Es geht aus diesem Satz unmittelbar hervor, daß die Ebene einer Ellipse, sowie die Richtungen und das Verhältniß ihrer Axen vollständig durch zwei complexe Ausdrücke der gegebenen Art bestimmt sind.

Mac Cullagh hebt die merkwürdige Analogie dieses Satzes hervor zu dem Satz von der geraden Linie im Raum, wonach die Richtung einer geraden Linie im Raum vollkommen durch 2 reelle Constanten bestimmt ist.

Wir gründen auf diesen Satz eine analytische Darstellungsform für eine Ellipse im Raum, die wir im Folgenden wiederholt anwenden wollen. Es bedeute symbolisch:

$$(x+ix') : (y+iy') : (z+iz')$$

eine Ellipse im Raum, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfangspunkt liegt, und von der irgend ein Paar conjugirter Durchmesser durch die Endpunkte x, y, z, x', y', z' gegeben ist.

Wir führen auf diese Darstellungsform eine andere zurück: Es seien p, q irgend welche conjugirte Halbmesser einer Ellipse im Raum, welche mit der x, y, z-Axe die Winkel α, β, γ resp. α', β', γ' einschließen, dann läßt sich diese Ellipse ebenso darstellen durch:

$$(p\cos\alpha + iq\cos\alpha') : (p\cos\beta + iq\cos\beta') : (p\cos\gamma + iq\cos\gamma'),$$

wie durch[1]):

$$\begin{aligned} x &= p\cos\alpha\sin\varphi + q\cos\alpha'\cos\varphi, \\ y &= p\cos\beta\sin\varphi + q\cos\beta'\cos\varphi, \\ z &= p\cos\gamma\sin\varphi + q\cos\gamma'\cos\varphi. \end{aligned}$$

Wir können durch Einsetzen von $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$, im Falle die zweite Darstellung nur für ein bestimmtes Paar conjugirter Halbmesser Gültigkeit hätte, immer zur ersten Darstellung übergehen. Da aber die erste Darstellung von der Wahl des Paares conjugirter Halbmesser unabhängig ist, muß es auch die zweite sein und damit ist zugleich bewiesen, daß eine Ellipse im Raum in der zweiten Form analytisch dargestellt werden kann.

Die bei der Totalreflexion auftretende Lichtbewegung der gebrochenen Welle.

Die allgemeinste Bewegung eines Aethertheilchen, die wir kennen, findet in einer Ellipse statt. Demgemäß setzt Mac Cullagh für ein Aethertheilchen, welches von der bei der totalen Reflexion entstehenden gebrochenen Welle in Bewegung gesetzt wird, an:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varepsilon(p\cos\alpha\sin\varphi + q\cos\alpha'\cos\varphi) \\ \eta &= \varepsilon(p\cos\beta\sin\varphi + q\cos\beta'\cos\varphi) \\ \zeta &= \varepsilon(p\cos\gamma\sin\varphi + q\cos\gamma'\cos\varphi) \end{aligned}\right| \qquad (1.)$$

Hierin bedeuten wieder εp, εq irgend welche conjugirte Halbmesser der Ellipse, α, β, γ, α', β', γ' ihre Richtungswinkel gegen die x, y, z-Axe. Der Coordinatenanfangspunkt von ξ, η, ζ (parallel zu x, y, z) befindet sich im Mittelpunkt der Ellipse, ferner sei gesetzt:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(lx + my + nz - st),$$

$$\varepsilon = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}r(lx+my+nz)}.$$

Die Lage der gebrochenen Wellenebene ist also gegeben durch $lx + my + nz = 0$, ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch s, ihre Wellenlänge durch λ. Der durch ε bezeichnete Exponentialfactor tritt hinzu, da erfahrungsgemäß bei der totalen Reflexion schon in geringer Tiefe die gebrochene Lichtbewegung völlig erloschen ist; es bedeutet darin r eine in jedem Fall näher zu bestimmende Größe,

1) Im Falle p, q die Halbaxen der Ellipse sind, ist diese Darstellung auch sonst wohl benutzt worden.

wie später durchgeführt werden wird. Ohne der Entwicklung der Materie vorzugreifen, bezeichnen wir schon hier die Ebene

$$fx + gy + hz = 0$$

als Grenzebene des Mediums, sowie die durch die Richtungen l, m, n, f, g, h gelegte Ebene als Einfallsebene. Die bei dem eigentlichen Problem der totalen Reflexion später einzuführenden Grenzbedingungen werden diese Bezeichnungsweise rechtfertigen.

Der Ansatz für die Schwingungsellipse des Aethertheilchens ist darum von Mac Cullagh so glücklich gewählt, weil er ganz analog gebildet ist der gewöhnlichen Bewegung eines Aethertheilchens im linear-polarisirten Licht:

$$\begin{aligned} \xi &= p\cos\alpha\sin\varphi \\ \eta &= p\cos\beta\sin\varphi \\ \zeta &= p\cos\gamma\sin\varphi \end{aligned} \qquad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(lx + my + nz - st)$$

Wir werden dadurch mit Leichtigkeit in den Stand gesetzt bei jedem Schritt zu erkennen, welche Ausdrücke und Sätze bei der durch totale Reflexion veranlaßten Lichtbewegung der gewöhnlichen Lichtbewegung in isotropen und anisotropen Medien entsprechen.

Einführung der Incompressibilitätsbedingung des Aethers.

Die Bedingung der Incompressibilität des Aethers lautet bekanntlich:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.$$

Angewandt auf die Mac Cullagh'schen Ausdrücke für ξ, η, ζ, zerfällt dieselbe in die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} p(l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma) - rq(f\cos\alpha' + g\cos\beta' + h\cos\gamma') &= 0 \\ q(l\cos\alpha' + m\cos\beta' + n\cos\gamma') + rp(f\cos\alpha + g\cos\beta + h\cos\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Wir geben diesen Gleichungen eine für die Folge vielfach benutzte Form, nämlich:

$$(2) \quad \begin{aligned} &(p\cos\alpha + iq\cos\alpha')(l + irf) + (p\cos\beta + iq\cos\beta')(m + irg) \\ &+ (p\cos\gamma + iq\cos\gamma')(n + irh) = 0. \end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum diese Bedingungsgleichungen für die Incompressibilität geometrisch zu deuten; zunächst ist ersichtlich, daß hier nicht mehr, wie bei der gewöhnlichen Lichtbewegung

$$\begin{aligned} l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma &= 0 \\ l\cos\alpha' + m\cos\beta' + n\cos\gamma' &= 0. \end{aligned}$$

Die hier in Frage kommende Wellenbewegung findet also nicht mehr in der Wellenebene

$$lx + my + nz = 0$$

statt, sie ist nicht mehr transversal, und insofern kann man sagen, daß hier der Begriff der Wellenebene resp. der Wellennormale ein anderer, als bei der gewöhnlichen Lichtbewegung ist. Beide Begriffe gehen aber im Grenzfall der totalen Reflexion in einander über, denn dann ist $r = 0$, und dann gelten jene Gleichungen, welche die Transversalität der Lichtbewegung ausdrücken.

Wählen wir jetzt das x, y, z-System derart, daß x, y die Grenzebene, x, z die Einfallsebene wird, und bezeichnen den Winkel der Wellennormale mit dem Einfallsloth — also den Brechungswinkel mit ω, dann wird

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x \sin\omega + z \cos\omega - st)$$

$$\varepsilon = e^{-\frac{2\pi}{\lambda} rz}$$

und die Bedingung der Incompressibilität liefert:

$$p \cos\alpha \sin\omega + p \cos\gamma \cos\omega - rq \cos\gamma' = 0$$
$$q \cos\alpha' \sin\omega + q \cos\gamma' \cos\omega + rp \cos\gamma = 0$$

oder:

$$(p \cos\alpha + iq \cos\alpha') : (p \cos\gamma + iq \cos\gamma')$$
$$= (\cos\omega + ir) : (-\sin\omega).$$

In dieser Gleichung ist als unmittelbare Folge der Incompressibilitätsbedingung der Satz [1]) ausgesprochen:

Die Projection der Schwingungsellipse auf die Einfallsebene hat zu conjugirten Durchmessern Linien, welche parallel zur Grenzebene des Mediums und zur Wellenebene sind, ihre Längen verhalten sich wie $r : 1$.

Auf das ursprüngliche allgemeine Coordinatensystem x, y, z zurückgehend haben wir in der Gleichung (2) den analytischen Ausdruck dieses Satzes, welchem wir behufs späterer Anwendung die Form geben können:

Alle ebenen Ellipsen:

$$(p \cos\alpha + iq \cos\alpha') : (p \cos\beta + iq \cos\beta') : (p \cos\gamma + iq \cos\gamma'),$$

welche auf dem vorhin beschriebenen Projectionscylinder liegen, müssen der Bedingung genügen:

$$(p \cos\alpha + iq \cos\alpha')(l + irf) + (p \cos\beta + iq \cos\beta')(m + irg)$$
$$+ (p \cos\gamma + iq \cos\gamma')(n + irh) = 0$$

Wir haben bis jetzt nur mit Licht zu thun gehabt, bei dem die

1) Mac Collagh Coll. Works p. 192.

Aethertheilchen in Ellipsen schwingen und die Incompressibilitätsbedingung hat uns gelehrt, auf welchem Cylinder die Schwingungsellipsen stets liegen müssen. Es entsteht nun die Frage, ob für die hier in Betracht kommende Bewegung auch linear polarisirte Lichtbewegung möglich ist. Der Satz vom Projectionscylinder weist darauf hin, daß eine solche nur senkrecht zur Einfallsebene stattfinden kann, denn nur in diesem Fall liefert der Schnitt einer Ebene mit dem Projectionscylinder keine Ellipsen, sondern gerade Linien.

Wir können auch analytisch diese Folgerung verificiren. Setzen wir die Ausdrücke für linear polarisirtes Licht:

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon p \cos\alpha \sin\varphi \\ \eta &= \varepsilon p \cos\beta \sin\varphi \\ \zeta &= \varepsilon p \cos\gamma \sin\varphi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda}(lx + my + nz - st) \\ \varepsilon &= e^{-\frac{2\pi}{\lambda} r(fx+gy+hz)} \end{aligned}$$

in die Incompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \text{ ein, so muß:}$$

$$\begin{aligned} l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma &= 0, \\ f\cos\alpha + g\cos\beta + h\cos\gamma &= 0, \end{aligned}$$

das heißt: Bei der totalen Reflexion ist für die gebrochene Welle linear polarisirtes Licht nur senkrecht zur Einfallsebene möglich.

Einführung der Differentialgleichungen für die Aetherbewegung.

Die Gleichungen 1) müssen nun den allgemeinen Differentialgleichungen genügen, welche für die Bewegung eines Aethertheilchens in einem optisch zweiaxigen Krystall aufgestellt sind. Wir beziehen jetzt das x, y, z-System auf die Hauptaxen des anisotropen Mediums. Bisher war die Wahl des x, y, z-Systems ganz gleichgültig. Es seien a, b, c die 3 Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$(3) \quad \left| \begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) - c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Setzen wir den Ausdruck für ξ aus den Gleichungen (1) in die erste der Gleichungen (3), so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
-s^2\cos\alpha \;=\; & -c^2(m^2\cos\alpha - ml\cos\beta) + b^2(nl\cos\gamma - n^2\cos\alpha)\\
& + c^2r^2(g^2\cos\alpha - gf\cos\beta) - b^2r^2(hf\cos\gamma - h^2\cos\alpha)\\
& + rq/p\,[c^2\{2gm\cos\alpha' - (fm+gl)\cos\beta'\}\\
& - b^2\{(hl+fn)\cos\gamma' - 2hn\cos\alpha'\}],\\
-s^2\cos\alpha' = & -c^2(m^2\cos\alpha' - ml\cos\beta') + b^2(nl\cos\gamma' - n^2\cos\alpha')\\
& + c^2r^2(g^2\cos\alpha' - gf\cos\beta') - b^2r^2(hf\cos\gamma' - h^2\cos\alpha')\\
& - rq/p\,[c^2\{2gm\cos\alpha - (fm+gl)\cos\beta\}\\
& - b^2\{(hl+fn)\cos\gamma - 2hn\cos\alpha\}].
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke, welche sich ergeben, indem die Werthe für η und ζ aus (1) in die zweite resp. dritte Gleichung von (3) gesetzt werden, folgen unmittelbar durch cyclische Vertauschung, wir schreiben sie daher nicht weiter hin.

Schreiben wir jetzt zur Abkürzung

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= p\cos\alpha + iq\cos\alpha' & \lambda &= l + irf\\
\mathrm{B} &= p\cos\beta + iq\cos\beta' & \mu &= m + irg\\
\Gamma &= p\cos\gamma + iq\cos\gamma' & \nu &= n + irh
\end{aligned}
\right|, \qquad (4)
$$

so folgt aus den für $s^2\cos\alpha$ und $s^2\cos\alpha'$ hingeschriebenen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
s^2\mathrm{A} \;=\; & c^2[(m^2\mathrm{A} - ml\mathrm{B}) + ir(2gm\,\mathrm{A} - (fm+gl)\,\mathrm{B}) - r^2(g^2\mathrm{A} - gf\mathrm{B})]\\
& - b^2[(nl\,\Gamma - n^2\mathrm{A}) + ir((hl+fn)\,\Gamma - 2hn\,\mathrm{A}) - r^2(hf\,\Gamma - h^2\mathrm{A})]\\
=\; & c^2\mu(\mathrm{A}\mu - \mathrm{B}\lambda) - b^2\nu(\Gamma\lambda - \mathrm{A}\nu).
\end{aligned}
$$

Durch cyclische Vertauschungen erhalten wir hieraus entsprechende Gleichungen für $s^2\mathrm{B}$ und $s^2\Gamma$, und haben damit die Gleichungen gewonnen:

$$
\left.
\begin{aligned}
s^2\mathrm{A} &= c^2\mu(\mathrm{A}\mu - \mathrm{B}\lambda) - b^2\nu(\Gamma\lambda - \mathrm{A}\nu)\\
s^2\mathrm{B} &= a^2\nu(\mathrm{B}\nu - \Gamma\mu) - c^2\lambda(\mathrm{A}\mu - \mathrm{B}\lambda)\\
s^2\Gamma &= b^2\lambda(\Gamma\lambda - \mathrm{A}\nu) - a^2\mu(\mathrm{B}\nu - \Gamma\mu)
\end{aligned}
\right|. \qquad (5)
$$

Wir bemerken, daß durch das Factorensystem λ, μ, ν aus diesen Gleichungen die Incompressibilitätsbedingung (2) erhalten wird, welche sich jetzt schreibt:

$$\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}\mu + \Gamma\nu = 0.$$

Ordnen wir die Gleichung (5) nach A, B, Γ

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}(s^2 - c^2\mu^2 - b^2\nu^2) + \mathrm{B}c^2\lambda\mu + \Gamma b^2\lambda\nu = 0\\
&\mathrm{A}c^2\mu\lambda + \mathrm{B}(s^2 - a^2\nu^2 - c^2\lambda^2) + \Gamma a^2\mu\nu = 0\\
&\mathrm{A}b^2\nu\lambda + \mathrm{B}a^2\nu\mu + \Gamma(s^2 - b^2\lambda^2 - a^2\mu^2) = 0
\end{aligned}
$$

und eliminiren hieraus oder in Verbindung mit:

$$A\lambda + B\mu + \Gamma\nu = 0$$

A, B, Γ, dann erhalten wir eine bemerkenswerthe Relation, welche ihr völliges Analogon in der gewöhnlichen Lichtbewegung hat.

Wir finden:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ s^2 - c^2\mu^2 - b^2\nu^2 & c^2\lambda\mu & b^2\lambda\nu \\ c^2\mu\lambda & s^2 - a^2\nu^2 - c^2\lambda^2 & a^2\mu\nu \end{vmatrix} = 0$$

oder umgeformt:

$$(s^2 - c^2\mu^2 - b^2(\nu^2+\lambda^2))(s^2 - a^2(\mu^2+\nu^2) - c^2\lambda^2) - (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)\mu^2\lambda^2 = 0$$

oder endlich:

$$\begin{vmatrix} s^4 - s^2[\lambda^2(b^2+c^2) + \mu^2(c^2+a^2) + \nu^2(a^2+b^2)] \\ + (\lambda^2 b^2 c^2 + \mu^2 c^2 a^2 + \nu^2 a^2 b^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) = 0. \end{vmatrix} \quad (6)$$

Diese Gleichung ist ganz analog der Gleichung in der Theorie der gewöhnlichen Lichtbewegung, welche bei gegebener Wellennormale die Geschwindigkeiten liefert, mit denen sich die zugehörende ordinäre und extraordinäre Welle in optisch zweiaxigen Medien bewegen, wir haben nur in den Ausdrücken für λ, μ, ν in (4) $r = 0$ zu setzen, wodurch dieselben in l, m, n übergehen, und zu berücksichtigen, daß $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist.

Indem wir die Gleichung (6) in ihren reellen und imaginären Bestandtheil zerfällen, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} 0 = s^4 - s^2[(l^2 - r^2f^2)(b^2+c^2) + (m^2 - r^2g^2)(c^2+a^2) + (n^2 - r^2h^2)(a^2+b^2)] \\ + (1 - r^2)[(l^2 - r^2f^2)b^2c^2 + (m^2 - r^2g^2)c^2a^2 + (n^2 - r^2h^2)a^2b^2] \\ - 4r^2[\quad lf\quad b^2c^2 + \quad mg\quad c^2a^2 + \quad nh\quad a^2b^2] \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} 0 = -s^2[lf(b^2+c^2) + mg(c^2+a^2) + nh(a^2+b^2)] \\ + (1 - r^2)[lfb^2c^2 + mg\quad c^2a^2 + nh\quad a^2b^2] \\ + [(l^2 - r^2f^2)b^2c^2 + (m^2 - r^2g^2)c^2a^2 + (n^2 - r^2h^2)a^2b^2](fl + mg + nh). \end{vmatrix} \quad (8)$$

Es soll auf diese Gleichungen hier nicht näher eingegangen werden. Es sind in denselben die Beziehungen zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwelle s, der in dem Exponentialfactor vorkommenden Größe r und dem Brechungswinkel ω enthalten. Es sei aber hervorgehoben, daß abweichend von der Fresnelschen Lichttheorie die Geschwindigkeit s hier nicht ohne Weiteres durch die Wellennormale gegeben ist, dazu ist erst noch die Kenntniß des Einfallswinkels, unter dem die totale Reflexion stattfindet, nothwendig — wie aus dem Späteren hervorgehen wird.

Die Größe r wird 0 im Grenzfall der totalen Reflexion. Wir erhalten dann für (7) die bekannte Gleichung der Fresnelschen Theorie:

$$0 = s^4 - s^2[l^2(b^2+c^2) + m^2(c^2+a^2) + n^2(a^2+b^2)] + l^2b^2c^2 + m^2c^2a^2 + n^2a^2b^2$$

und für (8):

$$0 = -s^2(lf(b^2+c^2) + mg(c^2+a^2) + nh(a^2+b^2)) + lf\ b^2c^2 + mg\ c^2a^2 + nh\ a^2b^2 + (l^2b^2c^2 + m^2c^2a^2 + n^2a^2b^2)(lf+mg+nh) = 0.$$

An diese Formeln wird man anzuknüpfen haben, wenn man ausgehend von der Theorie der totalen Reflexion die Grenzwinkel für dieselbe bestimmen will[1]).

Im Falle optisch einaxiger Krystalle (es sei $b = c$) wird die Gleichung (6)

$$[s^2 - (a^2(\mu^2+\nu^2) + c^2\lambda^2)][s^2 - c^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)] = 0. \qquad (6a)$$

Der erste Factor hat sein Analogon zu der extraordinären, der zweite zu der ordinären Welle der gewöhnlichen Lichtbewegung.

Behandeln wir zuerst die extraordinäre Welle, also den Factor,

$$s^2 - [a^2(\mu^2+\nu^2) + c^2\lambda^2] = 0,$$

so zerlegt sich derselbe durch Zerfällen in den reellen und imaginären Bestandtheil in:

$$s^2 = a^2(m^2+n^2) + c^2l^2 - r^2[a^2(g^2+h^2) + c^2f^2] \qquad (7a)$$

$$0 = a^2(mg+nh) + c^2lf. \qquad (8a)$$

Die letzte Gleichung bestimmt den Brechungswinkel der totalen Reflexion für die extraordinäre Welle. Danach bilden das Einfallsloth und die extraordinäre Wellennormale conjugirte Durchmesser der Ellipse, in welcher die Indexfläche[2]) durch die Einfallsebene geschnitten wird. Es geht daraus hervor, daß bei totaler Reflexion an einaxigen Medien der Brechungswinkel derselbe bleibt für beliebige Einfallswinkel innerhalb derselben Einfallsebene; der Brechungswinkel

---

1) Ausgehend von Fresnels Theorie ist dies von Herrn Th. Liebisch geschehen. Neues Jahrbuch für Mineralogie 1885 Bd. I pag. 245 und Bd. II pag. 181.

2) Coll. Works pag. 192. Die Indexfläche ist gegeben durch:

$$\frac{x^2}{a^2-\frac{1}{r^2}} + \frac{y^2}{b^2-\frac{1}{r^2}} + \frac{z^2}{c^2-\frac{1}{r^2}} = 0 \quad \text{wo } r^2 = x^2+y^2+z^2.$$

ist also auch derselbe, wie er durch den Grenzfall der totalen Reflexion gegeben ist.

In Verbindung von (8a) mit: $lf+mg+nh = \cos\omega$ finden wir leicht die bekannten Formeln[1]):

$$\cos\omega = \frac{a^2-c^2}{a^2}lf \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{a^2+(c^2-a^2)\cos^2\mu}{(c^2-a^2)\sin\mu\cos\mu\cos\delta},$$

wo $f = \cos\mu$ und δ das Azimut von Einfallsebene gegen Hauptschnitt bedeutet.

Behandeln wir jetzt die ordinäre Welle bei optisch einaxigen Medien, also:

(6b) | $$s^2 = c^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2),$$

so erkennen wir, daß dieser Fall sich mit den in isotropen Medien stattfindenden Wellen deckt. Durch Zerfällen in den reellen und imaginären Bestandtheil erhalten wir:

(7b) | $$s^2 = c^2(1-r^2).$$

(8b) | $$lf+mg+nh = 0.$$

Die gebrochene Wellennormale fällt danach in allen Fällen der totalen Reflexion in die Grenzebene.

Wir kehren jetzt zu den Gleichungen (5) zurück und eliminiren aus denselben die Größe s^2 [2]). Wir erhalten z. B. aus den beiden ersten Gleichungen:

$$a^2\nu(AB\nu - A\Gamma\mu)+b^2\nu(B\Gamma\lambda - AB\nu) - c^2(A^2\lambda\mu - AB\lambda^2 + AB\mu^2 - B^2\lambda\mu) = 0.$$

Der Coefficient von $-c^2$ wird:

$$A\mu(A\lambda+B\mu)-B\lambda(A\lambda+B\mu) = (A\lambda+B\mu)(A\mu-B\lambda) = -\Gamma\nu(A\mu-B\lambda)$$

nach der Incompressibilitätsbedingung. Wir erhalten so mit Hinweglassung des Factors ν:

(9)
$$\begin{aligned} &a^2(AB\nu - A\Gamma\mu)+b^2(B\Gamma\lambda - AB\nu)+c^2(\Gamma A\mu - \Gamma B\lambda) = 0\\ &a^2\left(\frac{\nu}{\Gamma}-\frac{\mu}{B}\right)+b^2\left(\frac{\lambda}{A}-\frac{\nu}{\Gamma}\right)+c^2\left(\frac{\mu}{B}-\frac{\lambda}{A}\right) = 0\\ &(b^2-c^2)\frac{\lambda}{A}+(c^2-a^2)\frac{\mu}{B}+(a^2-b^2)\frac{\nu}{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

Dieselbe Gleichung hätten wir durch Combination irgend zweier

---

1) Th. Liebisch, Neues Jahrbuch für Mineralogie 1885 Bd. II, pag. 205.
2) In Bezug auf das Folgende cf. Coll. Works pag. 250. 251.

der Gleichungen (5) erhalten. Die Gleichung gestattet unmittelbar zu der gewöhnlichen Lichtbewegung zurückzukehren, wir haben nur in den Größen A, B, Γ, $q = 0$, $r = 0$ zu setzen. Die erste der Gleichungen (9) wird dann:

$$a^2 \cos\alpha\,(n\cos\beta - m\cos\gamma) + b^2\cos\beta\,(l\cos\gamma - n\cos\alpha) + c^2\cos\gamma\,(m\cos\alpha - l\cos\beta) = 0.$$

Diese Gleichung enthält in sich die Fresnelsche Regel, nach der bei gegebener Wellennormale das Licht linear polarisirt ist — eine Regel, welche ebenso auf das Constructionsellipsoid:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

wie auf das Indexellipsoid (Elasticitätsellipsoid):

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

begründet werden kann.

Es handelt sich nun darum in unserem Falle eine entsprechende geometrische Deutung der Gleichung (9) zu suchen, und es liegt schon des Analogon wegen nahe dabei gleichfalls an das Indexellipsoid zu knüpfen. Man wird schon hier vermuthen, daß die Deutung der Gleichung (9) auf eine Angabe bezüglich der Lage der Schwingungsebene hinauskommen wird. Lehrte die Incompressibilitätsbedingung den Cylinder kennen, auf dem die Schwingungsellipse liegen muß, so giebt die Schwingungsebene in Verbindung mit diesem Cylinder die Schwingungsellipse selbst ihrer Lage und Form nach.

Nach der Vorschrift von Mac Cullagh suchen wir zunächst die Schnittellipsen auf, welche sich aus den Kreisschnitten des Indexellipsoids in Verbindung mit dem Projectionscylinder ergeben. Es seien diese Schnittellipsen gegeben durch:

$$(A_1):(B_1):(\Gamma_1)$$
$$(A_2):(B_2):(\Gamma_2),$$

wo:
$$A_1 = p_1\cos\alpha_1 + iq_1\cos\alpha_1' \qquad A_2 = p_2\cos\alpha_2 + iq_2\cos\alpha_2'$$
$$B_1 = p_1\cos\beta_1 + iq_1\cos\beta_1' \qquad B_2 = p_2\cos\beta_2 + iq_2\cos\beta_2'$$
$$\Gamma_1 = p_1\cos\gamma_1 + iq_1\cos\gamma_1' \qquad \Gamma_2 = p_2\cos\gamma_2 + iq_2\cos\gamma_2'.$$

Die Kreisschnitte des Indexellipsoids sind gegeben durch

$$\frac{x}{z} = \mp\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}},$$

daher ist:

$$\frac{\Gamma_1}{A_1} = -\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}} \qquad \frac{\Gamma_2}{A_2} = +\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

Die durch die Kreisschnitte des Indexellipsoids erhaltenen Schnittellipsen sollen aber auch auf dem Projectionscylinder liegen, daher muß nach früheren Bemerkungen:

$$\begin{aligned} A_1\lambda + B_1\mu + \Gamma_1\nu &= 0 \\ A_2\lambda + B_2\mu + \Gamma_2\nu &= 0, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\Gamma_1}{A_1}\frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu\sqrt{a^2-b^2} - \lambda\sqrt{b^2-c^2}}{\mu\sqrt{b^2-c^2}},$$

$$\frac{B_2}{A_2} = -\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\Gamma_2}{A_2}\frac{\nu}{\mu} = -\frac{\nu\sqrt{a^2-b^2} + \lambda\sqrt{b^2-c^2}}{\mu\sqrt{b^2-c^2}}.$$

Es folgen:

$$\begin{aligned} A_1 &= \mu\sqrt{b^2-c^2} & A_2 &= \mu\sqrt{b^2-c^2}, \\ B_1 &= \nu\sqrt{a^2-b^2} - \lambda\sqrt{b^2-c^2} & B_2 &= -(\nu\sqrt{a^2-b^2} + \lambda\sqrt{b^2-c^2}), \\ \Gamma_1 &= -\mu\sqrt{a^2-b^2} & \Gamma_2 &= \mu\sqrt{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

Die Quadrate der conjugirten Halbmesser werden:

$$\left.\begin{matrix} p_1^2 \\ p_2^2 \end{matrix}\right\} = l^2(b^2-c^2) + m^2(a^2-c^2) + n^2(a^2-b^2) \mp 2nl\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$$

$$\left.\begin{matrix} q_1^2 \\ q_2^2 \end{matrix}\right\} = r^2\{f^2(b^2-c^2) + g^2(a^2-c^2) + h^2(a^2-b^2) \mp 2hf\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\}$$

und:

$$\left.\begin{matrix} p_1^2 - q_1^2 \\ p_2^2 - q_2^2 \end{matrix}\right\} = (l^2 - r^2f^2)(b^2-c^2) + (m^2 - r^2g^2)(a^2-c^2) + (n^2 - r^2h^2)(a^2-b^2) \mp 2(nl - r^2hf)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$$

Die Bedingung, daß die conjugirten Durchmesser Axen werden ist:

$$lf(b^2-c^2) + mg(a^2-c^2) + nh(a^2-b^2) \mp (nf+lh)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} = 0.$$

In diesem Falle erhalten wir daher:

$$\left.\begin{matrix} p_1^2 - q_1^2 \\ p_1^2 - q_1^2 \end{matrix}\right\} = \lambda^2(b^2-c^2) + \mu^2(a^2-b^2) + \nu^2(a^2-b^2) \mp 2\lambda\nu\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

Wir verbinden jetzt die Endpunkte der beiden großen Halbaxen und die Endpunkte der beiden kleinen Halbaxen und untersuchen, wie müssen diese Verbindungslinien getheilt werden, damit die Theilungspunkte in die Ebene der Schwingungsellipse zu liegen kommen.

Es mögen die Verbindungslinien im Verhältniß von $x : y$ ge-

theilt werden, dann sind unter Berücksichtigung von

$$A_1-A_2 = 0 \quad B_1-B_2 = 2\nu\sqrt{a^2-b^2} \quad \Gamma_1-\Gamma_2 = -2\mu\sqrt{a^2-b^2}$$

die Coordinaten der Theilungspunkte gegeben durch:

$$\mu\sqrt{b^2-c^2},$$
$$\nu\sqrt{a^2-b^2}\left(1-\frac{2x}{x+y}\right)-\lambda\sqrt{b^2-c^2},$$
$$-\mu\sqrt{a^2-b^2}\left(1-\frac{2x}{x+y}\right).$$

Es soll nun identisch sein:

$$A\mathrm{A}+B\mathrm{B}+C\Gamma = 0.$$

$$A\mu\sqrt{b^2-c^2}+B\left(\nu\sqrt{a^2-b^2}\left(1-2\frac{x}{x+y}\right)-\lambda\sqrt{b^2-c^2}\right)$$
$$-C\mu\sqrt{a^2-b^2}\left(1-2\frac{x}{x+y}\right) = 0.$$

Es folgt also:

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{\nu}{\mu}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\left(1-2\frac{x}{x+y}\right)-\frac{\lambda}{\mu},$$
$$\frac{\Gamma}{\mathrm{A}} = -\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\left(1-2\frac{x}{x+y}\right).$$

Durch Elimination von

$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\left(1-2\frac{x}{x+y}\right)$$

erhalten wir hieraus wieder als Probe der Richtigkeit die Incompressibilitätsbedingung

$$\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\mu+\Gamma\nu = 0.$$

Wir bestimmen nun $x/(x+y)$ aus:

$$\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\mu+\Gamma\nu = 0.$$
$$(b^2-c^2)\,\mathrm{B}\Gamma\lambda+(c^2-a^2)\,\Gamma\mathrm{A}\mu+(a^2-b^2)\,\mathrm{AB}\nu = 0.$$
$$\frac{\Gamma}{\mathrm{A}} = -\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\left(1-2\frac{x}{x+y}\right).$$

Wir eliminiren zuerst B, um aus den beiden ersten Gleichungen Γ/A zu bestimmen:

$$\mathrm{B} = -\frac{1}{\mu}(\mathrm{A}\lambda+\Gamma\nu).$$

Dann wird die zweite Gleichung:

$$-(b^2-c^2)\,\Gamma\lambda\,(A\lambda+\Gamma\nu)+(c^2-a^2)\,\Gamma A\,\mu^2-(a^2-b^2)\,A\nu\,(A\lambda+\Gamma\nu)=0$$

oder etwas umgeformt:

$$\frac{\Gamma^2}{A^2}+\frac{\Gamma}{A}\,\frac{\lambda^2(b^2-c^2)+\mu^2(a^2-c^2)+\nu^2(a^2-b^2)}{(b^2-c^2)\,\lambda\nu}+\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}=0$$

$$\frac{\Gamma}{A}=-\frac{1}{(b^2-c^2)\,\lambda\nu}\left[\tfrac{1}{2}\left\{\lambda^2(b^2-c^2)+\mu^2(a^2-c^2)+\nu^2(a^2-b^2)\right\}\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left\{\lambda^2(b^2-c^2)+\mu^2(a^2-c^2)+\nu^2(a^2-b^2)\right\}^2-4\lambda\nu\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)}\right]$$

$$=-\frac{1}{(b^2-c^2)\,\lambda\nu}\left[\tfrac{1}{2}\left\{(p_1^2-q_1^2)+(p_2^2-q_2^2)\right\}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(p_1^2-q_1^2)(p_2^2-q_2^2)}\right]$$

$$\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\,\frac{\Gamma}{A}=\frac{(\sqrt{p_1^2-q_1^2}\mp\sqrt{p_2^2-q_2^2})^2}{(p_1^2-q_1^2)-(p_2^2-q_2^2)}=-1+2\,\frac{x}{x+y}$$

Der Umstand, daß $\frac{x}{x+y}$ ein echter Bruch ist, entscheidet für die Gültigkeit des — Zeichens vor $\sqrt{p_2^2-q_2^2}$

$$2\,\frac{x}{x+y}=1+\frac{\sqrt{p_1^2-q_1^2}-\sqrt{p_2^2-q_2^2}}{\sqrt{p_1^2-q_1^2}+\sqrt{p_2^2-q_2^2}}=\frac{2\sqrt{p_1^2-q_1^2}}{\sqrt{p_1^2-q_1^2}+\sqrt{p_2^2-q_2^2}}.$$

Es folgt also $\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{p_1^2-q_1^2}{p_2^2-q_2^2}}$, und damit ist die von Mac Cullagh gegebene Regel zur Aufsuchung der Schwingungsebene der Ellipse bewiesen; dieselbe lautet:

Man suche die Schnittellipsen der Kreisschnitte des Indexellipsoides mit dem durch die Größen r, l, m, n, f, g, h bekannten Projectionscylinder; es seien p_1, p_2 die großen Halbaxen, q_1, q_2 die kleinen Halbaxen derselben. Nun verbinde man die Endpunkte der großen und der kleinen Halbaxen und theile jede dieser Verbingungslinien in dem Verhältniß von $\sqrt{p_1^2-q_1^2}:\sqrt{p_2^2-q_2^2}$. Die Ebene welche durch diese Theilungspunkte und durch den Mittelpunkt der ersten Schnittellipsen gelegt wird, hat die Lage der Ebene der Schwingungsellipse.

Mac Cullagh empfiehlt einige Vorsicht bei der Anwendung dieser Regel; diese Bemerkung bezieht sich wohl darauf, daß die Endpunkte der kleinen resp. großen Axen richtig (also etwa nicht über Kreuz) verbunden werden. In jedem Fall geben die analytischen Formeln oder die Betrachtung eines stetigen Ueberganges von als richtig bekannten Verbindungslinien zu den zu bestimmenden Fällen Auskunft.

Die Regel von Mac Cullagh läßt im Stich, wenn wir von zweiaxigen Krystallen zu einaxigen Krystallen übergehen wollen.

Wir kehren daher zu den Gleichungen (5) zurück, die erste derselben wird, wenn wir $b = c$ setzen:

$$s^2 A/c^2 = A(\mu^2+\nu^2) - \lambda(B\mu+\Gamma\nu)$$
$$= A(\lambda^2+\mu^2+\nu^2).$$

Daraus folgt entweder

$$A = 0 \qquad \text{oder} \quad s^2 = c^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2).$$

Die erste Gleichung entspricht dem Fall der extraordinären Welle und besagt, das $\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha' = 0$. Die Ebene der Schwingungsellipse steht daher für die extraordinäre Welle in einaxigen Krystallen stets senkrecht zur optischen Axe [1]). Die Schwingungsellipse ist weiter ihrer Form nach unter Benutzung des Projectionscylinders gegeben.

Die zweite Gleichung entspricht dem Fall der ordinären Welle im einaxigen Krystall und dem Fall des isotropen Mediums; hier ist die Lage der Schwingungsebene erst bestimmbar durch den Schwingungszustand des einfallenden Lichts, in ähnlicher Weise, wie in einem isotropen Medium bei gegebener Wellennormale die Polarisation der Wellenebene ganz beliebig sein kann und ihre Bestimmung erst findet, wenn der Schwingungszustand des einfallenden Lichts gegeben ist [2]).

Das Problem der totalen Reflexion.

Einführung der Grenzbedingungen.

Die Grenzbedingungen von Mac Cullagh fallen analytisch vollkommen mit den Neumann-Kirchhoffschen Grenzbedingungen zusammen, wonach also kurz zu sagen: die Gleichheit der Verrückungscomponenten zu beiden Seiten der Grenzfläche sowie die Erhaltung der lebendigen Kraft der Lichtbewegung für den Act der Reflexion und Brechung angenommen wird. Mac Cullagh hat für die partielle Lichtbrechung diesen Grenzbedingungen wieder eine geometrische Deutung gegeben, auf die ich zum Verständniß des Folgenden, insbesondere des Begriffs der uniradialen Richtungen, wohl kurz hier eingehen muß.

Wir lassen um die Vorstellung zu fixiren linear polarisirtes Licht

---

1) cf. Coll. Works pag. 220.

2) Die Ausführung der pag. 220 gemachten Bemerkung Mac Cullagh's über die Hülfsgrößen ξ, η, ζ, würde hier zu weit führen und erscheint wenig von Belang.

auf die Grenzfläche zweier Medien fallen und partielle Reflexion erleiden. Wir denken uns von dem Punkt der Grenzfläche, an dem wir die Reflexion und Brechung betrachten wollen, die Amplituden der Aetherbewegung für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle der Größe und Richtung nach aufgetragen.

Im Falle beide Medien isotrop sind, besagen dann die Grenzbedingungen, welche die Gleichheit des Verrückungscomponenten aussprechen, wie leicht ersichtlich, daß die geometrisch dargestellten Amplituden in einer Ebene liegen, und die Amplitude der gebrochenen Welle als Resultante der anderen Amplituden gefaßt werden kann. Welches aber diese Ebene ist, in der die 3 Amplituden liegen, besagt die Neumann-Kirchhoffsche Grenzbedingung, es ist die Polarisationsebene der gebrochenen Welle.

Im Falle Licht in einem isotropen Medium auf ein anisotropes Medium fällt, tritt an Stelle der Polarisationsebene der gebrochenen Welle die Polarebene[1]) derselbe, welche im Falle eines isotropen Mediums mit der Polarisationsebene identisch ist. Da aber im Allgemeinen 2 gebrochene Wellen existiren, werden wir hier auch für 2 Polarebenen die geometrische Construction ausführen können, nach der sich die Amplitude jeder einzelnen gebrochenen Welle nach Größe und Richtung als Resultante je einer Amplitude der einfallenden und reflectirten Welle darstellt. Diese Richtungen der einfallenden und reflectirten Amplituden (Transversalen) werden von Mac Cullagh als die uniradialen Richtungen bezeichnet. Hat die Amplitude des einfallenden Lichts die uniradiale Richtung so findet keine Doppelbrechung statt, im andern Fall lassen sich die einfallenden und reflectirten Amplituden nach den uniradialen Richtungen zerlegen, eine Bemerkung, auf der die verhältnißmäßig einfache Darstellung der Gesetze der Doppelbrechung nach Mac Cullagh[2]) beruht.

Mac Cullagh hat das Neumann-Kirchhoffsche Princip ersetzt durch 2 andere analytische Gleichungen und zwar auf 2 verschiedene Arten[3]), wodurch im Ganzen scheinbar 5 Grenzbedingungen aufgestellt werden; er weist[4]) jedoch nach, daß im Fall der Fresnelschen Lichtbewegung dann immer eine identisch durch die übrigen erfüllt wird. Dieser Beweis läßt sich jedoch ganz unabhängig von der für die Art der Schwingung angenommenen Form führen[5]), er gilt also ebenso im Falle der partiellen wie der totalen Reflexion.

1) Mac Cullagh. Coll. Works 1880. pag. 96. 183.
2) Mac Cullagh. Coll. Works 1880. pag. 87. 145.
3) Mac Cullagh. Coll. Works 1880. pag. 169 u. pag. 189.
4) Mac Cullagh. Coll. Works 1880. pag. 175.
5) cf. Kirchhoff gesammelte Abhandlungen 1882. pag. 368.

Zur Verification der von Mac Cullagh aufgestellten Sätze und Ausdrücke genügt es sich auf die 3 ersten Grenzbedingungen zu beschränken, also nur die Gleichheit der Verrückungscomponenten zu berücksichtigen.

Wir setzen für die einfallende und reflectirte Lichtbewegung an die Gleichungen:

$$\xi_0 = p_0 \cos\alpha_0 \sin\varphi_0 + q_0 \cos\alpha_0' \cos\varphi_0 \qquad \xi_r = p_r \cos\alpha_r \sin\varphi_r + q_r \cos\alpha_r' \cos\varphi_r$$
$$\eta_0 = p_0 \cos\beta_0 \sin\varphi_0 + q_0 \cos\beta_0' \cos\varphi_0 \qquad \eta_r = p_r \cos\beta_r \sin\varphi_r + q_r \cos\beta_r' \cos\varphi_r$$
$$\zeta_0 = p_0 \cos\gamma_0 \sin\varphi_0 + q_0 \cos\gamma_0' \cos\varphi_0 \qquad \zeta_r = p_r \cos\gamma_r \sin\varphi_r + q_r \cos\gamma_r' \cos\varphi_r,$$

für die beiden gebrochenen Lichtwellen:

$$\xi_1 = \varepsilon_1(p_1\cos\alpha_1\sin\varphi_1 + q_1\cos\alpha_1'\cos\varphi_1) \qquad \xi_2 = \varepsilon_2(p_2\cos\alpha_2\sin\varphi_2 + q_2\cos\alpha_2'\cos\varphi_2)$$
$$\eta_1 = \varepsilon_1(p_1\cos\beta_1\sin\varphi_1 + q_1\cos\beta_1'\cos\varphi_1) \qquad \eta_2 = \varepsilon_2(p_2\cos\beta_2\sin\varphi_2 + q_2\cos\beta_2'\cos\varphi_2)$$
$$\zeta_1 = \varepsilon_1(p_1\cos\gamma_1\sin\varphi_1 + q_1\cos\gamma_2'\cos\varphi_1) \qquad \zeta_2 = \varepsilon_2(p_2\cos\gamma_2\sin\varphi_2 + q_2\cos\gamma_2'\cos\varphi_2),$$

wo

$$\varepsilon_1 = e^{-\frac{2\pi r_1}{\lambda}(f_1 x + g_1 y + h_1 z)}$$
$$\varepsilon_2 = e^{-\frac{2\pi r_2}{\lambda}(f_2 x + g_2 y + h_2 z)}.$$

Die Berechtigung zur Annahme einer Doppelbrechung auch im Falle der totalen Reflexion beruht abgesehen von der directen Erfahrung (2 Grenzwinkel der totalen Reflexion) auf Gleichung (7), welche in Bezug auf s^2 vom II. Grade ist.

Es soll nun nach den 3 ersten Grenzbedingungen:

$$\overline{\xi_0 + \xi_r} = \overline{\xi_1 + \xi_2}$$
$$\overline{\eta_0 + \eta_r} = \overline{\eta_1 + \eta_2}$$
$$\overline{\zeta_0 + \zeta_r} = \overline{\zeta_1 + \zeta_2}.$$

Es folgt daraus, daß einmal für die Grenzebene $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ sein müssen, andernfalls die Bewegung abhängig von der Wahl des Anfangspunkts des Coordinatensystems wäre. Die Gleichungen

$$f_1 x + g_1 y + h_1 z = f_2 x + g_2 y + h_2 z = 0$$

sind also in der That nichts anderes als die Grenzebenen der beiden Medien.

Sodann folgt die Gleichheit der Winkel:

$$\varphi_0 = \varphi_r = \varphi_1 = \varphi_2.$$

Das liefert einmal das bekannte Reflexionsgesetz, sodann analog dem Brechungsgesetz der partiellen Reflexion:

$$\sin\omega = s \sin i,$$

wo i der Einfallswinkel, ω der Brechungswinkel, s die Geschwindigkeit der gebrochenen Welle im Verhältnis zur einfallenden Welle, welche gleich 1 gesetzt werden möge, bedeutet. Die einfallende und gebrochene Wellennormale liegt danach in einer Ebene. Die Bezeichnung der durch die Richtungen l, m, n, f, g, h gelegten Ebene als Einfallsebene findet dadurch ihre Berechtigung.

Diese Gleichung wäre in Verbindung mit (7) und (8) zu bringen, zur Bestimmung von s und r. Im Falle optisch einaxiger Medien war uns ω bekannt cf. (8a), woraus Gleichungen für $\cos\omega$ und $\operatorname{tang}\omega$ unmittelbar abgeleitet waren, die Gleichung $s = \sin\omega/\sin i$ liefert dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bei gegebenem Einfallswinkel i und die zugehörige Constante r folgt nach (7a) dann aus:

$$r = \sqrt{\frac{a^2(m^2+n^2) + c^2l^2 - \frac{\sin^2\omega}{\sin^2 i}}{a^2(g^2+h^2)+c^2f^2}}.$$

Im Falle eines isotropen Mediums wird $\omega = \pi/2$, $s = 1/\sin i$ $r = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2\sin^2 i}}$ [1], wo dann a der Brechungsindex für den Uebergang des Lichts vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium ist.

Mac Cullagh schlägt zur Bestimmung der Größen ω und r einen anderen Weg ein, der an die Construction [2] der partiell reflectirten und gebrochenen Wellennormalen mit Hülfe der Indexfläche unmittelbar anknüpft und auf die totale Reflexion übertragen [3] wird. Es sei s' wieder das Einfallsloth, $x's'$ die Einfallsebene, setzen wir $x' = \sin i$, dann ist die Curvengleichung, welche durch den Schnitt der Einfallsebene mit der Indexfläche erhalten wird, in Bezug auf s' vom 4. Grade. Die Wurzeln dieser Gleichung seien — wir denken uns die Gleichung etwa durch Probiren aufgelöst

$$u \pm v\sqrt{-1} \qquad u' \pm v'\sqrt{-1}$$

Es kann dann ω und r durch u und v bestimmt werden.

Mac Cullagh giebt ohne nähere Andeutung der Ableitung die Formeln:

---

1) Mac Cullagh Coll. Works 1880 pag. 218.

2) W. Hamilton. Trans. Roy. Irish Acad. 1833. 17, 144. Mac Cullagh ibid. 17, 252. Coll. Works 36.

3) Mac Cullagh Coll. Works pag. 191.

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin i}{u} \qquad r = sv$$

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{\sin i}{u'} \qquad r' = s'v'.$$

Ich leite diese Ausdrücke auf einem Wege ab, der zugleich die völlige Uebereinstimmung der Theorieen von Mac Cullagh und Neumann-Kirchhoff zeigen wird. Wir knüpfen an die Darstellung Kirchhoffs[1]) und setzen für die bei ihm vorkommende Function

$$f\left(\frac{x}{h} + \frac{s}{h\operatorname{tang}\varphi_1} - t\right) = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{x}{h} + \frac{s}{h\operatorname{tang}\varphi} - t\right)\frac{2\pi}{T}.$$

Im Falle der totalen Reflexion wird hierin in unserer Bezeichnung

$$\operatorname{tang}\varphi = \sin i/(u + iv)$$

und die Function f verwandelt sich bei der Kirchhoffschen Darstellung in

$$e^{-\frac{2\pi s}{hT}\cdot\frac{v}{\sin i}} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{x}{h} + \frac{su}{h\sin i} - t\right)\frac{2\pi}{T}.$$

Dieser Ausdruck muß identisch sein mit dem bei Mac Cullagh vorkommenden Ausdruck

$$e^{-\frac{2\pi s}{\lambda}r} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(x\sin\omega + s\cos\omega - st\right)\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{wo } s = \frac{\sin\omega}{\sin i} \text{ und } \lambda = sT.$$

Die Vergleichung liefert die Relationen:

$$hT = \frac{\lambda}{\sin\omega}, \quad \frac{hT\sin i}{u} = \frac{\lambda}{\cos\omega}, \quad \frac{v}{hT\sin i} = \frac{r}{\lambda},$$

und aus diesen folgt unmittelbar:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin i}{u}, \quad r = v\frac{\sin\omega}{\sin i} = vs.$$

Wir können im Fall optisch einaxiger Medien diese Ausdrücke auch unmittelbar aus der Theorie von Mac Cullagh herleiten. Im Falle $b = c$ wird die Indexfläche bezogen auf die Hauptaxen des Mediums

$$(c^2(x^2 + y^2 + z^2) - 1)\,(c^2x^2 + a^2(y^2 + z^2) - 1) = 0.$$

---

1) Kirchhoff gesammelte Abhandlungen pag. 371. 373.

Wir führen für den Theil:

$$c^2x^2 + a^2(y^2 + z^2) - 1$$

ein Coordinatensystem $x'y'z'$ ein, wo $x'y'$ mit der Grenzebene, $x'z'$ mit der Einfallsebene zusammenfallen möge, es ist dann

$$\begin{aligned} x &= f_0x' + f_1y' + fz' \\ y &= g_0x' + g_1y' + gz' \\ z &= h_0x' + h_1y' + hz' \end{aligned} \qquad \text{wo} \qquad \begin{aligned} f_0\sin\omega &= l - f\cos\omega \\ g_0\sin\omega &= m - g\cos\omega \\ h_0\sin\omega &= n - h\cos\omega. \end{aligned}$$

Der Schnitt der Einfallsebene (also $y' = 0$) mit dem zu betrachtenden Theil der Indexfläche liefert dann:

$$\begin{aligned} z'^2(f^2c^2 + (g^2 + h^2)a^2) + 2z'x'(f_0fc^2 + (g_0g + h_0h)a^2) \\ + x'^2(f_0^2c^2 + (g_0^2 + h_0^2)a^2) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Hierin $x' = \sin i$ gesetzt und die Gleichungen (7a) und (8a) berücksichtigt.

Erhalten wir die Gleichung:

$$z'^2 - 2z'\sin i\cot\omega + \sin^2 i\cot^2\omega + r^2\frac{\sin^2 i}{\sin^2\omega} = 0$$

es müssen also:

$$u = \sin i\cot\omega$$

$$u^2 + v^2 = \sin^2 i\cot^2\omega + r^2\frac{\sin^2 i}{\sin^2\omega} \qquad \text{also } v = rs.$$

Es erübrigt [1]) nun noch die weiter aus der Gleichheit des Verrückungscomponenten folgenden Bedingungen zu discutiren:

$$\begin{aligned} p_0\cos\alpha_0 + p_r\cos\alpha_r &= p_1\cos\alpha_1 + p_2\cos\alpha_2 \\ p_0\cos\beta_0 + p_r\cos\beta_r &= p_1\cos\beta_1 + p_2\cos\beta_2 \\ p_0\cos\gamma_0 + p_r\cos\gamma_r &= p_1\cos\gamma_1 + p_2\cos\gamma_2 \\ q_0\cos\alpha_0' + q_r\cos\alpha_r' &= q_1\cos\alpha_1' + q_2\cos\alpha_2' \\ q_0\cos\beta_0' + q_r\cos\beta_r' &= q_1\cos\beta_1' + q_2\cos\beta_2' \\ q_0\cos\gamma_0' + q_r\cos\gamma_r' &= q_1\cos\gamma_1' + q_2\cos\gamma_2'. \end{aligned}$$

Im Falle das Medium isotrop setzten wir $p_2 = q_2 = 0$, insofern nur eine gebrochene Welle existirt. Die Größen p_1 q_1 konnten bisher irgend 2 conjugirte Halbmesser der Schwingungsellipse sein, wenn wir jetzt dieselben die Halbaxen der Ellipse sein lassen, sind unmittelbar die von Mac Cullagh gegebenen Regeln ersichtlich:

Man nehme irgend einen Schnitt des Projectionscylinder (der ja

1) Mac Cullagh Coll. Works pag. 219.

durch r, l, m, n, f, g, h gegeben). Dieser Schnitt stelle die Schwingung eines Aethertheilchens an der gemeinsamen Grenze der beiden Medien dar; es seien OP und OQ die Halbaxen des Schnitts, welche vom Einfallspunkt O mit ihren Längen und Richtungen gezogen seien, Man lege ferner durch O 2 Ebenen, welche die Lage der einfallenden und reflectirten Welle darstellen mögen. Man lege nun durch die Halbaxe OP eine Ebene und drehe dieselbe, bis der Winkel der Schnittgeraden dieser Ebene mit den die Lage der einfallenden und reflectirten Wellen darstellenden Ebenen halbirt wird. In dieser Lage zeichne man aus den Schnittgeraden das Parallelogramm, zu dem OP die Diagonale ist. Es seien OA und OA' die entsprechenden Seiten desselben. Die gleiche Construction werde mit der Halbaxe OQ gemacht, wodurch die Schnittgeraden OB und OB' erhalten werden. Es wird dann die einfallende Schwingung repräsentirt durch die Ellipse, zu der OA und OB conjugirte Halbmesser sind und die reflectirte Schwingung durch die Ellipse, zu der OA' und OB' conjugirte Halbmesser sind. Zugleich ist ersichtlich, daß die Punkte $AA'P$ gleichzeitig, ebenso wie die Punkte $BB'Q$ passirt werden.

Dieselbe Construction ist anwendbar auf optisch einaxige und zweiaxige Medien. Es ist dabei nur zu bedenken, daß bei optisch einaxigen die extraordinäre Welle, bei optisch zweiaxigen Medien beide Wellen eine bestimmt vorgeschriebene durch den Einfallswinkel gegebene Schwingungsebene der Ellipse haben, während bei isotropen Medien und der ordinären Welle optisch einaxiger Medien nur der Projectionscylinder eine vorgeschriebene Lage hat.

Indem wir ferner den Begriff der uniradialen Richtung von der gewöhnlichen Lichtbewegung übertragen auf den Vorgang der totalen Reflexion, werden wir nach einander die Construction für die eine dann für die andere gebrochene Welle ausführen, um innerhalb des isotropen Mediums die Lichtbewegung für das einfallende und für das reflectirte Licht aus den uniradial einfallenden Schwingungen zusammen zusetzen. Ebenso wie wir eine einfallende Schwingung auflösen können in 2 den uniradialen ähnliche Schwingungen, können wir die ihr entsprechende reflectirte Schwingung finden durch Zusammensetzung der uniradial reflectirten Schwingungen.

Aus diesen geometrischen Betrachtungen ist die vollständige Lösung des Problems der totalen Reflexion für isotrope und anisotrope Medien ersichtlich. Der Projectionscylinder kann in jedem Fall aus den Formeln

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin i}{u} \qquad r = v\,\frac{\sin\omega}{\sin i}$$

bestimmt werden. Im Falle anisotroper Medien existiren 2 solche

Projectionscylinder. Bei optisch zweiaxigen Krystallen können von vorneherein nach der MacCullagh'schen Regel auf beiden die den Schwingungsellipsen der beiden gebrochenen Wellen ähnlichen Ellipsen aufgezeichnet, und daher rückwärts die uniradial einfallenden Schwingungsellipsen construirt werden, deren Größe dann durch die gegebene einfallende Schwingungsellipse bestimmt wird. Im Falle optisch einaxiger Medien ist zwar für die extraordinär gebrochene Welle auch noch die der Schwingungsellipse bekannt, aber nicht mehr für die ordinäre Welle; dasselbe gilt für isotrope Medien. In diesen Fällen würde also die praktische Ausführung der obigen geometrischen Betrachtungen auf ein bloßes Probiren herauskommen.

Ich behalte mir vor auf diesen Gegenstand in einer späteren Mittheilung ausführlicher zurückzukommen, insbesondere sollen die analytischen Ausdrücke für die Phasendifferenz der total reflectirten Welle aufgestellt werden. Für isotrope Medien ist dies bereits von Neumann geschehen.

Königsberg i. Pr. 1. November 1885.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1885.

(Fortsetzung).

B. Boncompagni Bulletino di Bibliografia e di Storia delle sc. mat. e fis. T. XVII. Luglio Roma 1884. 4. (für die Gauss-Bibliothek.)
XIV. Jahresbericht der histor.-antiq. Gesellschaft von Graubünden. Jahrg. 1884. 8.
Placidus Plattner. Die Raeteis von Simon Lemnius. Chur 1874. 8.
The Canadian Journal of science, literature and history. Vol. XV No. I—IV. VII. VIII. Toronto 1876—1878. 8.
Monthly Notices of the r. astronom. Soc. Vol. XLV No. 6.
Atti della r. Accademia dei Lincei. II. Ser. 4. Rendiconti. Vol. I fasc. 10.
Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XX. Mai-Heft 1885.
Bulletin de l'Académie impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXX. No. 1.
Nature No. 810.
Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London. 1884. Pt. IV.
Leopoldina. Heft XXI. No. 5—8.
Annales de la société géologique de Belgique. T. X. 1882—3 et tables générales des tomes I à X.
Nature 811.
G. Struever Contribuzioni alla mineralogia dei Vulcani Sabatini. Pt. I. (R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXII. 1884—85.)
Jahresbericht des naturw. Vereins zu Halle. I—III (1848—1850).
ΚΩΝΣΤ. Ν. ΚΩΣΤΗ. ΠΕΡΙ ΑΔΙΚΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΟΙΝΗΣ ΕΝ ΤΗ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΤΡΑΓΩΔΙΑ. ΑΘΗΝΗΣΙ. 1885. 8.

ΑΝΑΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟΝ ΕΤΟΣ 1884—1885 *ΑΡΧΩΝΤΟΥΝΤΩΝ ΑΘΗΝΑΙΣ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ* 1884. 8.

ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΣ Γ. ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΤΕΣΣΑΡΑΚΟΣΤΗΝ ΠΡΥΤΑΝΕΙΑΝ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1884. 8.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and geodetic Survey showing the progress of the Work during the fiscal year ending with Juni 1883. Washington 1884. Text and Sketches. 4.

John Hopkins University Circulars. Vol. IV. No. 39.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. LVIII. Heft 1 (Januar-Februar 1885).

Third annual report of the U. St. Geological Survey 1881—82 by J. W. Powell. Washingt. 1883.

Monographs of the U. St. Geologic. Survey. Vol. III. Geology of the Comstock Lode and the Washoe District by George F. Becker. Washingt. 1882. Texte. Atlas.

Proceedings of the american philosophical Society. Vol. XXI. No. 116. 1884.

Register of papers published in the Transactions and Proceedings of the american philosophical Society, compiled by H. Philipps, jr.

Memoirs of the national Academy of sciences. Vol II. 1883. Washingt. 1884. 4.

The scientific transactions of the roy. Dublin Society. Vol. III (Ser. II) V. 1884. VI. 1885. 4.

The scientific proceedings of the roy. Dublin Society. Vol. IV. (N. S.) Pt. 5. 1884—5. 8.

Nature. No. 812.

Gomes Teixeira Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Coimbra. Vol. V 1884. Vol. VI No. 1. 1885. 8.

Atti della r. Accademia dei Lincei. Ser. 4. Rendiconti. Vol. I. Fasc. 11.

69. Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden 1883/84. Emden 1885. 8.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Pt. I. Januar—March 1885. Philadelphia 1885. 8.

Anales de la Sociedad científica argentena. Entreg. III t. XIX. Buenos Ayres 1885.

O. Benndorf, Ueber die jüngsten geschichtlichen Wirkungen der Antike. Wien 1885. 8.

Acta Universitatis Lundensis. Tom. XIX. Lund 1882—83. 4 Afdelningar.

Lund's Universitets-Bibliotheks Accessions-Katalog 1883. Lund 1884. 8.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 39. Heft 1. Leipzig 1885.

Transactions of the Cambridge philosophical Society. Vol. XIV. Pt. I. Cambridge 1885. 4.

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Vol. V. Pt. I. II. III. 1884—85. 8.

Preisschriften gekrönt und herausgegeb. von der fürstl. Jublonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. No. XVII d. histor.-nationalökon. Section. XXV. Ernst Hasse, Geschichte der leipziger Messen. Leipzig 1885. Kl. fol.

Informe dirijido al Señor Segretario de fomento sobre los trabajos practicados por la oficina de estadistica en el año de 1884. Guatemala. 8.

Proceedings of the London mathematical Society. No. 237—239.

F. A. Genth and Gerhard vom Rath, On the Vanadates and Jodyrite from lake Valley, Surra Co, New Mexico. — Contrib. from the Laborat. of the Univers. of Pennsylvania No. XXIII. 8.

Annual Report of the Chief Signal Officer to the Secretary of Warf. the year 1883. Washington 1884.

Juni 1885.

P. Hunfalvy und Gustav Heinrich, Ungarische Revue. V. Heft. 1885. Mai. Budapest.

Boletin de la Academia nacional de ciencias en Cordoba. T. VII. Entrega. 4. Buenos Aires 1885.

Alfred Stern, Abhandlungen und Aktenstücke zur Geschiehte der preussischen Reformzeit 1807—1815. Leipzig 1885.

Bulletin de la société mathématique de France. T. XIII. No. 3. Paris 1885.
Carl Ohrtmann, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. XIV. Jahrg. 1882. H. 3. Berlin 1885.
Proceedings of the american pharmaceutical Association at the 32 annual Meeting held at Milwaukee, Wis, August 1884. Philadelphia 1885. 8.
Abhandlungen, herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. IX. Bd. 2. Heft. Bremen 1885.
Atti della r. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XX. Disp. 5a.
Nature No. 814.
Monthly Notices of the r. astronomical Soc. Vol. XLV. No. 7.
Bulletin de l'Acad. roy. des sc. des bell. lettr. et des beauxarts de Belgique 54e Année, 3. sér., t. 9. No. 4.
Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Bd. XX. Juni-Heft 1885.
Sitzungsberichte d. math.-physical. Classe d. K. b. Akad. d. Wissensch. 1885. H. 1. — d. philos.-philolog.-hist. Classe d. K. b. Akad. d. Wissensch. 1885. H. 1.
Földtani Közlöny. Zeitschr. d. Kgl. ungar. geolog. Gesellschaft. XV k. 3—5 f. Budapest 1885.
Leopoldina. Heft XXI. No. 9—10.
Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger. Narrative. Vol. I. Pt. 1. 2. 1885. 4.
Nature. No. 815.
Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche publicato da B. Boncompagni. Tomo XVII. Agosto 1884. Roma 1884 (für die Gauss-Bibliothek).
Pubblicazione del R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. *Sez. d. filosofia e filologia:* Allessandro Chiapelli, Della interpretazione panteistica di Platone. Firenze 1881. *Sez. di medicina e chirurgia:* Archivio della scuola d'anatomia patologica diretto dal Prof. Giorgio Pellizzani. Vol. I. Firenze 1881. *Sez. di scienze fisiche e naturali:* A. Rovighi e G. Santini, Sulle convulsioni epilettiche per veleni. Firenze 1882.
Atti della r. accademia dei Lincei. Anno CCLXXX. Ser. 3a. Mem. d. cl. d. sc. morali, storiche e filologiche. Vol. VIII. X. XI. 1883. Mem. d. cl. d. sc. fisiche, matemat. e naturali. Vol. XIV. XV. XVI. XVII. 1883. 1884.
Journal of the r. microscopical Society. Ser. II. Vol. V. Pt. 3.
Regesta diplomatica historiae danicae cura Societatis reg. scientiarum danicae. Ser. 2da t. 1. Kjøbenhavn 1885. 4.
Libri memoriales capituli Lundensis, udg. ved C. Weeke. Kjøbenhavn 1884. 8.
Vidensk. Selsk. Skrifter. 6 Raekke naturvid. og mathemat. Afd. I. 11. II. 7. 4.
Oversigt over det K. danske Videnskab. Selsk. Forhandlinger. 1884. No. 3. 1885 No. 1. 8.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 19. Jahrg. Heft 4. Leipzig 1884
Nature. No. 816.
Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Aus dem Jahre 1884. Berlin 1885. 4.
Records of the geological survey of India. Vol. XVIII. Pt. 2. 1885. 8.
P. Hunfalvy und G. Heinrich, Ungarische Revue. Heft 6. Juni 1885.
Atti della r. Accadem. dei Lincei. Anno CCLXXXII. Ser. 4a. Rendiconte: Vol. I. Fac. 12. Roma 1885.
Second geological Survey of Pennsylvania. Reports. A. At Atlas. A^2. Al Atlas. C. C^2. C^3. C^3 Atlas. C^4. C^6. D DD. D^3. Vol. 1. D^3. Vol. 2. Pt. I. D^3 Atlas. D^5. Atlas. E. Pt. I. F. G. G^2. G^3. G^4. G^5. G^6. G^7. H^2. H^3. H^4. H^5. H^6. H^7.
Acta Universitatis Lundensis. T. XX. 1883—84. Mathematik och Naturvetenskap-, Philosophi-, Sprakvetenskap och Historia-, Theologi-, Räts- och Statsvetenskap. 4 Afdelningar. Lund 1883—84. 4.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

ROYAL COLLEGE OF PHYSICIANS OF EDINBURGH LIBRARY

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

16. December. **№ 11.** 1885.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 4. Juli 1885.

Briefwechsel zwischen G. Lejeune Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker,

herausgegeben von **Ernst Schering.**

Herr Kronecker hat die Güte gehabt, mir die von Dirichlet an ihn geschriebenen Briefe zuzusenden, um dieselben der Königlichen Universitäts-Bibliothek in Göttingen als Geschenk zu übergeben.

Diese Briefe gehören, außer dem ersten, der Zeit von Dirichlet's Aufenthalt in Göttingen an und haben durch diese örtliche Beziehung ein besonderes Interesse für uns. Da dieselben auch eine große geschichtliche Bedeutung für die mathematische Wissenschaft besitzen, so habe ich Herrn Kronecker um die Erlaubniß gebeten, diese Briefe sowie auch einige von Herrn Kronecker an Dirichlet gerichtete Briefe abdrucken zu lassen, auf welche die oben erwähnten sich beziehen, und von welchen ich wußte, daß Dirichlet's Sohn dieselben nach des Vaters Tode an den Verfasser zurückgegeben hatte. Diese Erlaubniß hat Herr Kronecker gütigst gewährt und auch gestattet, daß seine Briefe an Dirichlet mit dessen Antworten auf dieselben der hiesigen Universitäts-Bibliothek übergeben werden.

E. Sch.

I. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Ich habe mir, verehrter Freund, so große Nachläßigkeit gegen Sie zu Schulden kommen lassen, daß ich fast verzweifeln muß, Ihre Verzeihung zu erlangen. Sie werden nämlich als junger Mann kaum glaublich finden, was ich zu meiner Entschuldigung anführen kann, da Sie sich schwerlich eine Vorstellung davon machen, wie sehr es einem im Mittelalter, in welches ich schon seit längerer Zeit getreten bin, an der nöthigen Flexibilität fehlt, um sich schnell in Dinge hineinzufinden, mit denen man nicht schon einigermaßen vertraut ist. Als Ihr erster Brief ankam, war ich mit 13 wöchentlichen Vorlesungen u. anderen Geschäften so überladen, daß die wenige Zeit, die ich dem Studium Ihrer interessanten Mittheilung zu widmen im Stande war, durchaus nicht ausreichte, um mir Ihre Untersuchungen klar zu machen. Ich hoffte, daß ich in den Ferien dazu gelangen würde, besser in das Wesen Ihrer Arbeit einzudringen, von der ich durch meine vorläufigen Bemühungen wenigstens die Ueberzeugung gewonnen hatte, daß Sie darin einen vielfach behandelten Gegenstand von einer neuen u. wie mir schien sehr glücklich gewählten Seite angefaßt haben. In dieser Hoffnung fand ich mich aber leider getäuscht, da ich gleich nach Beginn der Ferien von einem Anfall der Grippe heimgesucht wurde, der mich länger als drei Wochen zu jeder Anstrengung unfähig gemacht hat. Nachdem ich jetzt in den letzten Tagen Ihrer Arbeit, wie ich glaube, näher getreten bin, beeile ich mich Ihnen zu sagen, daß es mir sehr wünschenswerth scheint, daß Sie eine kurze Notiz über Ihre Untersuchungen veröffentlichen, da Sie leider durch Ihr fortgesetztes schlechtes Befinden verhindert sind, an eine ausführliche Redaktion derselben für jetzt zu denken. Wenn diese Notiz, die Sie durchaus so einrichten müßten, daß jeder dem Gegenstande nicht fremde Mathematiker sich vollständig daraus vernehmen kann, nicht die Grenzen überschreitet, welche den in den akademischen Monatsbericht aufzunehmenden Aufsätzen gesteckt sind, so werde ich sie mit Vergnügen der Akademie vorlegen u. die Aufnahme in den Bericht beantragen *).

Das Weitere mündlich. Hoffentlich fällt Ihre hiesige Anwesenheit gar nicht oder doch wenigstens nicht ganz in die Zeit vom 12.

---

*) Die zwei Briefe von Kronecker, auf welche sich Dirichlet in diesem Briefe bezieht, haben sich in Dirichlet's Nachlaß nicht gefunden. Der wissenschaftliche Inhalt derselben ist in jener Notiz reproducirt, welche von Dirichlet im Juni 1853 der Berliner Akademie mitgetheilt und im betreffenden Monatsbericht abgedruckt worden ist. E. Sch.

bis 22. Mai, während welcher Tage ich meine Frau, die Karlsbad besuchen soll, dorthin begleite *).

Indem ich meine Frau u. mich selbst Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin bestens empfehle, nenne ich mich

Ihr treu ergebener

Berlin, 3. Mai 53. Dirichlet.

II. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor,

Zu meiner großen Freude habe ich vielfach gehört, daß Sie Sich in Ihrer neuen Heimath gar sehr gefallen und allen Grund haben mit jenem Wechsel zufrieden zu sein, der freilich uns hier so schweren Verlust gebracht hat. Wie sehr ich grade bei diesem Verlust betheiligt bin und wie tief ich denselben empfinde, brauche ich Ihnen kaum zu sagen, denn Sie wissen selbst, wie unendlich viel ich Ihnen verdanke, und Sie wissen auch daß, Ihnen näher zu sein, der Hauptzweck bei meiner Uebersiedelung nach Berlin war. Ich hatte nun jetzt die Absicht Sie noch in diesem Monat zu besuchen, um wenigstens für ein paar Tage den langentbehrten Genuß Ihres persönlichen Verkehrs zu haben; aber da mir Borchardt gesagt hat, daß Sie schon in wenigen Tagen nach Paris reisen, um dort wohl etwa vier bis sechs Wochen zuzubringen, so will ich die Ausführung jenes Vorhabens bis nach Ihrer Rückkehr verschieben, vorausgesetzt daß Sie Ihre mir früher mündlich gegebene Erlaubniß Sie zu besuchen noch aufrecht erhalten. Ich werde wohl — wenn auch nicht direct von Ihnen — so doch indirect durch Borchardt oder andere hiesige Bekannte zur Zeit erfahren, wenn Sie wieder in Göttingen sind. Für diese Zeit könnte ich mir nun freilich alle übrigen Mittheilungen aufsparen — aber wer weiß, was sich doch noch Alles zwischen Vorsatz und Ausführung eindrängt — und da ich Ihrer alten Theilnahme noch jetzt gewiß zu sein glaube, so will ich ein paar Worte über mein mathematisches Leben im vergangenen Winter beifügen.

Ich habe die ganze Zeit über — seit ich aus dem Seebade zurück bin — eigentlich recht anhaltend gearbeitet, und die dabei erlangten Resultate haben auch mein Streben größtentheils belohnt. Freilich habe ich die Hauptfrage, auf welche ich vor etwa einem Jahre ge-

*) Herr Kronecker theilt mir gütigst mit, daß er Ende Mai 1853 auf einer Reise nach Paris, wohin er sich zur Consultation eines dortigen Arztes begab, Berlin passirt und Dirichlet persönlich die Handschrift für die in der vorstehenden Bemerkung erwähnten Notiz übergeben hat. E. Sch.

kommen bin, nicht gelöst, aber eine Einsicht in dieselbe gewonnen, die mir sehr werthvoll ist. Außerdem habe ich den ursprünglichen Zweck, um dessentwillen ich jene Frage lösen zu müssen glaubte, ohne diese Lösung so vollständig erreicht, daß mir in dieser Hinsicht wirklich nichts zu wünschen übrig bleibt. Ich habe nämlich eine Methode gefunden zur Herleitung aller Eigenschaften der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgraden, deren Einfachheit und Strenge allen gerechten Anforderungen entsprechen dürfte *). Denn die Methode verlangt keinen irgend höheren Standpunkt mathematischen Fassungsvermögens als das Problem selbst, welches dadurch erledigt wird. Ich werde den Sommer zur sorgfältigen Ausarbeitung dieser Sachen verwenden, und diese wird nur deßhalb ziemlich umfangreich werden weil so sehr viel einzelne Resultate herauskommen, und weil ich keinen Raum sparen darf bei der genauen Bezeichnung gewisser ganz neuer Gesichtspunkte **), die namentlich in den Galoisschen und Abelschen Fragmenten vermißt werden, und ohne welche die erforderliche Strenge nicht beobachtet werden kann. Einige ganz hübsche Resultate oder — richtiger gesagt — hübsche Anschauungen, die ich bei der Beschäftigung mit jenen »Methoden« erlangt habe, werde ich unter Kurzem in einer kleinen Notiz veröffentlichen, da diese Dinge in den zu redigirenden vollständigen Abhandlungen erst ganz zuletzt an die Reihe und also erst etwa in einem Jahre zur Publikation kommen würden. Ich werde in dieser Notiz auch die allgemeinste Wurzel einer Abelschen ganzzahligen Gleichung als complexe Zahl dargestellt angeben, da es mir jetzt gelungen ist, diese in so einfache Form zu bringen, daß »die erforderlichen zahlentheoretischen Vorbemerkungen« (wie ich mich am Schlusse der im Juni 1853 der hiesigen Akademie überreichten Notiz ausdrücken mußte) nur noch ganz unbedeutend sind. — Während ich auf diese Weise die Untersuchung der Auflösbarkeit von Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist, vollständig absolvirte, habe ich mich aber auch vielfach mit allgemeineren Arbeiten beschäftigt und zwar einerseits, indem ich die Untersuchung der Gleichungen bezüglich ihrer Auflösbarkeit auch für diejenigen Grade vornahm, die nicht Primzahlen sind, und andrerseits

*) Es ist dies, wie Herr Kronecker mir gütigst mitgetheilt hat, die Methode, welche er regelmäßig – und zwar zum ersten Male im Winter $18^{61}/_{62}$ — in seinen Universitäts-Vorlesungen gegeben und alsdann im Monatsberichte der Berliner Akademie vom März 1879 veröffentlicht hat. E. Sch.

**) Nach einer von Herrn Kronecker mir gütigst zugegangenen brieflichen Mittheilung sind hiermit die »Gesichtspunkte« gemeint, welche ihn auf die Feststellung des mit dem Ausdrucke »Rationalitäts-Bereich« bezeichneten Begriffes geführt haben. E. Sch.

indem ich die Untersuchung der Gleichungen nicht mehr auf ihre Auflösbarkeit beschränkte, sondern auf die Ergründung aller Eigenschaften ausdehnte, die eine Gleichung überhaupt haben kann. In dieser Beziehung bin ich allerdings erst so weit gekommen, das ganze große neue Feld vor mir zu sehen d. h. klar zu wissen, was zu suchen ist; aber dieß ist, wie ich glaube, bei einer Untersuchung von solcher Allgemeinheit auch nicht ganz unbedeutend. Die vollständige Lösung des ganz präcisen Problems, welches ich mir in dieser Hinsicht gestellt habe, dürfte freilich, wenn überhaupt, meinen schwachen Kräften erst in geraumer Zeit gelingen. Aber lohnend ist es gewiß Zeit und Mühe an eine einzige Frage zu wenden, welche die ganze Theorie der algebraischen Gleichungen (mit einer unbekannten Größe) vollständig umfaßt. Ich bemerke nur noch, daß ich dieses Problem für die ersten Grade — den siebenten eingeschlossen — gelöst habe, daß die Schwierigkeiten dabei erst mit dem 7ten Grade anfangen, daß ich aber schon für diesen speziellen Fall Ergebnisse erlangt habe, die durch ihre Neuheit wie durch den wunderbaren Zusammenhang mit der complexen Zahlentheorie mir sehr interessant scheinen. Dabei zeigte sich mir das Naturgemäße dieser abstrakten algebraischen Untersuchungen in dem bemerkenswerthen Umstande, daß — wie alle auflösbaren und Abelschen Gleichungen in den Theorieen transcendenter analytischer Functionen vorkommen — so auch alle diejenigen »Affecte« (um mit Jacobi zu sprechen), die ich als überhaupt nur möglich a priori gefunden habe, bei gewissen bekannten Gleichungen 7ten Grades wirklich auftreten. — Was nun die Auflösbarkeit der Gleichungen anlangt, deren Grad eine beliebige zusammengesetzte Zahl ist, so habe ich auch in dieser Untersuchung wesentliche Fortschritte gemacht, ohne sie indessen zum vollständigen Abschluß gebracht zu haben ... meine Arbeit über die Gleichungen von Primzahlgraden wird die einfachen Gesichtspunkte angeben, durch welche das Algebraische und das Zahlentheoretische in diesem ganzen Gebiete gehörig geschieden und in Folge dessen eine Klarheit und Sicherheit erlangt wird, die bisher überall vermißt wurde. Aber Sie werden es gewiß billigen, hochverehrter Herr Professor, daß ich jetzt meine vorerwähnten allgemeinen Untersuchungen unterbreche, um einmal an die Redaction des — wenn auch nicht dem Inhalte — so doch dem Umfange nach ziemlich ansehnlichen Materials zu gehen, das sich mir durch fast dreijährige Arbeiten gesammelt hat. Außerdem will ich auch jetzt gleich einige ganz kleine Abhandlungen fertig machen, um sie Herrn Liouville zu überschicken; und Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie in Paris gelegentlich durch Ihr gewichtiges Wort die möglichst baldige Aufnahme derselben ins Journal

befürworteten. Ich werde in der ersten dieser Abhandlungen die Kleinigkeit über Bernoullische Zahlen auseinandersetzen, welche ich vor mehr als zehn Jahren gemacht habe; in der zweiten werde ich eine bei Vorträgen über Kreistheilung passende und äußerst einfache Weise der Zeichenbestimmung von $\Sigma e^{\frac{2l^2\pi i}{p}}$ mittheilen; in der dritten werde ich einen höchst simpeln Beweis für die Irreductibilität von $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$ geben, und die vierte wird eine wesentliche Abkürzung einer von Kummer in seinem Aufsatze über die complexen Zahlen angewendeten Methode enthalten. — Dieß, geehrtester Herr Professor, sind meine guten Vorsätze für die nächsten Wochen, — die Ausarbeitung mancher andrer Sachen, die ich in diesem Winter und früher gemacht habe, verschiebe ich noch, weil ich sie noch nicht für reif genug halte, — denn ich habe bei meinen Arbeiten über die auflösbaren Gleichungen die Erfahrung gemacht, daß ich die Dinge erst eine lange Zeit wärmen muß, ehe sie die für die Publication erforderliche Reife erhalten.

Aber ich habe Ihre Lese-Geduld gewiß schon auf eine zu harte Probe gestellt und will deßhalb endlich diese Zeilen schließen, indem ich Ihnen eine recht glückliche Reise wünsche und meine Frau sowie mich selbst Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin auf das Angelegentlichste empfehle.

Mit aufrichtigster Verehrung und Anhänglichkeit
Ihr
dankbarer Schüler
Berlin, den 3. Maerz 1856. Leopold Kronecker.

Von Kummer habe ich die besten Grüße beizufügen.
D. O.

III. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor,

Als ich Ihnen am 3. Maerz schrieb, hatte ich zwar schon an die Möglichkeit gedacht, daß mein Göttinger Reiseprojekt durch irgend etwas vereitelt werden könnte — aber es lag doch nichts vor, um dieß gradezu zu befürchten. Inzwischen hat mich mein altes Uebel wieder gequält, mein kleiner Sohn — den ganzen vorigen Winter leidend — bedurfte einer baldmöglichen Luftveränderung — und so sind wir seit einigen Wochen hier in Koesen, von wo ich Ende Juli in ein Seebad gehen werde, um meine eigene Gesundheit wieder

möglichst ins Geleis zu bringen*). Da ich auf diese Weise wieder darauf angewiesen bin, mich schriftlich Ihrem Andenken zu erhalten, so bekommen Sie hier diese Paar Zeilen bloß als Geleitschreiben des Abdruckes von einem kleinen Aufsätzchen, dessen Entstehungsgrund ich Ihnen bereits am 3. Maerz mitgetheilt habe. Ich hoffe, daß dieser Grund genügende Entschuldigung für die Existenz der beifolgenden Unbedeutendheit in Ihren Augen sein wird, falls Sie einmal gelegentlich einen Blick hinein thun sollten**). Für diesen Fall erwähne ich nur noch, daß die auf pag. 209 definirten Zahlen k und deren Eigenschaften mir mehr Mühe gemacht haben als man ihnen ansieht, und daß überhaupt die Herleitungen und Beweise der mitgetheilten Resultate über Abelsche Gleichungen manche Schwierigkeiten grade in der erforderlich gewesenen detaillirten Ausarbeitung darboten. — Uebrigens sind die erwähnten Zahlen k in mancher Beziehung interessant, und es erleidet keinen Zweifel, daß sie bei gewissen Formenanzahlen dieselbe Rolle spielen, wie die von Ihnen mit a und b bezeichneten Zahlen in der Theorie der quadratischen Formen. Wenn man nämlich (um die in dem Aufsätzchen den Buchstaben n und m beigelegten Bedeutungen beizubehalten) überhaupt Formen $n$ten Grades mit mehren Variabeln betrachtet, so kann man die den einfachsten complexen Zahlen entsprechenden so definiren: »daß die Formen in lineare Factoren zerlegbar und schon die cyklischen Functionen dieser linearen Factoren rationale Functionen der Variabeln (d. h. mit rationalen Coëfficienten) sein sollen«. Derlei Formen $n$ten Grades mit der Determinante m sind dann nichts Anderes als die Normformen (und deren associirte) von complexen Zahlen, die aus den Perioden $\varpi(\rho)$ gebildet sind, und bei deren Formenanzahl eben die k's auftreten müssen. Sie sehen, daß man auf diese Weise eine einfache Erklärung derjenigen Formen hat, die offenbar die zunächst liegenden sind, und daß hierbei nichts von jenen zufälligen Besonderheiten auftritt, welche Eisenstein bei Erklärung der Kreistheilungsformen 3ten Grades mit 3 Variabeln hat zu Hülfe nehmen müssen. — Was meine Arbeiten anlangt, so bin ich in meiner Hauptbeschäftigung nur wenig vorgeschritten, da ich mich mit einigen kleinen Ausarbeitungen habe beschäftigen müssen. Aber ich bin vielfach in den hoffnungsvollen Fernsichten dem, was ich beweisen kann, vorausgeeilt und habe dabei Anschauungen von der Natur der Gleichungen gewonnen, die, wenn

---

*) Herr Kronecker hat sein Göttinger Reiseproject in der That noch im Sommer 1856 ausgeführt.

**) Diese Worte beziehen sich auf die im Monatsbericht der Berliner Akademie vom April 1856 veröffentlichte algebraische Arbeit.

sie sich bewähren, ein ganz neues und erhebliches Interesse gewähren dürften. Bei der gänzlichen Neuheit des Feldes aber, auf welchem ich jetzt arbeite, und bei der kaum zu bewältigenden Complicirtheit glaube ich, daß ich jahrelanger Arbeit bedürfen werde, ehe ich zu stricten Resultaten komme. Also, geehrter Herr Professor, erwarten Sie in dieser Hinsicht nicht so bald etwas von mir, zumal ich ein gut Theil Zeit auf die sorgfältigste elementare Bearbeitung meiner älteren Resultate verwenden werde. Und ich habe ja doch nichts zu versäumen — vorausgesetzt daß meine Gesundheit mit den Jahren besser statt schlechter wird. Nun nur noch eins!

Bei Gelegenheit eines kleinen Sätzchens über ganzzahlige Gleichungen, welches wohl in dem ersten unter Borchardt's Namen erscheinenden Hefte des Journals abgedruckt werden wird, kam ich wiederholt auf Ihre Notiz über complexe Einheiten im Monatsberichte der Akademie. Erlauben Sie mir in Bezug darauf Ihnen zu sagen, daß — wie ich glaube — Ihre dortige Darstellung zu Mißverständnissen führen kann, und daß es meines Erachtens besser wäre die Sache zum Theil vom Ende anzufangen. Hat man nämlich — und Sie zeigen, daß dieß stets zu finden ist — ein System von Einheiten:

$$\Phi_1(\alpha),\ \Phi_2(\alpha),\ \ldots\ \Phi_{h-1}(\alpha)$$

für welches — wenn α' und α conjugirt,

$$\Phi_h(\alpha)\,.\,\Phi_h(\alpha') = a_h \text{ u. } \log a_h = A_h$$

gesetzt wird — jene Determinante $\Sigma \pm A_1 B_2 C_3 \ldots$ nicht verschwindet, so giebt es keine von 0 verschiedenen Werthe für $m_1, m_2, \ldots m_{h-1}$, so daß die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 m_1 + A_2 m_2 + \ldots + A_{h-1} m_{h-1} &= 0 \\ B_1 m_1 + B_2 m_2 + \ldots + B_{h-1} m_{h-1} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

sämmtlich erfüllt würden. Also kann nicht

$$\Phi_1(\alpha)^{m_1}\Phi_2(\alpha)^{m_2}\ \ldots\ \Phi_{h-1}(\alpha)^{m_h} = 1$$

sein für irgend welche ganze Werthe von $m_1, m_2 \ldots m_h$, denn sonst folgte wegen der Irreductibilität der zu Grunde gelegten Gleichung:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\alpha')^{m_1}\Phi_2(\alpha')^{m_2} \ldots &= 1, \\ \Phi_1(\beta)^{m_1}\Phi_2(\beta)^{m_2} \ldots &= 1, \\ \Phi_1(\beta')^{m_1}\Phi_2(\beta')^{m_2} \ldots &= 1 \text{ etc.} \end{aligned}$$

also durch Multiplication von je zwei dieser Gleichungen:

$$a_1^{m_1}.a_2^{m_2} \ldots = 1,\quad b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots = 1 \text{ etc.}$$

für alle h Gleichungen was ja eben unmöglich ist. Folglich bilden $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$ ... ein System von unabhängigen Einheiten.

Ich meine, daß eine solche Umkehr der Aufeinanderfolge Ihrer Schlüsse vor gewissen Mißdeutungen hüten würde. Man ist nämlich durch die Worte pag. 106: »Sollen nun z. B. drei Auflösungen...« und resp. durch die folgende Stelle: »Berücksichtigt man, . . .« veranlaßt zu glauben

1, daß für ein System unabhängiger Einheiten keine einzige der obigen h Gleichungen stattfinden könne — während es doch nur unmöglich ist, daß alle stattfinden,

2, könnte man denken, daß die Gleichung $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots = 1$ die Gleichung $b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots = 1$ etc. zur Folge hat, während doch nur aus der Existenz der Gleichung

$$\Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \ldots = 1$$

die aller übrigen folgt. Die Gleichung $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots = 1$, d. h.

$$\Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_1(\alpha')^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \Phi_2(\alpha')^{m_2} \ldots = 1,$$

läßt keinerlei Folgerungen über den Bestand derselben zu, wenn α in β verwandelt wird.

Ich erwähne nur noch der Fälle, wo in der That für ein System unabhängiger Einheiten $\Phi_1(\alpha), \ldots . \Phi_{h-1}(\alpha)$ eine oder mehre der Gleichungen

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots = 1, \quad b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots = 1, \ldots .$$

(aber natürlich nicht alle) befriedigt werden. Wenn nämlich z. B. eine Einheit $\Psi(\alpha)$ existirt, deren analytischer Modul $= 1$ ist, und welche doch nicht Wurzel der Einheit ist (und es ist leicht zu zeigen daß dieß möglich ist), so muß nach Ihrem Fundamentalsatze

$$\omega \Psi(\alpha) = \Phi_1(\alpha)^{m_1} \Phi_2(\alpha)^{m_2} \ldots \Phi_{h-1}(\alpha)^{m_{h-1}}$$

sein, wenn $\Phi_1(\alpha), \ldots .$ die Fundamentaleinheiten und ω eine Wurzel der Einheit bedeutet. Verwandelt man hierin $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$, so wird

$$\omega^{-1} . \Psi(\alpha') = \Phi_1(\alpha')^{m_1} . \Phi_2(\alpha')^{m_2} \ldots \Phi_{h-1}(\alpha')^{m_{h-1}}$$

und durch Multiplication, wenn man berücksichtigt, daß $\Psi(\alpha)\Psi(\alpha') = 1$ ist:

$$1 = a_1^{m_1} . a_2^{m_2} \ldots . a_{h-1}^{m_{h-1}},$$

wo die m's von 0 verschieden sind. Es gäbe noch mancherlei hierbei zu erwähnen, doch lohnt es nicht der Schreiberei, und ich verlasse deshalb diesen Gegenstand, um Sie nur noch zu fragen, ob Sie die Bemerkung für interessant halten, daß man cyklometrische Auflösungen der Gleichung $x^2 + Dy^2 = 4p$ finden kann, wenn $p \equiv 1 \pmod{D}$ ist. Es ist dieß leicht als Verallgemeinerung der Jacobischen Ψ's zu sehen, woraus dort nur die Auflösung von $x^2 + 3y^2 = 4p$ und $x^2 + 7y^2 = 4p$

sich ergiebt. Es ist mir diese ganze Bemerkung nur abgefallen von allgemeineren Betrachtungen, die sich aber im Uebrigen noch nicht hinreichend fruchtbringend gezeigt haben.

Nimmt man der größeren Einfachheit wegen $D = \lambda$ einer Primzahl von der Form $4n+3$, so ist, wenn $\alpha^\lambda = 1$, $x^r = 1$ und $p = k\lambda + 1$, nach Jacobi's Bezeichnung

$$(\alpha, x) = x + \alpha x^r + \alpha^2 x^{r^2} + \ldots,$$

und das Product $\Pi(\alpha^\varepsilon, x)$, welches sich auf alle quadratischen Reste α von λ bezieht, ist wie leicht zu sehen von der Form $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\sqrt{-\lambda}$ wo u und v ganze Zahlen sind. Es ist nun

$$\frac{u+v\sqrt{-\lambda}}{u-v\sqrt{-\lambda}} = \left(\frac{U+V\sqrt{-\lambda}}{U-V\sqrt{-\lambda}}\right)^{\frac{\Sigma b - \Sigma a}{\lambda}}$$

wenn U u. V die Zahlen der Auflösung von $U^2 + \lambda V^2 = 4p$ bedeuten. Man sieht hieraus, daß man für ein gegebenes p und λ eine Gleichung vom Grade $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{\lambda}$ aufstellen kann, welche (wenn $U^2 + \lambda V^2 = 4p$ in ganzen Zahlen auflösbar ist) eine einzige rationale Wurzel hat, aus welcher die Werthe von U und V unmittelbar hervorgehen. —

Ich habe mich — zu meinem Schrecken sehe ich es — schon wieder allzusehr ausgebreitet und bitte Sie deßhalb um Entschuldigung. Ich bitte Sie ferner mich und meine Frau Ihrer Frau Gemahlin angelegentlichst zu empfehlen und bitte Sie endlich mir Ihr so sehr schätzbares Wohlwollen stets zu bewahren.

Mit innigster Anhänglichkeit und Verehrung
Ihr
dankbarer Schüler
Koesen, den 26. Juni 1856. Leopold Kronecker.

IV. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor!

Ich habe so eben an Herrn Dr. Dedekind ein Paar Zeilen geschrieben, und da treibt mich meine alte Anhänglichkeit auch Ihnen einige Worte zu schicken selbst auf die Gefahr hin, daß Ihr Interesse für mich inzwischen einigermaßen erkaltet sein sollte. Zumal habe ich nicht recht Aussicht Sie bald einmal persönlich wiederzusehen *), denn

*) Dirichlet hatte im December 1856 Berlin besucht.

Sie reisen stets nach Westen, und ich kann aus vielfachen Gründen nicht nach Göttingen kommen. — Mit meinen mathematischen Arbeiten ist es mir im vergangenen Winter sonderbar gegangen, nämlich sowohl in meinen algebraischen Ausarbeitungen als in den weiteren Untersuchungen über die Affecte der Gleichungen bin ich immerfort von scheinbar wenig damit zusammenhängenden Dingen unterbrochen worden, ohne daß ich grade Grund hätte mit diesen Unterbrechungen unzufrieden zu sein. Denn ich habe so manche sehr interessante Sachen gefunden, und da ich mich zumeist dadurch so unabhängig fühle, daß mich keine Spur irgend welchen Ehrgeizes quält, da ich vielmehr einzig und allein meine Freude in der Erkenntniß des Wahren habe, so kommt es mir wenig darauf an, wozu ich grade meine Zeit verwende, wenn ich sie nur überhaupt gut benutze. — Die beiden Hauptepisoden meiner Arbeiten betrafen die complexe Multiplication der elliptischen Functionen und die Theorie der allgemeinsten idealen Zahlen. In Bezug auf das erste Thema habe ich Ihnen meine ersten Resultate schon im December hier mitgetheilt. Ich habe in den ersten drei Monaten dieses Jahres noch viele ähnliche Resultate gefunden, Alles streng bewiesen und überhaupt die betreffende Untersuchung eigentlich abgeschlossen. Das dabei durchforschte kleine mathematische Gebiet war mir in vieler Beziehung äußerst interessant. Die Eleganz der Resultate und die Einfachheit der Beweismethoden, der Zusammenhang der Analysis und Zahlentheorie, die weiteren Aussichten, die die Sachen gewähren — alles das vereinigte sich, um meinen Eifer in der Untersuchung anzuspornen und nachher zu belohnen. Ich werde kurz die wesentlichsten Resultate anführen: 1, die Moduln k für welche Multiplication mit $a+b\sqrt{-D}$ stattfindet sind Wurzeln einer auflösbaren Gleichung Hten Grades, deren Coëfficienten complexe Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-D}$ sind, wo H die Anzahl der quadratischen Formen für die Determinante $-D$ bedeutet. 2, die Gleichung hat den Charakter der von Abel behandelten Gleichungen, daß sämmtliche Wurzeln rationale Functionen einer einzigen sind, und daß, wenn: k, $\vartheta(k)$, $\vartheta_1(k)$ solche Wurzeln bedeuten, $\vartheta\vartheta_1(k) = \vartheta_1\vartheta(k)$ ist. Die Anzahl der hierbei nach Abel entstehenden Cykeln oder Perioden ist gleich dem Irregularitäts-Exponenten von Gauss für $-D$. Ist jene Anzahl $= 1$ also jene Gleichung eine (wie ich es nenne) »Abelsche« so ist die Determinante regulär. Es ist mir nicht aussichtslos, daß ich noch werde bestimmen können, ob jene Gleichung eine Abelsche ist oder nicht und damit also, ob die Determinante regulär oder irregulär ist. Wenigstens kann ich schon jetzt den Charakter einer solchen Bestimmung angeben, und der ist merkwürdig genug. 3, Aus

den H Moduln k lassen sich die Coëfficienten eines Systems nicht äquivalenter quadratischer Formen der Determinante $-D$ in transcendenter Form angeben. 4, Gewisse rationale Functionen der irrationalen Größen k lassen sich als ideale Zahlen betrachten, welche die quadratischen Formen ersetzen. Diese idealen Zahlen erschließen manche Eigenthümlichkeit der Zahlentheorie und Algebra, und ich erwähne in dieser Beziehung nur, daß sie bei Aufstellung der Abelschen Gleichungen mit complexen Coëfficienten mit Nothwendigkeit erscheinen. Ihre Analogie mit den wirklichen Zahlen $a + b\sqrt{-D}$ geht ferner daraus hervor, daß sie dieselben bei der Multiplication der elliptischen Functionen gradezu ersetzen. 5, Der erwähnten Untersuchung gebührt jedenfalls das Verdienst auf den für die Berechnung und überhaupt einfachsten Ausdruck der Formenanzahl für die Determinante $-D$ aufmerksam gemacht zu haben. Aus jener Untersuchung resultiren nämlich eine Menge recurrirender Formeln der allereinfachsten Art für die zu den Determinanten: $-D$, $-D+1^2$, $-D+2^2$, $-D+3^2$ . . . gehörigen Formenanzahlen. Viele dieser Formeln lassen sich ganz simpel aus dem Zusammenhang der Formenanzahl mit der Anzahl der Darstellungen als Summe von 3 Quadraten ableiten und, was schöner ist, jene Theorie giebt einen Beweis dieses Zusammenhanges. Aber ein andrer Theil jener Formeln scheint mir arithmetisch schwer beweisbar. Ich habe trotz mancher daran gewendeten Mühe keine Ahnung davon, wie es möglich sein wird. Ich theile Ihnen zur Probe eine dieser Formeln hier mit: Sei $F(m)$ die Anzahl der Formen für die Determinante $-m$, so ist:
$F(n) + 2F(n-1) + 2F(n-4) + 2F(n-9) + 2F(n-16) + \ldots = \Phi(n)$,
wo $\Phi(n)$ die Summe derjenigen Divisoren von n bedeutet welche größer als $\sqrt{n}$ sind, und wo $n \equiv 3 \bmod 4$ ist. 6, Wenn n Primzahl, so ist $\Phi(n) = n$, und da findet eine merkwürdige Eigenschaft der Formen statt, die ich noch nicht bewiesen und auf sehr eigenthümlichen Inductionswegen gefunden habe, eine Eigenschaft, welche zeigt daß die Determinanten n, $n-1$, $n-4$ . . . in vieler Beziehung zusammen zu betrachten sind. Denkt man sich nämlich alle reducirten Formen für alle diese Determinanten: $-(n-r^2)$ und für alle diese Formen (a, b, c) die Zahlen, welchen der Ausdruck $\frac{b \pm \sqrt{-n+r^2}}{a}$ oder besser: $\frac{b \pm r}{a}$ modulo n congruent ist, so erhält man grade alle Zahlen 0, 1, 2 . . . $(n-1)$. Ist das nicht schön? 7, Wenn D als Summe 3er Quadrate darstellbar ist, so erhält man auf die einfachste Art die Formenanzahl ausgedrückt durch die Anzahl der Darstellungen als Summe von 2 Quadraten von: $D-1$, $D-4$, $D-9$...;

da diese Anzahlen nur von den Primfactoren abhängen, so ergiebt dieß eine Weise zur Berechnung der Formenanzahl die — mit Hülfe einer Factorentafel — im Wesentlichen nur auf »Ablesen« hinaus kommt. 8, Diejenigen Moduln k, für welche die Modulargleichungen gleiche Wurzeln haben sind von der oben bezeichneten Art. Es charakterisirt dieß die von mir betrachteten elliptischen Functionen als gewissermaßen Grenzwerthe der allgemeinen und zwar als solche, die einen Schritt näher liegen als die äußerste Grenze d. h. die Kreisfunctionen. Während es für diese nur Multiplication giebt, findet für meine besonderen ellipt. F. zwar auch Transformation statt, aber dieselbe ist hier selbst eine Art von Multiplication; die Multiplication wird durch die forma principalis, die Transformationen werden durch die andern Formen repräsentirt. Haec hactenus. Augenblicklich stecke ich tief in Untersuchungen über allgemeine complexe Zahlen von der Form, wie Sie die Einheiten betrachtet haben. Ich habe die Begriffe der idealen Zahlen, die Reduction der Formen etc. festgestellt und durch diese allgemeinsten Betrachtungen eine sehr bemerkenswerthe Einfachheit erzielt. Und es ist keine hohle Allgemeinheit; denn ich bin sehr schönen Resultaten auf der Spur und weiß ziemlich genau, wie weit ich kommen werde. Das Schönste daran ist, daß man den Begriff der derivirten Formen für alle diese zerlegbaren Formen allgemein aufstellen und, wie ich glaube, auch das Verhältniß der Formenanzahl für primitive und derivirte allgemein bestimmen kann. Für eine große Classe (wozu die quadratischen Formen, die Kreistheilungsformen gehören) ist es mir bereits gelungen. Auch geben meine Untersuchungen eine Einsicht in Ihr Resultat über die Formenanzahl für eine reelle Determinante in der complexen Zahlentheorie. Doch genug! Raum, Zeit und wohl auch Ihre Geduld sind zu Ende, und deßhalb bitte ich nur noch ein Bischen Wohlwollen zu bewahren

Ihrem Ihnen aufrichtig ergebenen

Berlin, 17. Mai 57. Leopold Kronecker.

Köthner Str. 12.

V. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Herrn Dr. Kronecker

in Berlin

Köthener Str. Nr. 12.

Da Sie, verehrter Freund, aus Erfahrung wissen, wie tief bei mir die üble Gewohnheit eingewurzelt ist, die Briefe selbst meiner liebsten Freunde sehr spät zu beantworten, so werden Sie sich kaum

wundern, wenn die durch BORCHARDT u. EHLERT hierher überbrachte Nachricht, daß Sie von BERLIN abwesend seyen, meinen festen Entschluß, Ihnen während der Pfingstferien zu schreiben, nicht zur Ausführung hat kommen lassen. Da Sie aber, wie ich von DEDEKIND erfahre, wieder zurück sind u. BERLIN bald wieder verlassen wollen, so kann ich nicht länger zögern, Ihnen meinen innigsten Dank für Ihren so interessanten Brief abzustatten. Für die überaus große Freude, welche mir die Mittheilung Ihrer schönen Entdeckungen verursacht hat, finde ich keinen passenderen Ausdruck als Ihnen aus vollster Ueberzeugung *macte virtute* zuzurufen. Zugleich kann ich Ihnen nicht verhehlen, daß sich dieser Freude etwas Egoismus beimischt, da ich mir bei aller Bescheidenheit das Zeugniß nicht versagen kann, daß ich Sie zuerst in die unteren Regionen einer der Wissenschaften eingeführt habe, auf deren Höhen Sie jetzt als Meister einherschreiten. Ich rede absichtlich nur von einer dieser Wissenschaften, denn an Ihrer algebraischen Größe muß ich mich völlig unschuldig erklären.

Mein Interesse an den merkwürdigen Beziehungen, die Sie zwischen den quadratischen Formen, der Algebra u. den elliptischen Funktionen aufgefunden haben, ist um so lebhafter, als ich selbst zuweilen ähnlichen Beziehungen nachgespürt habe. Ein hierauf bezüglicher Gesichtspunkt ist in meiner Abh. R. s. d. a. § 7 angedeutet, doch wird das am bezeichneten Orte Gesagte, wie ich später bemerkt, sehr durch die dort vorausgesetzte Bedingung verdunkelt, daß bei den doppelten Summationen nach x u. y, das Trinom $ax^2+2bxy+cy^2$ relative Primzahl zu D seyn muß. Ich habe den Gegenstand von dem durch Beseitigung der erwähnten Bedingung sehr vereinfachten Gesichtspunkt aus eine gute Strecke weiter verfolgt, glaube jedoch, wenn ich anders Ihre leider sehr kurzen Mittheilungen richtig deute, daß die von mir gemachten Bemerkungen kaum etwas mit Ihren schönen Resultaten gemein haben, welche wesentlich auf der Partikularisirung des Moduls zu beruhen scheinen, während meine Betrachtung die Unbestimmtheit von k und des davon abhängigen q voraussetzt. Um so begieriger bin ich, das Fundament und den eigentlichen Ausgangspunkt Ihrer Untersuchungen kennen zu lernen, auf deren baldige Publikation ich rechnen zu dürfen glaube, da Sie selbst Ihre Arbeit als im Wesentlichen abgeschlossen betrachten und als eine von mäßigem Umfange bezeichnen.

Was mich betrifft, so bin ich jetzt mit der Ausarbeitung der hydrodynamischen Abhandlung beschäftigt, von deren Gegenstand zu Weihnachten flüchtig zwischen uns die Rede war. Das Hauptresultat läßt sich ungefähr so formuliren.

»Hat eine incompressible homogene flüssige Masse deren Theile sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen und die an ihrer Oberfläche einen constanten oder nur von der Zeit abhängigen Druck erleidet, anfänglich die Gestalt eines Ellipsoides, ist ferner die anfängliche Bewegung so beschaffen, daß sie in zwei einfachere zerlegbar ist, eine Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit für alle Massenelemente, u. eine zweite Bewegung, bei welcher alle Massenelemente sich in Bezug auf drei bestimmte sich im Mittelpunkte rechtwinklig durchschneidende Ebenen so bewegen, daß ihre Geschwindigkeiten senkrecht gegen jede dieser Ebenen zerlegt, den Abständen von denselben proportional sind, so wird die Oberfläche zu einer beliebigen Zeit die Form eines Ellipsoides haben, welches mit dem ursprünglichen concentrisch ist, dessen Axen aber in Größe und Richtung mit der Zeit veränderlich sind. Hinsichtlich der Bewegung der einzelnen Elemente gilt dasselbe, was für den ersten Augenblick vorausgesetzt wurde, d. h. die augenblickliche Bewegung ist zu jeder Zeit aus zwei einfachen, wie sie oben definirt wurden, zusammengesetzt, so jedoch daß die Drehungsaxe u. die drei Ebenen welche diesen Bewegungen entsprechen, im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich sind.

Wie leicht zu sehen, involvirt der vorausgesetzte ursprüngliche Bewegungszustand 8 willkührliche Größen u. es ist merkwürdig, daß sich für einen solchen Anfangszustand der allgemeine Charakter der eintretenden Bewegung angeben läßt. Ich sage »der allgemeine Charakter der Bewegung« denn zur vollständigen Kenntniß derselben sind 9 Funktionen der Zeit zu bestimmen, welche durch eben so viele Gl. definirt werden, eine endliche u. 8 Differt. gl. 2ter Ordnung, für welche man allgemein 7 Integrale erster Ordnung angeben kann. Die vollständige Lösung läßt sich nur in speciellen Fällen durchführen, von denen einer der einfachsten der ist, wenn das Ellipsoid zwei gleiche Axen hat u. die Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit beginnt.

Aus meinen Gl. ergiebt sich die Lösung eines Problems, welches einiges Interesse darzubieten scheint, wenn gleich das Resultat ein rein negatives ist. Die bekannten von Maclaurin und Jacobi gefundenen Resultate führen naturgemäß auf die Frage, in welchen Fällen ein flüssiges homogenes Ellipsoid, dessen Elemente sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, wie ein fester Körper um seinen Schwerpunkt rotiren kann u. die Antwort lautet, daß dies nur möglich ist, wenn die Bewegung um eine feste, mit einer der Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfallende Axe geschieht, was der von Maclaurin und Jacobi untersuchte Fall ist.

Wenn ich mich nun noch meines mir von meiner Frau gegebenen Auftrages entledige, so ist das Papier und also auch dieser lange Brief zu Ende. Der Auftrag ist der, Sie zu bitten, daß Sie meine Frau gefälligst bei Ihrer Frau entschuldigen wollen, daß sie sie (schöner Stil) vorigen Winter nicht hat besuchen können. EHLERT kann bezeugen, wie sehr meine Frau während ihres kurzen Aufenthaltes gehetzt gewesen ist u. nur den kleinsten Theil der von ihr beabsichtigten Besuche hat machen können.

Vale et mihi fave

GÖTTINGEN 4. Juli 1857. DIRICHLET.

VI. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Ich beeile mich, verehrter Freund, Ihnen für Ihren freundlichen Brief*) zu danken und zugleich den früheren vom Mai Ihrem Wunsche gemäß zu überschicken. Es versteht sich von selbst daß Sie mir den letzteren, der mein Eigenthum ist, später wieder zustellen müssen, doch hat es damit keine Eile, da mir eine von DEDEKIND genommene Abschrift jeden Augenblick zu Gebote steht. Von Ihrem freundlichen Versprechen, mich zu besuchen, nehme ich, wie die Juristen sagen, Akt, hoffe jedoch Sie vielleicht noch früher in BERLIN zu sehen. Ihres Auftrages wegen RIEMANN, dessen jetzigen Aufenthalt ich nicht sicher kenne — er war längere Zeit in HARZBURG — entledige ich mich dadurch, daß ich heute an DEDEKIND schreibe, um durch diesen Ihr Gesuch an RIEMANN gelangen zu lassen.

Empfehlen Sie mich u. meine Frau Ihrer Frau Gemahlin bestens und grüßen Sie unsere Freunde EHLERT, KUMMER, WEIERSTRASS und BORCHARDT, falls er zurück ist, ergebenst von

Ihrem treu ergebenen

GÖTTINGEN 4. Okt. 57. DIRICHLET.

VII. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Hochgeehrter Herr Professor,

Zuvörderst meinen herzlichsten Dank für die ungemein prompte Erfüllung meiner neulichen Bitte! — Inzwischen bin ich von einem sehr schweren Verluste betroffen worden — meine Mutter ist im 59sten Jahre ihres Lebens, wenn auch an einer chronischen Krankheit,

*) Dieser Brief von Herrn KRONECKER hat sich in DIRICHLET's Nachlaß nicht vorgefunden.

doch so plötzlich gestorben, daß als ich vor sechs Wochen auf die erste Nachricht hin nach Liegnitz eilte, ich sie schon nicht mehr lebend antraf. Ich verweilte damals noch einige Wochen bei meinem armen Vater, und ich war selbst geistig und körperlich von dem Schlage sehr mitgenommen. Nachher kamen mancherlei leichtere Krankheiten in meiner kleinen Familie hier — Sie können Sich also denken, daß meine Arbeiten nur sehr langsam von Statten gingen, und ich muß Sie um Nachsicht bitten.

Die kleine Notiz, die ich über meine »Ellipt. Functions-Arbeiten« redigirt habe, erlaube ich mir Ihnen anbei zu überreichen und noch drei Exemplare zur ganz gelegentlichen Abgabe an die Herren Riemann, Dedekind und Stern beizufügen. Zur Entschuldigung hätte ich dabei mehr zu sagen als der Text selbst Raum einnimmt; doch werde ich die ausführliche Ausarbeitung so bald folgen lassen, daß diese selbst Alles erklären soll. Einige kleine Nachlässigkeiten meines Briefes vom 17. Mai, welcher anbei zurückfolgt, finden sich in der gedruckten Notiz verbessert. Nur zwei Punkte sind es, über die ich im Frühjahr eine wirklich irrige Meinung hatte. I. Ich hatte damals einen Beweis für die Irreductibilität der Gleichungen gemacht, von denen die Modulwerthe abhängen — und dieser Beweis ist falsch. Ich bin zwar immer noch überzeugt, daß jene Gleichungen irreductibel sind, aber da ich es noch nicht beweisen kann, mußte ich einstweilen den darauf gegründeten Schluß auf den Irregularitätsexponenten aufgeben. Dieser Schluß würde — so lange jene Irreductibilität noch nicht feststeht — nur in einer alternativen Form gemacht werden können, die weder schön noch einfach genug ist, um in die beiliegende Notiz mit aufgenommen zu werden. — II. Ich hatte ferner im Frühjahr die irrige Meinung mit dem qu. Gebiete mathematischer Untersuchung gewissermaaßen fertig zu sein, während sich mir jetzt noch eine Fülle neuen und reichen Materials bietet. Indessen werde ich dieses Mal gegen meine Gewohnheit und Neigung doch an die Veröffentlichung gehen, e h e ich die Sache g a n z durchgearbeitet habe; ich werde in zwei Theilen meiner Arbeit die Auflösbarkeit jener Gleichungen und die Anwendung derselben auf die Theorie der quadratischen Formen negativer Determinante geben, die weiteren Anwendungen aber namentlich auf die Composition der Formen wahrscheinlich noch verschieben. — Ich hoffe Sie werden diese Genügsamkeit Ihres armen Schülers billigen — denn ich sehe endlich ein, daß ich meinem Ideal nicht mehr nachstreben kann und darf, nämlich auch nur e i n e — wenn auch in niedrigeren Regionen sich bewegende — doch so in sich vollendete Arbeit zu liefern, wie die Ihrigen Alle sind. Es ist einmal mein Kreuz, daß ich immer auf Gebiete geführt

werde, die bessere geistige Kräfte erfordern, als mir von der Natur verliehen sind, und die mehr Zeit in Anspruch nehmen als die ist, auf welche ich bei meinem doch eigentlich sehr unzuverlässigen Körper zu rechnen habe. — Bei meiner Ausarbeitung will ich nichts aus der Theorie der quadr. Formen voraussetzen, um deutlich zu zeigen, daß sich die ellipt. Functionen das Alles selbst machen. Doch, ehe ich das auch für die »Composition« mache, muß ich Sie, den Meister aller dieser Gebiete, durchaus selbst sprechen. Hoffentlich kommen Sie in den Weihnachtsferien hierher; wenn nicht — so komme ich später nach Göttingen. Von Kummer, der mit seinem Reciprocitätsgesetzbeweise sehr schön vorgeschritten ist, soll ich Ihnen die herzlichsten Grüße ausrichten. Ihrer Frau Gemahlin, die hoffentlich glücklich dort angekommen ist, bitte ich mich selbst und meine Frau, die ihre Grippe immer noch nicht ganz verwunden hat, bestens zu empfehlen. Sie selbst endlich, geehrter Herr Professor, ersuche ich Ihr für mich über Alles schätzbares Wohlwollen auch fernerhin zu bewahren

Ihrem Ihnen treu und dankbar ergebenen

Berlin 2. Decbr. 57. Leopold Kronecker.

Grüßen Sie Riemann und Dedekind gefälligst herzlichst von mir

D. O.

VIII. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Herrn Dr. Kronecker
(aus Berlin) z. Z.
in
frei Ilsenburg.

Göttingen 23. Juli 58.

Da Sie, verehrter Freund, neulich auf dem Bahnhofe zu Harzburg *) den Wunsch äußerten, den Ausgangspunkt meiner Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen von negativer Determinante und den elliptischen Funktionen kennen zu lernen, so will ich Ihnen meine Grundformel für den speciellen Fall, wo die Determinante eine negativ genommene Primzahl p von der Form $4n+3$ ist, mit zwei Worten mittheilen und so gut es ohne mich in lange Erörterungen, zu denen mir die Muße fehlt, einzulassen, geschehen kann. Eine Andeutung dieses Zusammenhanges habe ich schon im zweiten Theile meiner Abhandlung R. s. d. a. etc. gegeben,

*) Dirichlet war im Juli bei Herrn Kronecker, welcher den Sommer in Ilsenburg zubrachte, einige Tage zum Besuch. Auf Dirichlet's Rückreise nach Göttingen begleitete ihn Herr Kronecker zu Wagen von Ilsenburg nach Harzburg.

aber die Sache ist dort durch den Umstand complicirt, daß die Zahlen bei der Darstellung ausgeschlossen werden, welche mit der Determinante einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Hebt man diese Voraussetzung auf, so stellt sich die Formel für den erwähnten besonderen Fall und unter Anwendung der Jacobi'schen Zeichen wie folgt:

$$\frac{k}{\sqrt{p}}\frac{K}{\pi}\sum\left(\frac{s}{p}\right)\sin\operatorname{am} s\frac{4K}{\pi} = \sum q^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} + \text{etc.}$$

Die Summe auf der ersten Seite erstreckt sich von $s = 1$ bis $s = p-1$, u. die Doppelsummen auf der zweiten beziehen sich auf alle Systeme x, y, für welche die jedesmalige quadratische Form (a, b, c) (der ersten Art oder proprie primitiva) ungerade wird. Die eben ausgesprochene Bedingung ließe sich übrigens leicht entfernen, wenn man auch die Formen der zweiten Art zuziehen wollte. Jede Doppelsumme läßt sich nun, wie schon am angeführten Orte bemerkt, in eine endliche Anzahl von Produkten von je zwei einfachen Summen der Form

$$\sum_{x=-\infty}^{x=\infty} q^{(\delta x+\varepsilon)}$$

zerlegen, wo δ u. ε rationale Zahlen sind. Jede solche einfache Summe aber läßt sich, wie aus den von Jacobi gegebenen Eigenschaften von Θ leicht folgt, aber so viel ich weiß, bisher nirgends bemerkt worden ist, in die Form

$$\sqrt{\frac{K}{a}}\,\varphi(k)$$

bringen, wo $\varphi(k)$ eine algebraische Funktion des zu q gehörigen Moduls k ist. Da nun andrerseits jeder der auf der ersten Seite vorkommenden sin am ebenfalls eine algebraische Funktion von k ist, so drückt die Gleich. eine Relation aus zwischen algebraischen Funktionen des flüssig bleibenden k. Man kann daher sagen, daß die ganze Theorie der Formen von negativer Determinante und der durch sie darstellbaren Zahlen auf Beziehungen zwischen den Wurzeln algebraischer Gleichungen zurückkommt u. sich aus diesen Beziehungen muß ableiten lassen, was ein um so bemerkenswertheres rapprochement ist, als sich bis jetzt bei Formen von positiver Determinante keine Spur eines ähnlichen Zusammenhanges findet.

Seit unserm neulichen Gespräch auf der Fahrt von Ilsenburg nach Harzburg ist es mir gelungen, die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]$, wo [ ] nach Gauss das größte Ganze bezeichnet und die ich bisher nur mit einem Fehler der Ordnung $\sqrt{n}$ angeben konnte, bedeutend in die

Enge zu treiben. Die Auffindung des hiezu dienenden Mittels, welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar seyn wird, macht mir zwar großes Vergnügen, kommt mir aber in sofern zu ungelegener Zeit als ich dadurch von der Vollendung der hydrodynamischen Abhandlung abgezogen werde, welche doch endlich fertig werden muß.

Mit der Bitte mich Ihrer Frau Gemahlin und den andern Ilsenburger Damen so wie H. Dr. Benzler bestens zu empfehlen.

Mit Borchardt wird es besser gehen, da er meine Frau in Charlottenburg zu besuchen die Absicht hatte.

Ihr treu ergebener
Dirichlet.

IX. *Dirichlet an Herrn Kronecker.*

Göttingen 31./7. 58.

Seit ich Ihnen, verehrter Freund, gestern vor acht Tagen geschrieben habe, habe ich von meiner Frau einen Brief aus Preussen erhalten, aus welchem hervorzugehen scheint, daß sie Borchardt welcher sie in Charlottenburg zu besuchen die Absicht geäußert hatte, nicht gesehen hat. Ich muß daher fürchten, daß sich der Zustand unsres Freundes neuerdings verschlimmert hat, und bitte Sie deshalb mir mit zwei Worten zu sagen, was Sie aus Berlin über ihn erfahren haben. Ein gestern von Heine eingelaufener Brief erwähnt mit keiner Silbe, daß Sie ihn in den Harz citirt hätten; es wird nun wohl ganz unterbleiben, da Ihre Abreise nach Helgoland nach dem was Sie mir neulich sagten, vor der Thür seyn muß.

Mit meinen besten Empfehlungen für Ihre Frau Gemahlin

Ihr ergebenster
Dirichlet.

X. *Herr Kronecker an Dirichlet.*

Ilsenburg Sonntag 1. August 58.

Hochgeehrter Herr Professor. Ich empfange so eben ihr gestriges Schreiben und beeile mich Ihnen über unsern Freund Borchardt Nachricht zu geben, mit dem ich heut vor acht Tagen in Braunschweig zusammen war. Wie das gekommen, ohne daß ich die mit Ihnen getroffene Verabredung erfüllen konnte, darüber muß ich Ihnen mit ein paar Worten Aufschluß geben. Das ziemlich andauernd schöne Wetter am Montag nach Ihrer Abreise von hier trieb mich nämlich zur Ausführung meines Planes einen mehrtägigen Ausflug nach dem Brocken und dem Unterharz zu unternehmen. Durch Wetter- und andere Störungen verlängerte sich meine Abwesenheit von hier bis Sonnabend vor acht Tagen. Ich hatte inzwischen nicht an Borchardt noch an Heine geschrieben, da ich nach der früheren Kummerschen

Mittheilung über Borchardt's Befinden dessen Abreise als noch weit hinausgeschoben betrachtete. Zu meinem Erstaunen fand ich nun aber bei meiner Rückkunft hierher am Sonnabend Borchardt's Nachricht vor, daß er Sonntag Mittag in Braunschweig eintreffen würde. Es war nun rein unmöglich Ihnen noch rechtzeitig davon Mittheilung zu machen, zumal ich wußte daß Sie Montag wieder Vorlesungen halten und also selbst ein längeres Warten Borchardt's in Braunschweig nichts genützt haben würde. Ich reiste also Sonntag allein hinüber und war mit Borchardt von 1 bis 8 Uhr zusammen. Er hat es natürlich sehr bedauert, um Ihren — vielleicht auch um Heine's Besuch — durch Umstände gekommen zu sein, deren Abwendung zum Theil vielleicht in meiner Gewalt war. Indessen, geehrter Herr Professor, Sie haben jetzt alle Data, um selbst das Verdict über mich auszusprechen. Soviel über meine etwaigen Entschuldigungsgründe; was Borchardt anlangt, so fand ich ihn freilich sehr schwach und angegriffen, indessen hoffe ich doch daß er die Reise nach der Insel Wight, die er in kurzen Tagereisen und in Begleitung eines gewandten Dieners machte, glücklich vollendet haben wird. Er denkt auf der Insel Wight auch seine Cousine Hellborn, jetzt verheirathete Sussmann, mit ihrem Manne zu treffen, so daß er also sich dort um so weniger verlassen fühlen wird. Borchardt hatte, wie ich vor einigen Tagen von Berlin hörte, vor einigen Wochen erst wieder einen kleinen Anfall gehabt, und seitdem datirt sich die eigentliche Besserung, während bis dahin die Krankheit mehr schleichend verlaufen war aber auch gar nicht recht weichen wollte. — Borchardt gedenkt an 5 Wochen in England zu verweilen und, wenn es ihm alsdann gut geht, noch auf einige Zeit nach Sorrent zu gehen. Freilich liegen die beiden Seeküsten etwas weit auseinander — aber Dampfwagen und Dampfschiffe laufen ja schnell. Borchardt's Adresse von der Insel Wight werde ich erst in Helgoland erfahren, wohin ich übermorgen mit meinem Sohne Ernst abzureisen gedenke, und wohin mir vielleicht (einem gestrigen Berliner Briefe nach zu schließen) Weierstrass und Kummer folgen werden.

Nach allen diesen Personalien komme ich nun dazu Ihnen für Ihren freundlichen Brief vom 23sten Juli aufs Herzlichste zu danken und Ihnen zu sagen, wie sehr ich mich durch diese prompte Mittheilung geschmeichelt fühle und noch mehr, wie ungemein mich der Inhalt jenes Schreibens interessirt hat; daß Sie in der Bestimmung von $\sum\left[\frac{n}{s}\right]$ so vorgeschritten sind, ist doch eigentlich so prächtig, daß keinerlei Rücksicht Ihre Freude daran beeinträchtigen darf. Auch wird Sie gewiß kein Bedenken von der weiteren Verfolgung der bezüglichen

Untersuchungen abhalten, denn die Macht des Reizes derselben ist zu groß. Endlich aber wird es Ihrem umfassenden Geiste gewiß nicht schwer die Ausarbeitung fertiger Untersuchungen selbst bei Arbeiten auf ganz andern Gebieten nebenher gehen zu lassen. Das ist eben der Vorzug unsrer großen Männer, daß sie nicht nur die Fülle der Gedanken haben, sondern daß diese ihnen auch kein Hinderniß ist für deren Ausbeutung. — Ihre schönen Mittheilungen über die ellipt. Functionen werde ich mir gleich nach meiner Rückkunft nach Berlin ordentlich zu Nutze machen. Ich werde mir die von Ihnen angedeutete Umformung von $\sum q^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}$ in Producte von je zwei einfachen Summen $\sum q^{(\delta x+\varepsilon)^2}$ zu verschaffen und namentlich die rationalen Zahlen δ und ε zu bestimmen suchen. Diese hängen direct wahrscheinlich von den Coëfficienten der Formen ab, wenigstens so daß — während die linke Seite Ihrer Hauptgleichung offenbar algebraische von der Modulargleichung $p$ter Ordnung abhängige Functionen enthält — auf der rechten Seite algebraische Functionen vorkommen werden, welche aus Modulargleichungen andrer Ordnungen entstehen. Solche Beziehungen sind mir aber algebraisch vom höchsten Interesse — man kennt zwar schon dergleichen, aber die aus Ihrer Gleichung resultirenden sind sicher ganz verschieden von den bereits bekannten. Auch die zahlentheoretischen Folgerungen aus Ihrer Gleichung müssen ganz verschieden sein von denjenigen, die ich aus der Theorie der ellipt. Functionen gezogen habe. Aber ich glaube, daß Ihre Gleichung auch dann noch interessante Ergebnisse liefern wird, wenn man darin dem Modul k einen derjenigen speciellen Zahlenwerthe giebt, die ich besonders untersucht habe. Alle meine dießfällsigen Ideen und Absichten sind natürlich noch sehr unbestimmt — denn Ilsenburg ist kein gutes Klima für mathematische Studien — aber von Berlin aus hoffe ich Ihnen den Dank für Ihre schätzbaren Mittheilungen zu bethätigen. Meine liebe Frau läßt sich Ihnen angelegentlichst empfehlen, und ich selbst bitte Sie mir Ihre überaus werthe Freundschaft zu bewahren.

Ihr treu ergebener
Kronecker.

Beste Grüße Ihrem Sohn Ernst und meine besten Empfehlungen Ihrer Frau Mutter, so wie den Herren Weber, Listing und Riemann. Ich bitte Sie noch von meinen Ihnen mitgetheilten Ideen über die Algebra der Zukunft, namentlich über die Benutzung der Jacobischen linearen Gleichungen für $\sqrt{M}$ nichts Anderen mitzutheilen. Ich möchte erst selbst sehen, ob meine Speculationen Erfolg haben. D. O.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juni 1885.

(Fortsetzung.)

Lund's Universitets-Biblioteks Accessions-Katalog. 1884. Lund 1885.
Materialien zur Mineralogie Russlands von Nikolai v. Kokscharow. 9. Band. S. 81—272. Petersburg 1885.
Publication des Königl. Preuss. Geodätischen Instituts. Berlin 1885.
1. Astronomisch-Geodätische Arbeiten in den Jahren 1883 u. 1884.
2. Das Mittelwasser der Ostsee bei Travemünde mit 9 Tafeln. Bearb. v. Prof. Dr. W. Seibt.

The Scottish Geographical Magazine. Edinburgh. Vol. 1. January—March 1885. No. 1—3.
Johns Hopkins University Studies. Third Series IV Recent American Socialism by Richard F. Ely. Ph. D. April 1885.
Johns Hopkins University Studies, in Historical and Political science. Third Series V. VI. VII. Local Institutions of Mariland by Lewis W. Wilhelm Ph.D. Baltimore. May, June, Juli 1885.
Jahrbuch der Kaiserl. Königl. Geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1885. XXXV. Band. Mit Tafeln 1—5. Wien. Ausgeg. 15. Mai 1885. Nebst den Nachrichten d. Kais. Königl. Geologischen Reichsanstalt. No. 1—7.
Schriften der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Fünfundzwanzigster Jahrg. 1884. Erste und zweite Abtheilung.
Contributions to Meteorology by Elias Loomis L. L. D. New Haven. Conn. 1885.
Memoires de la Societé des sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux. 3. Serie. Tome I. Paris. Bordeaux. 1884.
Nature. N. 817. Vol. 32. June 25. 1885. London.
Die Chroniken der Stadt Eger bearb. v. Heinr. Gradt. Im Auftr. des Ver. für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Prag 1884.
Mittheilungen des Vereines für Geschichte der Deutschen in Böhmen. XXIII. Jahrgang. No. 1—4. Prag 1884.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkundie. Utgeven door' het koninklijk Institut van Nederlandsch-Indie. IV. Volgreeks. Deel X. 3te Stuke. S'Gravenhage 1885.
Bulletin de la Societé Mathematique de France publ. par les Secretaires. Tome XIII. N. 4. Paris 1885.

Juli 1885.

Berichte der Verhandl. der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch. in Leipzig.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. XIII. 2. 3. 4.
Berichte der math.-phys. Classe. 1884. 1885, I. II.
— der hist.-philolog. Classe. 1884. 1885, I. II.

Nature 818. Vol. 32. 2. Juli.
819. Vol. 32. 9. Juli.
820. Vol. 32. 16. Juli.
821. Vol. 32. 23. Juli.

Academie des sciences et lettres de Montpellier. Memoires de la Section de Medecine. Tome V. III. fasc. 1880—1881.
Journal de l'ecole Polytechnique. 54 cahier. Paris 1884.
Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. 20. Jahrg. 1. u. 2. Heft.
Proceedings of the scientific Meetings of the Zoological Society of London. 1885. Pars I. January and Febr.
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 10. Band mit Generalregister über Band I—X.

Revue Internationale de l'electricité. I année. Juin 1885. Paris.
Bulletin de la Societé Impériale des Naturalistes de Moscou. Année 1884. No. 3.
Journal de sciencias Mathematicas e Astronomicas, Vol. VI. No. 2. Coimbra.
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Marzo 1884—Marzo 1885.
Zeitschrift für Naturwissenschaften im Auftr. des naturwissensch. Vereins für Sachsen und Thüringen. LVIII B. Vierte Folge. 4. Band. 2. Heft.
Anemometrische Scalen für Dorpat von K. Weirauch, Prof. in Dorpat.
Atti della R. Accademia delle science di Torino. Vol. XX. Disp. 6a. Aprile 1885.
Neues Lausitzisches Magazin. 61. Band. 1. Heft. Görlitz 1885.
Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. 6. Band. 2. Heft.
Jahrbuch der Kaiserl. Königl. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1885. XXXV. Band. Wien. 2. u. 3. Heft.
Annales du Musee Guimet. Revue de l'histoire des Religions. 5. année. Tome X. No. 2. Sept.—Oct. Paris. No. 3. Nov.—Decembre.
Publication der Norweg. Commission der Europ. Gradmessung. Geodätische Arbeiten. Heft IV. Udgivet af den norske Gradmaalingscommission. III Hefte.
Observationer ved Oscarsborg 1880—1881. Stavanger 1883, Bergen 1883, Kabelvaag 1883, Vardo 1883.
Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Jahrg. 1883. Neue Folge. XX. Band.
Preussische Staatsschriften aus der Regierungszeit Friedrich II., herausgeg. v. J. G. Droysen und M. Duncker. II. Band.
Gammelaegyptisk Religion of J. Lieblein. Tredie Del.
The canadian record of science. Vol. I. No. 2.
Ungarische Revue mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissensch. VII. VIII. IX. X. Heft. Juli, Okt., Nov., Dez. 1884.
Proceedings of the London Mathematical Society. Nos 240—242.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXII. Roma. 1884—85. Serie quarta. Vol. I. Fasc. 13. 14. 15.
Osservazioni Meteorologiche fatte al R. osservatorio del Campidoglio. Dal Luglio al Dicembre 1884.
Atti della Società Toscana di science naturali. Processi Verbali. Vol. IV.
Brief Description of the Anthracite coal fields of Pennsylvania by Charles A. Ashburner.
The publications of the second Geological Survey of Pennsylvania.
Recent publications of the second Geological Survey of Pennsylvania by Ch. A. Aschburner.
Leopoldina. Heft XXI. Nr. 11—12. Juni 1885.
Acta Mathematica von G. Mittag-Leffler. Berlin. Stockholm. Paris. 6, 1. 6, 4.
American Journal of Mathematics publ. under the auspices of the John Hopkins University. Baltimore. Vol. VII. N. 4.
Zeitschrift der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie. XX. Band. Juni-Heft 1885.
13. 14. und 15. Jahresbericht des naturwissenschaftl. Vereins zu Magdeburg. 1882. 1883. 1884.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. 32. Heft. Mai 1885.
24. und 25. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde vom 4. Mai 1882 bis 11. Mai 1884. Zugleich Festbericht der am 11. Mai 1884 begangenen 25jährigen Stiftungsfeier.
Bullettino di bibliografia e di Storia delle science mathematiche e fisiche. Tomo XV e Tomo XVII. (Für die Gauss' Bibliothek.)
Astronomische Mittheilungen von Dr. Rudolf Wolf.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. December. **№ 12.** 1885.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS LIBRARY.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December, dem Stiftungstage der Gesellschaft.

Schering, zur Erinnerung an Generallieutenant J. J. Baeyer.

Ehlers, Nebendarm und Chorda dorsalis.

Schwarz legt eine Abhandlung des Herrn Professor Dr. von Mangoldt in Hannover vor: Ueber ein Verfahren zur Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte, nebst einer Ausdehnung dieses Verfahrens auf allgemeinere Functionen.

de Lagarde spricht über die arabische Evangelienharmonie des Vatikans (Erscheint in den Abhandlungen).

Sauppe legt eine Abhandlung des Herrn Professor Dr. Morf in Bern vor: Ueber drei bergellische Volkslieder.

Jahresbericht des beständigen Secretärs.

Ueber Preisaufgaben und Personalveränderungen wurde wie folgt berichtet.

Die Aufgabe der mathematischen Klasse, die für dieses Jahr gestellt war, lautete:

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften verlangt, daß die von Eisenstein angefangene Untersuchung über den Zusammenhang der quadratischen Zerfällung der Primzahlen mit gewissen Congruenzen für die Fälle, in welchen die von Cauchy und Jacobi angewandten Principien nicht mehr ausreichen (s. Crelle, Journ. f. d. Mathematik. Bd. 37. S. 97 ff.), fortgesetzt und soweit möglich zu Ende geführt werde.

Es sind dafür zwei Abhandlungen rechtzeitig eingegangen, die eine mit dem Erkennungswort Schema versehen, die andere mit dem Motto: Gar selten thun wir uns selbst genug. Goethe.

Das Urtheil der mathematischen Klasse darüber ist folgendes:

Der Verfasser der Abhandlung mit dem Erkennungswort Schema geht von den Serretschen algebraischen Untersuchungen aus, benutzt auch die von Bachmann angewendete Eliminationsmethode der in den gesuchten Größen der quadratischen Formen auftretenden gemeinsamen Factoren und stellt mehrere solche Eigenschaften der verallgemeinerten Eisensteinschen Summen auf, welche für die »quadratische Zerfällung« von Primzahlen und von Primzahlpotenzen in Betracht kommen. Der hierdurch gewonnene Fortschritt in diesem Gebiete erledigt die von Eisenstein begonnene Untersuchung noch nicht, auch bildet er eine Förderung der Wissenschaft nicht von einem solchen Umfange, daß die K. G. d. W. dafür den Preis zuerkennen kann, wenngleich sie bereitwillig annimmt, daß dem Verfasser die Zeit gefehlt habe, um die Untersuchungen zu erweitern und die Darstellung in einer mehr angemessenen Form auszuführen.

Die andere Abhandlung führt den Titel: »Zur Theorie der Eisensteinschen Summen. Ein Beitrag zur Lösung der von K. G. d. W. zu G. für das Jahr 1885 gestellten mathematischen Preisfrage«.

Mit Benutzung der umfangreichen Untersuchungen von Kummer und Kronecker über die complexen Zahlen höherer Ordnungen zerlegt der Verfasser die verallgemeinerten Eisensteinschen Summen in ihre idealen Primfactoren und fügt zu deren genauerer Bestimmung noch neue Congruenzbedingungen hinzu. Die K. G. d. W. bedauert mit dem Verfasser lebhaft, daß demselben nach jener Arbeit keine Zeit mehr zur unmittelbaren Bestimmung der Darstellung von Primzahlen und von Primzahlpotenzen durch quadratische Hauptformen übrig blieb, und daß die K. G. d. W. sich deshalb nicht in der Lage befindet dieser Abhandlung den Preis zuerkennen zu können.

Nach diesem Urtheil ihrer mathematischen Klasse vermag also die K. G. d. W. keiner der beiden Abhandlungen einen Preis zu ertheilen [1]).

Die noch zu bearbeitenden Aufgaben sind:

1) für das Jahr 1886 von der historisch-philologischen Klasse:

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften wünscht eine möglichst vollständige Uebersicht und kritische Erörterung der Versuche, die Nationalitäten Europas sei es durch wirkliche Volkszählungen nach der Sprache, sei es durch anderweitige Schätzungen numerisch festzustellen, an welche sich ein eigener Versuch, die Bevölkerung Europas etwa im Stande von 1880—81 nach den Nationalitäten zu gliedern, anzuschließen hätte.

1) Wenn die Verfasser sie zurückzuerhalten wünschen, werden sie ersucht eine Adresse anzugeben.

Die Aufgabe zerfällt hiernach in drei Haupttheile.

Die Volkszählungen sind auf ihre verschiedenen Methoden hin zu untersuchen und speciell sind die Differenzen im Effect für jene Länder zu erörtern, wo die Methoden von einer Volkszählung zur andern gewechselt haben (wie z. B. in der Schweiz). Es frägt sich, ob gerade bei dieser Kategorie sich für bestimmte Nationalitäten ein verschiedener Zählungsmodus empfiehlt.

Was die Abschätzungen betrifft, so wird besonderer Werth auf eine möglichst erschöpfende Untersuchung nach dem eigentlichen Ursprung jeder einzelnen gelegt. Es genügt hier selbstverständlich nicht eine genaue Nachweisung der literarischen Quellen, sondern die als werthvoll erkannten Schätzungen sind auf ihre eigenen Methoden hin gleichfalls kritisch zu erörtern.

Bei der oben bezeichneten Schlußaufgabe wird man sich selbstverständlich in manchen Fällen mit ziemlich rohen Annäherungen an die Wahrheit begnügen müssen. Aber für jene Landstriche, in denen früher genauere Feststellungen stattgefunden haben, gilt es auf alle in Frage kommenden Momente, welche im Laufe der Zeit eine Verschiebung des procentualischen Verhältnisses haben hervorrufen können, im Detail einzugehen um somit der Controle alle Hülfsmittel darzubieten.

2) für das Jahr 1887 von der physikalischen Klasse:

Es wird gewünscht eine eingehende, insbesondere auch chemische Untersuchung 1) des stickstofffreien Reservestoffs, welcher in den Samen der gelben und blauen Lupine (muthmaßlich auch anderer Lupinen-Arten) die Stelle des für gewöhnlich in den Samen der Leguminosen enthaltenen Stärkemehls vertritt, sowie 2) der Umwandlung dieses Reservestoffs bei der Keimung.

3) als neue Aufgabe für das Jahr 1888 wiederholt die mathematische Klasse, mit Rücksicht auf das Urtheil über die zwei diesmal eingesandten Abhandlungen, die für das Jahr 1885 gestellte:

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften verlangt, daß die von Eisenstein angefangene Untersuchung über den Zusammenhang der quadratischen Zerfällung der Primzahlen mit gewissen Congruenzen für die Fälle, in welchen die von Cauchy und Jacobi angewandten Principien nicht mehr ausreichen (s. Crelle, Journ. f. d. Mathematik. Bd. 37. S. 97 ff.), fortgesetzt und soweit möglich zu Ende geführt werde.

Die Concurrenzarbeiten müssen, mit einem Motto versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden, begleitet von

einem versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des Verfassers enthält und auswendig mit dem Motto der Schrift versehen ist.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt mindestens fünfzig Dukaten (500 Mark).

* * *

Die Preisaufgaben der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte für den Verwaltungszeitraum vom 14. März 1876 bis zum 13. März 1886 waren zuletzt in den Nachrichten der K. G. d. W. 1884 S. 312 abgedruckt, leider sind aber bis zu dem festgesetzten Termin, dem 14. März d. J., keine Bewerbungsschriften eingegangen. Neue Aufgaben werden statutengemäß nächstes Frühjahr gestellt werden.

Durch ein Curatorial-Rescript vom 20. April wurde wegen der Erkrankung des Geh. Ob.-Med.-Raths Henle die Führung der Geschäfte des beständigen Secretärs bis auf Weiteres Herrn Dr. Ehlers übertragen, als aber Henle gestorben war, durch ein Minist.-Rescript des K. Kultusministeriums vom 20. Juni Sauppe zum beständigen Secretär ernannt.

Das Directorium der Gesellschaft ist am 1. Oktober d. J. von Herrn Geh. Hofrath Wilhelm Weber auf Herrn Professor Ferdinand Wüstenfeld übergegangen.

Die Gesellschaft verlor im Laufe dieses Jahres

1) aus der Zahl ihrer Ehrenmitglieder
   Herrn Johann Jakob Baeyer in Berlin, der den 11. September starb, 91 Jahre alt.
2) aus der Zahl der ordentlichen Mitglieder, und zwar der physikalischen Klasse
   ihren hochverdienten Secretär, Herrn Jacob Henle, gestorben am 13. Mai, im 76. Jahre.
   Aus derselben Klasse schied Herr J. Reinke zu Ostern aus, wegen seines Uebergangs an die Universität Kiel.
   Ausserdem starb am 24. März der Assessor der mathematischen Klasse A. Enneper im 55. Lebensjahr.
3) Von den auswärtigen Mitgliedern, und zwar der physikalischen Klasse, starben
   Henry Milne-Edwards in Paris, den 29. Juli, 85 Jahre alt.
   Carl Theodor von Siebold in München, den 7. April, 81 Jahre alt.

4) von den Correspondenten starben
   a) aus der historisch-philologischen Klasse
      Georg Curtius in Leipzig, den 12. August, im 65. Jahre.
      Ludwig Lange in Leipzig, den 16. August, im 60. Jahre.
   b) aus der physikalischen Klasse
      Wilhelm Duncker in Marburg, den 13. März, im 77. Jahre.
      Edmond Boissier in Valleyres (Schweiz), den 25. September, im 76. Jahre.
   c) aus der mathematischen Klasse
      Thomas Clausen in Dorpat.
      Philipp Gustav Jolly in München, den 24. December 1884, im 76. Jahre.

Herr Professor Reinke ging mit seinem Abgang nach Kiel aus der Reihe der ordentlichen in die der auswärtigen Mitglieder der physikalischen Klasse über.

In der Sitzung am 1. August wurde unter die ordentlichen Mitglieder der physikalischen Klasse

Herr Victor Meyer

aufgenommen.

In der Sitzung am 28. November wählte die Gesellschaft

1) zum ordentlichen Mitglied in der physikalischen Klasse
   Herrn Friedrich Merkel;
2) zu auswärtigen Mitgliedern in derselben Klasse die Herrn
   Dr. Karl Ludwig in Leipzig, vorher Correspondent seit 1861;
   Dr. Anton de Bary in Straßburg i. E., vorher Correspondent seit 1872;
3) zu Correspondenten
   a) in der historisch-philologischen Klasse
      Herrn J. F. Fleet in Bombay.
      Herrn Friedrich Hultsch in Dreden.
      Herrn Johannes Vahlen in Berlin.
   b) in der physikalischen Klasse
      Herrn Edouard Bornet in Paris.
      Herrn Dr. William Crawford Williamson in Manchester,
      Herrn Dr. Wilhelm Pfeffer in Tübingen.
      Herrn Dr. James Hall in Albany (New York).

Nebendarm und Chorda dorsalis

von

E. Ehlers.

Bei der speculativen Betrachtung des Problems von dem Ursprung des Wirbelthierkörpers oder der Formverwandtschaft der Wirbelthiere mit den Wirbellosen schlechthin ist der Bestand der Chorda dorsalis von größter Bedeutung gewesen; und so sehr die Berücksichtigung derselben für die Aufstellung und Abgrenzung der Gruppe der »Chordonier« oder »Chordata« ins Gewicht fiel, ebenso hinderlich war es für eine Feststellung verwandtschaftlicher Beziehungen zwischen den oben genannten Thierkreisen, daß ein Organ, welches der Chorda dorsalis der Vertebraten zu homologisiren wäre, bei den übrigen Metazoen nicht mit einiger Sicherheit aufzuweisen war.

In dieser Beziehung eine vielleicht fördernde Anregung zu geben, ist der Zweck der folgenden Zeilen. Seit mehreren Jahren habe ich gelegentlich in Vorlesungen wie im Verkehr mit befreundeten Fachmännern darauf hingewiesen, daß ein Homologon der Chorda dorsalis in dem als »Nebendarm« bezeichneten, bei Echinodermen und verschiedenen Würmern vorkommenden Gebilde zu suchen sein dürfte. Wenn ich jetzt diese Anschauungen der Kritik weiterer Kreise unterbreite, so leitet mich dabei einerseits die gemachte Erfahrung, daß gerade in jenen Kreisen, aus welchen so erfolgreiche Untersuchungen über die Entwicklung der Vertebraten-Chorda gekommen sind, die bisher in jeder Hinsicht unverständliche Bildung eines Nebendarmes bei einzelnen wirbellosen Thieren unbekannt oder unbeachtet geblieben war; andererseits die Ueberzeugung, daß eine Zusammenstellung der Chorda dorsalis mit einem röhrenförmigen Entodermgebilde die Aufmerksamkeit auf gewisse Bildungen während der Entwicklung der Chorda mehr als bisher lenken, und diese in einem anderen Lichte als jetzt erscheinen lassen müsse. — Weiter aber wird, falls die von mir zu erörternde Homologie Beifall finden sollte, für die zoologische Auffassung die Beziehung der Wirbelthiere oder auch der Chordonier zu einzelnen Gruppen der Metazoen, welche jetzt ganz oder mit Bedenken in den Kreis der »Würmer« gezogen werden, schärfer heraustreten; die phylogenetische Ableitung der Wirbelthiere von Würmern eine erhebliche Stütze erhalten.

Das Organ, für welches Ludwig[1]) in der bei Echinodermen vorkommenden Form den Namen »Nebendarm« vorschlug, findet sich

1) H. Ludwig. Ueber den Nebendarm der Echinoideen. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1877. Göttingen 1877, pg. 688.

bei der Annelidenfamilie der Capitelliden, bei den Gephyreen Echiurus, Hamingia und Bonellia und bei den Echinodermengeschlechtern der Echiniden und Spatangiden in einer im Allgemeinen übereinstimmenden Gestaltung, jedoch mit gewissen Abweichungen und in einzelnen Fällen begleitet von besonderen Bildungen, die für unseren Zweck von Bedeutung sind, daß ich neben der Gemeinsamkeit die abweichenden Gestaltungen der einzelnen Fälle zu erwähnen habe.

Das Gemeinsame aber besteht darin, daß ein dem Darme an Mächtigkeit weit nachstehendes Rohr mit dessen entodermalem Abschnitt, neben welchem es auf einer mehr oder minder langen Strecke verläuft, solcher Gestalt verbunden ist, daß es mit seinen beiden Enden in den Darm einmündet; und daß dieses Rohr von einer epithelialen Zellschicht ausgekleidet ist, die, wie sie in die Epithelschicht des Darmes an beiden Communicationsöffnungen übergeht, mit dem Epithel des Darmrohres so weit übereinstimmt, daß nichts entgegensteht, die eine Epithelschicht aus der anderen, oder beide aus einem gemeinsamen ontogenetischen Ursprung abzuleiten. Auf die Außenfläche dieses für unsere Betrachtungen wichtigen Epithelialrohres des Nebendarmes legt sich eine ungleich ausgestaltete, die Dicke der Wandung bedingende Gewebsmasse, die hier ausser Betracht bleiben kann. — Es ist ferner die als typisch zu bezeichnende Lage des Nebendarmes diejenige, daß derselbe dem ventralen Umfange des Darmes anliegt, oder jener Fläche, welche bei den Würmern, wie sie den centralen Theilen des Rumpfnervensystemes zugewendet ist, als die neurale bezeichnet wird.

Das einfachste Verhalten zeigt der Nebendarm von Capitelliden, den wir durch Eisig's[1]) Untersuchungen genauer kennen; der Nebendarm liegt hier der ventralen Medianlinie des Darmes entweder enge an oder ist durch einen mehr oder minder weiten Abstand von dieser entfernt; er ist ein Rohr, dessen Epithelauskleidung mit derjenigen des Darmes im Allgemeinen übereinstimmt; seine vordere Mündung liegt im Bereiche der Uebergangstelle des Oesophagus in den Magendarm, seine hintere, nicht ganz sicher gestellte Einmündung liegt entweder in der Nähe des Schwanzendes (Notomastus, Dasybranchus) oder in der Körpermitte (Capitella). Auf dieses Verhalten, wie auf die Erscheinung, daß der Nebendarm am hinteren oder vorderen Ende sich zuspitzt, wird weiter zu achten sein.

In höherer Ausgestaltung erscheint der Nebendarm bei Echiurus[2]),

1) H. Eisig. Der Nebendarm der Capitelliden und seine Homologa. Zoologischer Anzeiger. Jhrg. I. 1878, pg. 148.

2) Ueber den Nebendarm von Bonellia sind wir ganz unzureichend unterrichtet; Eisig (a. a. O) bezeichnet auf die Autorität Spengel's hin die von

besonders dadurch, daß derselbe hier mit einer der inneren Oberfläche des Darmes angehörenden Flimmerrinne in Verbindung tritt. Diese Flimmerrinne erscheint nach der Darstellung, welche Spengel[1]) von der Organisation des Echiurus gegeben hat, in der ventralen Mittellinie des Darmes und zwar in solcher Ausdehnung an den zahlreichen Windungen desselben, daß sie von dem Zwischendarme ab, welcher auf den »Kropf« folgt, bis kurz vor den After verläuft, begleitet von einem Längsmuskelbande. Aus dieser Wimperrinne nun geht der kürzere Nebendarm hervor, so daß sein Lumen vorn hinter dem Zwischendarme, hinten vor dem Enddarme in die Wimperrinne einmündet; das Längsmuskelband, welches die Wimperrinne begleitet, ist in dieser Ausdehnung auf den Nebendarm übergegangen, der mithin zwischen Wimperrinne und Muskelband eingeschlossen ist, und danach wohl die Vorstellung gestattet, als sei der Nebendarm durch eine Abschnürung aus einer Strecke der Wimperrinne hervorgegangen. Uebertragen wir eine solche Vorstellung auf die Verhältnisse bei den Capitelliden, so ergiebt das einen Anhalt für das Verständnis der ungleich weit reichenden Erstreckung des Nebendarmes der Capitelliden gegen das Afterende hin.

Es lenkt aber auch die Aufmerksamkeit auf eine homologe Bildung bei einer Anzahl Sipunculiden. Seit langem ist vom Darme des Sipunculus eine Flimmerrinne bekannt, welche hinter dem Vorderdarme beginnt und am Enddarme endigt; und zwar läuft hier die Flimmerrinne, was zuerst von Théel[2]) für Phascolion Strombi ange-

Lacaze Duthiers (Annales des sciences naturelles. Zoolog. Sér. IV. T. X. pg. 70) am Mitteldarm als bandelette beschriebene Bildung als einen Nebendarm. Es ist von Interesse zu erfahren, wie sich diese Bildung zu dem Nebendarm von Echiurus verhält. — Ganz ähnlich wie bei Echiurus verhält sich offenbar der Nebendarm von Hamingia glacialis (cfr. R. Horst, Die Gephyrea . , . des »Willem Barents« Niederl. Archiv für Zoologie. Supplem. Bd. I. 1881). — Dagegen ist nicht klar, was die Flimmerrinne bedeutet, welcher vom Darm einer aus dem Mittelmeer stammenden Echiurus-Larve durch Hatschek (Ueber die Entwicklungsgeschichte von Echiurus. Arbeiten aus dem zoolog. Institut der Universität Wien. T. III pg. 21. 24.) und Salensky (Morphologisches Jahrbuch. Bd. II, p. 319) beschrieben ist. Das Organ scheint frühzeitig zu verkümmern. Es bleibt aber noch festzustellen, zu welcher Echiurus Art die beschriebene Larve gehört, und ob diese Flimmerrinne derjenigen entspricht, welche am erwachsenen Echiurus Pallasii sich findet. Vielleicht handelt es sich bei der Larve um eine Art, welche im erwachsenen Zustande weder Flimmerrinne noch Nebendarm besitzt. Bei der Variabilität, welche diesen Organen offenbar zukommt, ist eine solche Vermuthung nicht ganz unwahrscheinlich.

1) Spengel. Beiträge zur Kenntnis der Gephyreen. Zeitschrift für wiss. Zoolog. Bd. 34. pg. 493. f.

2) Hjalmar Théel. Recherches sur le Phascolion Strombi. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bandet 14. No. 2. Stockholm 1875, pg. 18.

geben wurde, in das bald mehr bald minder groß entwickelte Divertikel aus, welches dem Enddarme anhängt. An dieses Divertikel aber heftet sich, so viel ich sehe, nicht immer aber doch in einer Anzahl von Fällen unzweifelhaft jener Muskelfaden, welcher durch die Windungen der Darmschlingen hindurchzieht. So liegt es nun nahe, wie die Flimmerrinne des Sipunculus derjenigen des Echiurus so auch das Divertikel dem Nebendarme zu parallelisiren, der hier auf der niedersten Stufe seiner Bildung, aber im Anschluß an die Wimperrinne steht. Die Auffassung ist jedoch nicht einwurfsfrei; denn die Wimperrinne liegt am Darme des Sipunculus, was ich nach eigenen Untersuchungen, zur Ergänzung der vorhandenen Beschreibungen, anzuführen habe, am dorsalwärts gewendeten Umfange des Darmrohres, und zwar, da hier die Betrachtung der Darmschlingen von keinen Belang ist, an der vorderen und hinteren Strecke desselben. Allein dieser Einwurf ist durch eine Mittheilung zu entkräften, welche Hatschek[1]) gemacht hat: in der Larve trägt der Mitteldarm zu der Zeit, wo derselbe nur eine einfache Schlinge bildet, auf der inneren Fläche an der ventralen Seite eine mit äußerst kräftigen und stark sich bewegenden Wimpern versehene Linie. Ist das, woran ich nicht zweifle, die Wimperrinne in ihrer frühen Entwicklung, so zeigt uns dieselbe hier die vorhin vermißte Lagerung; der Uebergang derselben in eine dorsale Stellung erklärt sich, wenn man die starke Torsion in Betracht zieht, welche der auswachsende Darm erfährt, sobald er in die eigenthümlich gedrehte Lagerung seiner Schlingen gebracht wird. — Ich will in Kürze erwähnen, daß Flimmerrinne, Divertikel und Muskelfaden bei den verschiedenen Sipunculiden-Arten in sehr ungleicher Weise auftreten oder fehlen; ein näheres Eingehen auf die Einzelheiten dieses Verhaltens ist hier nicht erforderlich.

Unter den Echinodermen ist die Anwesenheit eines Nebendarmes bei Spatangiden und Echiniden seit delle Chiaje's ersten Angaben mehrfach erwähnt[2]). Für meine Zwecke genügt es auf den Inhalt der Mittheilungen zurückzugreifen, welche C. K. Hoffmann[3]) über den Nebendarm bei Spatangen gemacht hat. Der Nebendarm verläuft auch hier neben einer großen Strecke des Darmrohres, indem seine vordere Mündung in dasselbe auf der Grenze zwischen »Magen« und »Dünndarm«, seine hintere am Uebergang der zweiten Darm-

1) B. Hatschek. Ueber Entwicklung von Sipunculus nudus. Arbeiten aus dem zoolog. Institute der Universität Wien. T. V. 1883, pg. 39.

2) cfr. H. Ludwig a. a. O.

3) C. K. Hoffmann. Zur Anatomie der Echinen und Spatangen. Haarlem und Leipzig 1871. (Niederländ. Archiv für Zoologie. Bd. I. 1871.) pg. 37. f.

windung in die dritte liegt. Nur mit der hinteren Strecke liegt der Nebendarm dem Darme eng an, weiter nach vorn weicht er von ihm ab, und macht dadurch einen Theil der Windung des Darmes nicht mit, sondern erreicht gleichsam auf kürzerem Wege die Stelle der vorderen Einmündung. Hoffmann läßt die hintere Strecke des Nebendarms an der unteren Fläche der großen ventralen Mesenterialplatte gelagert sein, und es scheint danach, daß wir auch hier von einer »neuralen« Lagerung des Nebendarmes reden dürfen. Ein interessantes Verhalten bietet hier die Form des Nebendarms, in sofern als dessen hintere Strecke einen kreisförmigen Querschnitt besitzt, während die vordere Strecke keilförmig oder prismatisch gestaltet ist, und nun solchergestalt aus der vorderen Darmstrecke hervorgeht, daß sie an eine Rinne anschließt, welche auf der Innenfläche des Darmrohres verläuft; allerdings nicht in der Längsrichtung, wie das als das typische bei der Flimmerrinne im Darm der Gephyreen erscheint; aber die quere Stellung, welche diese Rinne hier besitzt, steht offenbar mit dem Umstande in Zusammenhang, daß die aus dieser Rinne hervorgehende Anfangstrecke des Nebendarmes vom Darmrohre abgelenkt erscheint; und ein dabei stattfindender Zug mag die Stellung der Rinne auf der inneren Darmfläche beeinflußt haben, wenn es sich nicht, was noch zu erweisen wäre, um eine Neubildung handelt. Daß in auffallender Weise die Ränder dieser Rinne eine Bildung besitzen, wie die mit kammartigen Zähnen begrenzte Flimmerrinne der Echiuride Hamingia, sei nebenbei bemerkt.

Eine Zusammenstellung der hier erwähnten Thatsachen zeigt, daß der Nebendarm bei Wirbellosen vorkommt, deren nähere Verwandtschaft zu einander sonst nicht ohne Weiteres zu erkennen ist; daß sein Auftreten mit dem einer auf der ventralen inneren Darmrohrfläche verlaufenden Wimperrinne derartig zusammenfällt, daß an einen genetischen Zusammenhang beider Organe zu denken ist; daß schließlich der Nebendarm selbst bei nah verwandten Thieren mit oder ohne Flimmerrinne in so ungleicher Ausbildung auftritt, daß die Annahme gerechtfertigt erscheint, der Nebendarm gehöre in den Kreis jener Organe, welche als in Rückbildung begriffen aufzufassen sind, woran dann die weitere Speculation anknüpfen wird, daß der jetzige Zustand des Organes auf Verhältnisse zurückweise, in welchen dasselbe in bedeutsamerer Function in Thieren vorhanden gewesen ist, welche zu den oben besprochenen Metazoen in gleiche verwandtschaftliche Beziehungen zu bringen wären. Die Annahme von Parallelentwicklung ist allerdings dabei ebensowenig abzuweisen wie zu beweisen.

Zwischen diesem Nebendarm und der Chorda dorsalis der Verte-

braten ist meiner Meinung nach eine Homologie, deren Wesen noch dahin gestellt sein mag, zu erweisen.

Vorausgesetzt ist dabei die Prämisse, daß die ventrale Fläche des Körpers der erwähnten Wirbellosen der dorsalen Fläche des Wirbelthierkörpers gleichwerthig gesetzt, beide als die gleichwerthigen neuralen Flächen des Körpers bezeichnet werden dürfen, eine Auffassung, welche ja schon seit Langem die berufensten Vertreter gefunden hat und die hier deshalb außer Discussion bleiben soll. Selbstverständlich ist es ferner, daß nicht die Chorda dorsalis in ihrem ausgebildeten Zustande oder auf den Stufen ihres Niederganges den Gegenstand für die Vergleichung mit dem Nebendarme abgiebt sondern daß nur die Verhältnisse und Formen, welche im Laufe ihrer Entwicklung sich einstellen, die Anhaltspunkte für diese Vergleichung abgeben. Aber wenn ich demnach auf das ausgebildete Organ zunächst nicht weiter Rücksicht nehme, so möchte ich einen Punkt hervorgehoben haben, den man, wie ich meine mit Unrecht, dem erfolgreichen Vergleich entgegenhalten könnte. Daß ist nicht sowohl der Umstand, daß die ausgebildete Chorda keinen Zusammenhang mit dem Darm besitzt, als vielmehr der, daß zwischen Chorda und Darm ein longitudinaler Gefäßstamm im Wirbelthierkörper eingeschoben erscheint. Wird aber in dem Fehlen eines Verbandes der ausgewachsenen Chorda mit dem Darme kein Widerspruch für einen Vergleich derselben mit dem Nebendarme gefunden, so erscheint das Auftreten eines Gefäßstammes für diese morphologischen Vergleiche ganz bedeutungslos, da das Gefäßsystem bei Thieren mit peritonealen Körperhöhlen offenbar durch die Entwicklung dieser und die Vertheilung der mesodermatischen Massen, in welchen die Gefäßbildung stattfindet, in ungleichster Weise vertheilt wird, seine Lagerungsverhältnisse daher meist nur secundäre Bedeutung haben.

Für die Homologie der Chorda dorsalis mit dem Nebendarm ist der Nachweis erforderlich, daß das Gewebe der Chorda zu dem Epithel des Darmes gleiche Beziehungen habe, wie das Epithel des Nebendarmes zu dem des Darmes, oder daß die zu vergleichenden Theile entodermatischen, resp. hypoblastischen Ursprunges seien; daß ferner die Chorda zu irgend einer Zeit die Form eines Rohres oder einer Rinne habe, oder daß sie einer solchen gleichzuachten sei, und daß endlich die sogestaltete Chorda mit dem Darme verbunden sei wie der Nebendarm mit dem Darm.

Wir sind mithin auf die Entwicklung der Chorda verwiesen; da es nun nicht in meiner Absicht liegt die zahlreichen Angaben über die Entwicklung der Chorda sämmtlich hier vorzutragen, so beschränke ich mich im Wesentlichen auf die hauptsächlichsten Angaben, welche

über die Bildung der Chorda gemacht sind nach der zusammenfassenden Arbeit, welche C. K. Hoffmann[1]) darüber geliefert hat. Der hypoblastische Ursprung der Chorda wurde schon damals von einer Mehrzahl von Forschern behauptet, vielleicht in Folge des Anstoßes, welchen die bekannten Untersuchungen Kowalewsky's über die Entwicklung des Amphioxus gegeben hatten. Das Resultat, zu welchem Hoffmann über die Genesis der Chorda beim Vogel gekommen war, daß dieselbe anfänglich aus dem Entoderm hervorgehe, weiterhin aber ein Product des Mesodermes sei, dürfte einer anderen Auslegung der Beobachtungen gegenüber wohl kaum auf die Dauer haltbar sein; denn es ist zur Zeit unseren allgemeinen Anschauungen wenig entsprechend, daß ein in seiner Structur so gleichmäßiges Organ wie die Chorda aus zwei ungleichen Keimblättern hervorgehen sollte. — Für einen theilweisen Ursprung der Chorda im Mesoderme hat sich für die Eidechse noch einmal Strahl[2]) ausgesprochen; ferner nimmt Kölliker[3]) für die Säuger den mesodermatischen Ursprung der Chorda an, und ihm tritt, wenn auch bedingungsweise, Lieberkühn[4]) bei. Diese Auffassung, welche der Lehre vom hypoblastischen Ursprung der Chorda entgegentritt, scheint aber vielleicht nur dadurch zu dieser Lehre im Widerspruch zu stehen, als die Meinungen über das, was man als mesodermatische Entwicklung zu bezeichnen habe, aus einander gehen. Das weiter zu erörtern ist hier nicht der Platz.

Dagegen sind seit dem gedachten Zeitpunkte zu den früher vorhandenen neue Zeugen für den hypoblastischen Ursprung der Chorda aufgetreten: für den Amphioxus, Kowalewsky's Angaben bestätigend und erweiternd Hatschek[5]), für Selachier (Pristiurus) Hoffmann[6]), für Knochenfische Kingsley und Conn[7]), für die urodelen

1) C. K. Hoffmann. Ueber die Entwicklungsgeschichte der Chorda dorsalis. Beiträge zur Anatomie und Embryologie als Festgabe Jacob Henle zum 4. April 1882 dargebracht von seinen Schülern. Bonn 1882, pg. 41.

2) H. Strahl. Ueber Wachsthumsvorgänge an Embryonen von Lacerta agilis. Frankfurt a. M. 1884. 4°. (S. A. aus den Abhandlungen der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft.)

3) Kölliker. Ueber die Chordahöhle und die Bildung der Chorda beim Kaninchen. (Sitzgsber. der würzburg. phys. med. Gesellsch., Sitzg. vom 16. Dec. 1882).

4) Lieberkühn. Ueber die Chorda der Säugethiere. Archiv für Anatomie und Physiologie. Jhrg. 1884. Anatom. Abtheilung, pg. 436.

5) B. Hatschek. Studien über die Entwicklung des Amphioxus. Arbeiten aus dem zoolog. Institute der Universität Wien. T. V. 1882. pg. 1.

6) C. K. Hoffmann. Sur l'origine du feuillet blastodermique moyen chez les poissons cartilagineux. Archives néerlandaises. T. XVIII.

7) Kingsley and Conn. Some observations on the embryology of the Teleosts. Memoirs of the Boston Society of natural hist. Vol. III. No. VI. Boston 1883.

Amphibien (Siredon) Lampert[1]), für die Vögel C. K. Hoffmann[2]), für Säuger Selenka[3]), Heape[4]) und Bonnet[5]).

Für die in Rede stehende Vergleichung hat diese allgemeinste Thatsache, daß die Chorda aus dem Hypoblaste entspringt und daß sie sofort in ihre characteristische Lage einrückt, nur untergeordneten Werth, muß aber als eine Grundlage für das Weitere festzuhalten sein.

Dafür daß die Chorda dem Nebendarm verglichen und homologisirt werden darf, sind zwei in ihrer weiteren Entwicklung zu beachtende Ercheinungen von größerem Belang: ihre Form und ihre Verbindung mit dem Darm.

Eine dem Nebendarm gleichwerthige Chorda muß die Form eines von entodermatischen Zellen gebildeten Rohres besitzen, oder eine Gestaltung, welche mit einer Rohrbildung erfahrungsmäßig in der Entwicklungsgeschichte verknüpft werden kann. Röhrenartige Hohlorgane desselben Formenkreises entstehen aber ebensowohl durch den Abschluß einer mit Abfaltung entstandenen Rinne, wie durch die Aushöhlung eines als solide abgesonderten Stranges. Für die Homologisirung der nervösen Centralorgane oder der primären Cänäle im Urogenitalsystem der Wirbelthiere thut es keinen Abbruch, ob dieselben aus der Form einer Rinne oder eines soliden Stranges in die Röhrenform übergehen. Dem entsprechend halte ich, wenn überhaupt die Chorda als Rohr auftritt, es für gerechtfertigt, auch die Rinnenform der Chordaanlage oder ihre von Anfang an compacte Strangform für den Vergleich in Betracht zu ziehen, und solche Fälle, in welchen Hohlraumbildungen in der Chorda nicht erscheinen, als »abgekürzte Entwicklungen« aufzufassen, die der zu erweisenden Homologie keinen Abbruch thun. Daß mit der Solidification des chordalen Stranges schließlich eine von der des Nebendarmes abweichende Bildung erreicht wird, thut ja der zu erweisenden Gleichwerthigkeit ebenfalls keinen Abbruch.

---

1) Kurt Lampert. Zur Genese der Chorda dorsalis beim Axolotl. Erlangen 1883. (Inaug. Dissertation).

2) C. K. Hoffmann. Die Bildung des Mesoderms, die Anlage der Chorda dorsalis und die Entwicklung des Canalis neurentericus bei Vogelembryonen. Amsterdam 1883. 4°.

3) E. Selenka. Studien über die Entwicklungsgeschichte der Thiere. Wiesbaden 1883. Heft 2.

4) W. Heape. The development of the Mole. Quarterly Journal of microscopical science. Vol. XXIII. 1883. pg. 412.

5) R. Bonnet. Beiträge zur Embryologie der Wiederkäuer. Archiv für Anatomie und Physiologie. Jhrg. 1884. Anatom. Abth. pg. 170. Bonnet nimmt jedoch eine theilweise ectoblastische Anlage der Chorda an.

Daß die Chorda unter rinnenförmiger Abfaltung selbstständig wird und zum Rohre sich schließt, ist am klarsten vom Amphioxus erwiesen (Kowalewsky, Hatschek)[1]). Kaum weniger klar vollzieht sich dieser Bildungsgang der Chorda in der Entwicklung des Siredon pisciformis, nach der Darstellung, welche K. Lampert[2]) davon gegeben hat; diese Darstellung ergänzt nach dieser Richtung das, was Scott und Osborn[3]) über eine rinnenförmige Chorda aus der Entwicklung von Triton taeniatus gegeben haben. — Die Bildung eines Chordarohres aus einer Chordarinne hat für Vögel sehr deutlich C. K. Hoffmann[4]) dargestellt; aber es ist sehr beachtenswerth, was Hoffmann angiebt, daß in der Chordaentwicklung Grallatores und Natatores sich anders als Oscines und Rasores verhalten; bei den ersten, welche den paläontologisch als ältesten erwiesenen Vögeln nahe stehen, findet sich das chordale Rohr, und hier ist nach Hoffmann[5]) »die Chorda . . . sehr lang eine axiale Proliferation des Entoderms, resp. der oberen Darmwand, was wohl auf den phylogenetisch sehr alten Ursprung der Chorda als ein Product des Entoderms hinweist«; bei den »höher entwickelten« Oscines und Rasores scheidet dagegen die strangförmige Chordaanlage viel früher aus dem unteren Keimblatte aus.

Unter den Säugethieren entsteht bei der Maus nach Selenka[6]) die Chorda durch eine rinnenförmige Einfaltung des Entoderms. Leider ist die genauere Darstellung dieses Entwicklungganges noch nicht gegeben; es ist von Interesse zu erfahen, ob hier die eingefaltete Rinne in ganzer Ausdehnung sich gleichzeitig oder succesive der Länge nach zum Rohre schließt, oder ob, was Heape[7]) für die Chordaentwicklung des Maulwurfs angiebt, die Rohrbildung mit der Rinnenform alternirend an der Chordaanlage auftritt; die erstere also vielleicht an ungleichen Strecken zu gleicher Zeit den Abschluß zum Rohr erfährt. Diese Angaben lassen die Darstellungen, welche

---

1) B. Hatschek. Studien über die Entwicklung des Amphioxus a. a. O.

2) K. Lampert. Zur Genese der Chorda dorsalis a. a. O.

3) W. B. Scott and H. F. Osborn. On some points in the early development of the common Newt. T. M. Balfour. Studies from the morphological Laboratory in the University of Cambridge. 1880. pg. 34.

4) C. K. Hoffmann. Die Bildung des Mesoderms, die Anlage der Chorda dorsalis und die Entwicklung des Canalis neurentericus bei Vogelembryonen. Amsterdam 1883. Cfr. Taf. II. Fig. 6. 7. 8.

5) a. a. O. pg. 89.

6) E. Selenka. Studien über Entwicklungsgeschichte a. a. O.

7) W. Heape. The development of the mole a. a. O. pg. 441.

Lieberkühn[1]) und Kölliker[2]) von der Entwicklung der Chorda gegeben haben, wohl in einem anderen Lichte erscheinen. Beide Autoren schreiben der sich entwickelnden Chorda einen kanalförmigen Hohlraume zu, und Lieberkühns Darstellung von der Chordaentwicklung des Maulwurfs zeigte im Besonderen, daß die untere Canalwand an der hinteren Chordastrecke durchbrochen, der Canal nach unten offen und zu einer tiefen Rinne geworden ist. — Nach Bonnet's Angaben[3]) über die Chordaentwicklung vom Schaf ist die Chordaanlage an mehreren Stellen flach rinnenförmig eröffnet; der Entoblast fehlt hier, die Rinne geht gegen den Primitivknoten zu in einen Kanal über. Tritt also hier die Chorda röhren- und rinnenförmig auf, wie es Heape angegeben; so ist es zumal Selenka's bestimmten Angaben gegenüber wohl vor der Hand nicht ohne weiteres abzuweisen, daß die hier gegebenen Darstellungen auch in der Weise ausgelegt werden können, daß nicht der Chordakanal sich öffne und damit eine Rinne bilde, sondern daß die Rinne sich schließe, und damit der Chordakanal entstehe. Dazu würde Lieberkühn's Angabe, daß der Entoblast in die Chordarinne eintrete, und Bonnet's Mittheilung, daß der Entoblast an der Chordarinne fehle, sehr wohl passen. Lieberkühn[4]) selbst hat an eine solche Deutung gedacht, weist dieselbe aber ohne eingehendere Discussion ab. Daß hier der Verschluß einer Chordarinne zum Rohr vielleicht unregelmäsig und discontinuirlich, wie es nach Heape's Darstellung erscheint, erfolgt, thut der Deutung des Chordarohres, auf welche es hier abgesehen ist, keinen Eintrag; und auch darin würde ich keinen Widerspruch gegen dieselbe finden, wenn die erste Anlage der Chorda strangförmig erfolgte, danach ein Hohlwerden derselben, und dann eine Weiterentwicklung mit Rinnenbildung bei einzelnen Säugethieren in ungleicher Weise nachgewiesen werden sollte.

Die strangförmige Anlage der Chorda vom Hypoblast aus ist für Haie (Pristiurus) von C. K. Hoffmann[5]) bestätigt, durch Balfour's[6]) frühere Untersuchungen wissen wir, daß in der Axe dieses Stranges ein spaltförmiger Hohlraum sich zeigt. Kingsley und Conn haben

---

1) Lieberkühn. Ueber die Chorda bei Säugethieren. a. a. O. 1882.

2) Kölliker. Ueber die Chordahöhle. a. a. O.

3) Ich entnehme dieselben dem zoolog. Jahresberichte für das Jahr 1883. pg. 142, da mir das Original im bayerisch. ärztlich. Intelligenzblatt 1883 nicht zugängig ist.

4) a. a. O. 1882. p. 413.

5) C. K. Hoffmann. Sur l'origine du feuillet blastodermique a. a. O.

6) F. M. Balfour. A Monograph of the development of Elasmobranch Fisches. 1878. Pl. IX. Fig. 1[A]. 16.

für Knochenfische die strangförmige Anlage bestätigt; für Petromyzonten wie für ecaudate Amphibien ist die solide Chordaanlage von früher bekannt. Von den Sauropsiden legt sich die Chorda in solcher Weise bei den Lacertilien (Balfour[1]) Strahl[2])) und Schlangen an; dabei können Spuren einer Rinnenbildung auftreten; daß bei einem Theil der Vögel dies Verhalten vorwaltet, wurde bereits oben erwähnt.

Für den Vergleich des Nebendarmes mit der Chorda ist endlich der Zusammenhang beider mit dem Darm oder der Darmanlage heranzuziehen: entspricht die Chorda dem Nebendarm, so muß sie zu einer Zeit ihrer Entwicklung mit dem Darm oder der Darmanlage in solcher Weise wie der Nebendarm, das heißt am vorderen und hinteren Ende, in Verbindung stehen. In einer Reihe von Fällen ist das sicher der Fall; da aber diesen Verhältnissen eine besondere Aufmerksamkeit nicht geschenkt ist, so werden die Belege, wie ich sie damit zu bringen wünschte, wohl zahlreicher werden, sobald sie eine besondere Beachtung zu verdienen scheinen.

Bei Pristiurus ist nach C. K. Hoffmann[3]) die Chorda, welche nach vorn und hinten wachsen soll, in ihrer mittleren Strecke frei und vom Entoderm getrennt, während ihr vorderes und hinteres Ende mit diesem verbunden ist. — In gleicher Weise zeigt nach Strahl[4]) der Embryo der Eidechse vor Schluß der Rückenfurche die Chordaanlage derartig, daß ihr vorderes und hinteres Ende im Entoderm gelegen ist, während die mittlere Strecke außer Verband mit demselben steht. In beiden Fällen steht also die Chordaanlage mit der Darmanlage in solcher Verbindung wie der Nebendarm mit dem Darm. — In gleicher Weise lassen sich vielleicht gewisse Studien aus der Chordaentwicklung der Säuger ausdeuten, bei welchen das vordere und hintere Ende der Chorda als eine Einschaltung im Hypoblast erscheint, während eine kurze mittlere Strecke cylindrisch, aus der Darmwand ausgeschaltet oder vom Entoderm unterwachsen ist, und ein Lumen besitzt; Lieberkühn[5]) schildert einen solchen Zustand von einem Embryo des Meerschweinchen mit zwei Urwirbeln.

---

1) Balfour. On the early development of the Lacertilia. Studies from the morphological Laboratory in the University of Cambridge 1880. pg. 21.

2) a. a. O.

3) C. K. Hoffmann. Sur l'origine du feuillet blastodermique moyen chez les poissons cartilagineux. Archives Néerlandaises. T. XVIII. Pl. IV. Fig. 5. 6. 7. 8.

4) Strahl. Beiträge zur Entwicklung der Reptilien. Archiv für Anatomie und Physiologie. Jhrgg. 1883. Anatom. Abtheilg. pg. 39.

5) N. Lieberkühn. Ueber die Chorda bei Säugethieren. Archiv für Anatomie und Physiologie. Jahrg. 1884. Anatomische Abtheilung p. 441.

Wichtiger als diese Befunde sind die Angaben über die Lagerung der sich entwickelden Chorda bei Schlangen und Vögeln; denn während in den voranstehenden Fällen die Chordaanlage nur mit dem entodermalen Darmblatte zusammenhängt, tritt bei diesen Thieren ein solcher Zusammenhang auf, daß die Chorda an ihrer hinteren und vorderen Strecke mit der Darmwand noch Zusammenhang besitzt, während diese schon völlig röhrenförmig abgeschlossen ist. In einer ganz neuerdings veröffentlichten Arbeit hat C. K. Hoffmann[1]) unter anderen die Chorda eines Schlangenembryo mit 8 Somiten beschrieben: in diesem ist das vordere Chordaende solchergestalt mit dem geschlossenen Kopfdarm verbunden, daß eine feine Rinne aus dem Darmlumen gegen die Axe der soliden Chorda führt, ein Ausdruck der Abfaltung der Chorda oder einer Communicationsöffnung zwischen dem Darm- und dem hier allerdings fehlenden Chordalumen; weiterhin liegt die Chorda frei über dem Darmblatt, bis sie mit ihren hintern Ende mit diesem wieder verschmilzt. — Ein gleiches Verhalten zeigt nach demselben Autor[2]) das Verhalten des vorderen Chordaendes zum selbständig abgeschlossenen Kopfdarm im Embryo des Haematopus ostralegus mit 7 Urwirbeln; auch hier liegt die folgende Chordastrecke frei, während ihr Hinterende in das Entoderm übergeht. Daß auch dieses Chordaende mit seinem Lumen in die dem Darm zuzuschreibende Höhe einmündet hat bereits Gasser[3]) von dem Embryo der Gans mit 22 Urwirbeln dargestellt. Die hier auftretenden Verhältnisse werden aber durch die Bildung des Canalis neurentericus beeinflußt, auf den weiter einzugehen hier nicht der Ort ist.

Mit der weiteren Entwicklung der Chorda erfolgt deren Ablösung vom Entoderm, und damit wird die Uebereinstimmung derselben mit dem Nebendarme mehr und mehr aufgehoben. Mit Rücksicht hierauf wird das Darmdivertikel der Sipunculiden, in welchem ich den Rest eines Nebendarmes sehe, darauf hin zu prüfen sein, ob auch an diesem etwa eine Loslösung von der Darmwand oder der Flimmerrinne an dem einem Ende desselben erfolgt; der große Unterschied in der Länge, welcher diesem Divertikel bei verschiedenen Individuen zukommt, läßt vermuthen, daß hier ungleiche Ausbildungen eintreten; sollte sich dabei etwa herausstellen, daß das Vorderende des Diver-

1) C. K. Hoffmann. Weitere Untersuchungen zur Entwicklungsgeschichte der Reptilien. Morphologisches Jahrbuch. Bd. 11. 1885. p. 182.

2) C. K. Hoffmann. Die Bildung des Mesoderms, die Anlage der Chorda dorsalis und die Entwicklung des Canalis neurentericus. Amsterdam 1883. pg. 31.

3) Gasser. Der Primitivstreifen bei Vogelembryonen. Cassel 1879. Taf. VIII.

tikel sich von der Flimmerrinne ablöste, während die hintere Einmündung des Blindsackes in den Darm bestehen bleibt, so könnte das der Chordaentwicklung entsprechen, deren Vorderende die Verbindung mit dem Darm früher als das Hinterende aufgiebt. — Wenn die Chorda als ein entodermales Rohr in der Weiterentwicklung solide wird und die Function eines Stützapparates übernimmt, so ist das nicht ohne Analogon; für einen solchen Vorgang liefern die soliden Tentakelaxen der Hydroidpolypen, das Gefäßblatt der Medusen bekannte Beispiele. Im übrigen wird in dieser Hinsicht auch der Nebendarm noch genauer zu prüfen sein; ich verweise deshalb auf die Abbildung, welche Spengel[1]) vom Querschnitt des Nebendarmes des Echiurus gegeben hat, da hier die epitheliale Auskleidung des Rohres im Verhältnis zum Lumen sehr dick, aber auch eigenartig zusammengehäuft erscheint, als würde mit epithelialer Wucherung das Lumen des Rohres eingeengt. —

Das selbständige Weiterwachsen der Chorda nach dem Ausscheiden aus dem Entoderm ist eine Erscheinung, welche im Wirbelthierkörper auch anderen Organen, welche epithelialen Ursprunges sind und im Mesoderm eingeschlossen werden, zukommt; damit fällt die besondere Ausgestaltung der epithelialen Zellen zusammen; daß auch in dieser Hinsicht eine gewisse Parallele zwischen den Chordazellen und den entodermalen Stützzellen in der Tentakelaxe eines Hydroiden erscheint, sei im Vorübergehen erwähnt. —

Die hakenförmige Umbiegung, welche das Vorderende der reifenden Chorda erfährt, möchte ich nicht auf einen Zusammenhang der Chorda mit dem Darme zurückführen, da ein solcher an dieser Stelle nicht mehr zu suchen ist, sondern darauf, daß in der Kopfbeuge dem Geradeauswachsen der Chorda ein Hindernis entgegentritt. Ich betone dies, weil ich der von Hubrecht[2]) angenommenen Beziehung der Hypophysis zur Chorda, und der Homologisirung der letzteren mit der Scheide eines Nemertinenrüssels in keiner Weise beistimmen kann.

Eisig[3]) hat den Nebendarm dem in der Entwicklung von Ichthyopsiden auftretenden subchordalen Strange homologisirt; ich glaube nicht, daß diese Zusammenstellung jetzt noch zu halten ist. Sicherlich ist der subchordale Strang eine entodermale Bildung, und vielleicht derartig zu characterisiren, daß er den Rest einer Verbindung zwischen Chorda

---

1) a. a. O. Ztschr. f. wiss. Zoolog. Bd. 34. Taf. 25. Fig. 28.

2) A. A. W. Hubrecht. On the ancestral Form of the Chordata. Quarterly Journal of microscopical science. Vol. XXIII 1883. pg. 349.

3) H. Eisig. Der Nebendarm der Capitelliden a. a. O.

und Darmrohr andeutet. Zieht man nun in Betracht, daß der subchordale Strang in seiner Entwicklung da, wo er mit dem Darmrohre zusammenhängt, unter der Form einer längslaufenden Rinne erscheint [1]) so erwächst mir die Vorstellung, dieser Strang möge zur Chorda und zum Darm die morphologischen Beziehungen haben, welche die Flimmerrinne des Darmes von Echiurus zu diesem und zum Nebendarm besitzt; die Bildung der Chorda löst gleichsam aus dem Darme einen zweiten Bestandtheil, der Flimmerrinne vergleichbar, heraus, der bald völlig verschwindet.

Eine Auffassung der Chorda dorsalis, wie ich sie hier vorgetragen habe, kann in der Zoologie aufs Neue Veranlassung geben, an jene Wurmformen, welche als Anneliden und Gephyreen ohne Zweifel nähere Verwandtschaft zu einander besitzen, einerseits Echinodermen, andrerseits Vertebraten oder Chordaten anzuschließen. Nicht daß ich der Meinung wäre, es müßten diese Formen, in welcher Weise immer, von einander abzuleiten sein; dafür liegen die Verhältnisse noch nicht klar zur Beurtheilung vor; wohl aber glaube ich, daß wir eine gewisse Berechtigung erhalten, diese Thierformen auf einen gemeinsamen, nicht genauer zu kennzeichnenden Ausgangspunkt zurück zu führen, in welchem das Organ, welches als Nebendarm bei den erwähnten Anneliden, Gephyreen und Echinodermen offenbar verkümmert und in Rückbildung begriffen, daher vielfach variabel ist, bei den Chordaten gleichfalls seiner ursprünglichen Bestimmung entfremdet erscheint, eine andere Stellung und Bedeutung behauptet haben mag. Dann aber wird die Stellung der Urochordaten, auf die ich bisher nicht näher eingegangen bin, zu den Vertebraten nicht so sehr durch den gemeinsamen Besitz einer Chorda, als durch die gemeinsame Verwendung der vorderen Darmstrecke für respiratorische Function gekennzeichnet; da diese aber auch bei den Enteropneusti sich findet, so liegt kein zwingender Grund vor, die Urochordaten als degenerirte Vertebraten oder als Vorläufer der Wirbelthiere anzusehen; ihnen fehlt dasjenige Characteristicum, welches den Leib der Vertebraten kennzeichnet, das ist die in den activen und passiven Theilen des Bewegungsapparates vorhandene und für dessen Functionen ursprünglich bedeutungsvolle Metamerie, welche die Gestaltung anderer Organe zu beeinflussen vermag, dort aber zurücktritt oder fehlt, wo der Bewegungsapparat selbst verkümmert ist. Für den Ausgangspunkt solch einer Thierform ist nicht unmittelbar auf Formen, wie wir sie in den gegliederten Würmern kennen, zurück zu gehen, wenn auch in

1) Balfour. A Monograph of the development of Elasmobranch Fisches a. a. O. Pl. X. Fig. 1. 1a.

den Organisationsverhältnissen derselben Bildungen, wie die peritonealen Höhlen, die an sie angeschlossenen Apparate und das geschlossene Blutgefäßsystem, vorhanden sind, wie sie in ähnlicher Weise bei den Vertebraten sich wiederholen. Ich betone das, um abzuweisen, daß ich in jetzt lebenden Anneliden mit einem Nebendarm Vorläufer der Wirbelthiere erblicken könnte.

Die Speculation könnte sich weiter wagen und daran anknüpfen, daß bei Amphioxus, und vielleicht bei Wirbelthieren allgemein, mit der Bildung des Chordarohres die Bildung des paarigen Enterocoel's auftritt, mithin im frühen Embryonalzustande ein Darmlumen vorhanden ist, welches in den paarigen Enterocoelausstülpungen, dem Chordarohre und der späteren Darmlichtung, von den ungleichen Größenverhältnissen abgesehen, eine Radiärgestalt des Urdarmes aufweist, wie sie im Gastralraume der Larve eines Corallopolypen mit den Anlagen von zwei Paaren von Dissepimentfalten auftritt [1]). Allein das würde voraussetzen, daß die Abfaltung des Chordarohres vom Urdarme den Abfaltungen, welche das Enterocoel bilden, gleichwerthig sei. Wenn auch die letzteren als ursprüngliche Organanlagen aufzufassen sein mögen, so dürfen sie doch schon deshalb zur Zeit nicht der Chordaanlage parallelisirt werden, weil bei den Echinodermen und Gephyreen die Entwicklung des Nebendarmes in eine sehr viel spätere Periode fällt, als die Bildung der Enterocoelblasen oder der zur Auskleidung der Peritonealhöhle dienenden Gewebe; und in dieser Hinsicht ist mir die Erscheinung, daß die Chorda einen Zusammenhang mit dem Darmrohre noch besitzt, wenn dieses bereits zum Rohre abgeschlossen ist, von Bedeutung gewesen; die Chorda gehört danach, wie der Nebendarm, nicht sowohl zum Archenteron als zum Darm.

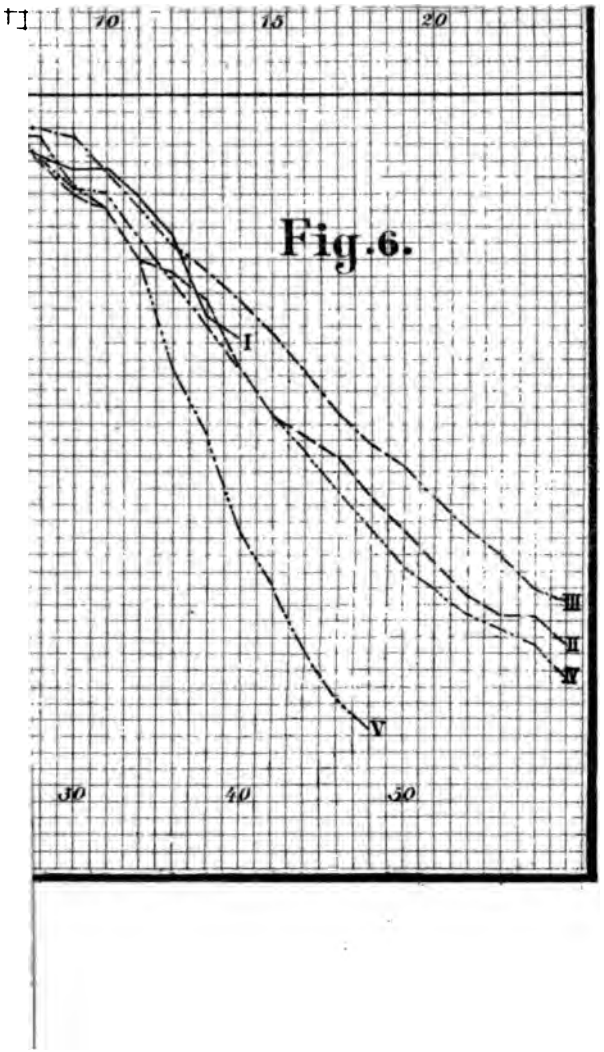
Daß die Bildungen, welche zuletzt Nussbaum [2]) als Chorda der Articulaten in der Entwicklungsgeschichte dieser Thiere beschrieben hat, mit dieser Chorda doralis oder dem Nebendarm zusammenfallen, habe ich nicht ersehen können.

---

1) cfr. Lacaze Duthiers. Developpement des Coralliaires. Archives de Zoologie expérimentale. T. I. 1872. Pl. XI. Fig. 13.

2) J. Nussbaum. Vorläufige Mittheilung über die Chorda der Arthropoden. Zoologischer Anzeiger. Jhrg. 1883. pg. 291.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).


10
15
20
Fig.6.
I
III
II
IV
V
30
40
50

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. December. **№ 13.** 1885.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS LIBRARY

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 1. August 1885.

Ueber die Pyroëlektricität des Turmalins.

Von

Eduard Riecke.

Das Studium der pyroëlektrischen Erscheinungen erfordert die Verbindung von zwei ihrem Charakter nach sehr verschiedenartigen Untersuchungen. Die erste derselben besteht in der Ermittelung der Beziehungen, welche zwischen dem krystallographischen Bau der pyroëlektrischen Körper und zwischen der Vertheilung der elektrischen Ladung an ihrer Oberfläche bestehen; die zweite Aufgabe, welche erst in Angriff genommen werden kann, wenn jene erste wenigstens ihren hauptsächlichsten Zügen nach gelöst ist, besteht in der Ermittelung des die Entwicklung der Elektricität mit der Bewegung der Wärme verbindenden Gesetzes. Während bei dem Turmalin in der ersteren Richtung durch eine Reihe von sorgfältigen Untersuchungen hervorragender Forscher ein gewisser Abschluß erreicht ist, sind in der letzteren Richtung nur sehr wenige Arbeiten veröffentlicht worden [1]).

Von besonderer Bedeutung sind die Untersuchungen von Gaugain, deren Resultate in den folgenden Sätzen niedergelegt sind.

1. Wenn man eine beliebige Anzahl von Turmalinen zu einer Batterie vereinigt, indem man ihre gleichnamigen Pole mit einem

1) Becquerel, Ann. d. chim. et d. phys. II. Ser. T. 37. Gaugain, Ann. d. chim. e. d. phys. III. Ser. T. 57. Hoppe, Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1877. S. 474.

Kupferdraht umschlingt, so ist die von denselben gelieferte Elektricitätsmenge gleich der Summe derjenigen, welche von den einzelnen Turmalinen unter denselben Umständen erzeugt worden wären.

2. Wenn man eine Reihe von Turmalinen von gleichem Querschnitt hinter einander schaltet, indem man die ungleichnamigen Pole durch Kupferdrähte verbindet, so ist die von der Säule gelieferte Elektricitätsmenge nicht größer als die von einem einzelnen erzeugte.

3. Die von einem Turmalin entwickelte Elektricitätsmenge ist proportional seinem Querschnitt und unabhängig von seiner Länge.

Beispielsweise ergaben sich bei 3 verschiedenen Prismen auf die Einheit des Querschnittes die Elektricitätsmengen

0.25 0.29 0.27.

Als Maaß für die Menge der Elektricität wurde die Anzahl der Entladungen eines zur Selbstentladung eingerichteten Elektroskops benutzt.

4. Die Elektricitätsmenge, welche ein Turmalin entwickelt, wenn seine Temperatur um eine gewisse Anzahl von Graden sinkt, ist unabhängig von der dazu erforderlichen Zeit.

Eine Säule von 17 Turmalinen kühlte sich das eine mal bei ruhiger Luft in einer Zeit von 4 Min., das anderemal in einem Luftstrom in $1^1/_4$ Min. ab; das erstemal betrug die Zahl der Selbstentladungen des Elektroskops 17, das zweitemal 19.7. Bei einem anderen Versuch mit geringerer Divergenz der Blätter des Elektroskops waren dieselben Zahlen gleich 122 und 112.

5. Die bei einer Temperaturerhöhung entwickelten Elektricitätsmengen sind ebenso groß, wie die einer gleich großen Temperaturerniedrigung entsprechenden.

Für die Versuchsanordnung von Gaugain war die Absicht maßgebend, die beobachteten Erscheinungen möglichst von den Einflüssen zu befreien, welche von der Zerstreuung der Elektricität herrühren. Bei der folgenden Untersuchung wurde diese Zerstreuung von vornherein in den Kreis der Betrachtung gezogen, da sie von großem und wesentlichem Einfluß auf den Verlauf der Erscheinungen ist. Es ergiebt sich, daß die Zerstreuung durch eine gewisse Leitungsfähigkeit der Oberfläche des Turmalins bedingt ist, und daß auch bei den Versuchen von Gaugain ihr Einfluß keineswegs ganz vermieden ist.

Die Methode der Beobachtung bestand darin, daß der Turmalin in einem Raum von höherer, möglichst konstanter Temperatur während einer gemessenen Zeit erwärmt, daß er dann, vertikal über dem Knopf eines Goldblattelektroskops an Cokonfäden hängend, der freien Abkühlung überlassen wurde. Die mit der Zeit sich ändernde Divergenz des Elektroskops bildete den Gegenstand der Messung.

Das Ziel, dessen Erreichung bei der Untersuchung angestrebt wurde, bestand einmal in der Ermittlung des Gesetzes, nach welchem bei der Abkühlung die elektrische Ladung ansteigt und wieder verschwindet, zweitens in der Ermittlung der Abhängigkeit, in welcher das jeweilig erreichte Maximum der Ladung von der Größe der Abkühlung steht, und drittens in der Bestimmung der auftretenden Ladungen nach absolutem elektrostatischem Maaße.

Bei den Beobachtungen sollte die Dauer der Erwärmung so regulirt werden, daß durch dieselbe das Maximum der Ladung, welches den gewählten Temperaturverhältnissen entsprach mit Sicherheit erreicht wurde. Zu diesem Zweck war eine Voruntersuchung auszuführen, welche den Inhalt des zweiten Abschnittes bildet, und welche den Einfluß der Erwärmungsdauer auf die Größe der elektrischen Ladung behandelt. Leider ist bei diesen Versuchen auf die Einhaltung einer konstanten Erwärmungstemperatur nicht diejenige Sorgfalt verwandt worden, welche dem weiteren Verlauf der Untersuchung nach wünschenswerth gewesen wäre. Doch dürften mit einiger Sicherheit die beiden folgenden Sätze aus den Versuchen zu entnehmen sein. 1. Bei der Abkühlung tritt das Maximum der elektrischen Ladung ein, wenn der Turmalin zuvor in seinem ganzen Inneren die Temperatur des Erwärmungsraumes angenommen hatte. 2. Die einer gleichmäßigen Erwärmung entsprechende Ladung ist nahezu dieselbe, wie die bei einer ungleichmäßigen Erwärmung auftretende, wenn die mittlere Temperatur der letzteren der konstanten Temperatur der ersteren gleich ist.

Der Verlauf der elektrischen Ladung η bei der Abkühlung folgt dem Gesetz

$$\eta = H \frac{qe^{-as} - ae^{-qs}}{q - a}$$

Hier bezeichnet s die Zeit; H den Maximalwerth, welchen die Ladung erreicht; q ist proportional der Leitungsfähigkeit der Oberfläche, a ist die in der Newtonschen Abkühlungsformel auftretende Constante,

$$a = \frac{S.h}{c.M}$$

wo unter M die Masse, unter S die Oberfläche des Turmalins, unter c seine specifische Wärme, unter h die äußere Wärmeleitungsfähigkeit zu verstehen ist.

Bei einem Crystall aus Snarum ergaben 4 verschiedene Beobachtungsreihen für h und q die Werthe in *cm*, *g*, *min*.

$h =$	0.0196	0.0194	0.0204	0.0195
$q =$	0.1052	0.1040	0.1095	0.0552.

Eine Beobachtungsreihe mit einem Crystall von Elba ergab

$$h = 0.0200 \text{ und } q = 0.0891.$$

Vor dem Beginn einer Beobachtungsreihe wurde die Zerstreuung der Elektricität in der Luft bestimmt, indem über dem Knopfe des Elektroskops eine an Cokonfäden isolirte elektrische Messingkugel aufgehängt wurde. Die Distanz derselben von den Knopfe betrug 2,5^{mm} und war geringer als die Entfernungen bis zu welchen die Turmaline dem Knopfe genähert wurden. Der Zerstreuungskoëfficient der Luft erwies sich als ziemlich konstant, der kleinste beobachtete Werth betrug 0.018, der größte 0.025, immer noch weniger als die Hälfte des kleinsten für q gefundenen Werthes.

Die Leitungsfähigkeit q des Turmalines hängt ab von der Temperatur und von der Feuchtigkeit der Luft. Die Abhängigkeit von der Temperatur macht sich schon bei einer und derselben Beobachtungsreihe geltend; berechnet man nämlich die Werthe von q aus den Beobachtungen, welche nach der Erreichung des Maximalwerthes H angestellt sind, so findet man dieselben größer als für die dem Maximum vorangehenden Beobachtungen. Dadurch erklärt sich zum Theil die Verschiedenheit der angeführten Werthe von q. Die drei ersten der für den Crystall von Snarum gefundenen beziehen sich auf die Periode nach der Erreichung des Maximums, der vierte Werth auf die Periode der ansteigenden Ladung.

Der Grad der Veränderlichkeit von q ist bei verschiedenen Erwärmungstemperaturen und verschiedenen Turmalinen ein verschiedener. Während ein Theil der Beobachtungen wenigstens für die Periode nach Erreichung des Maximums konstante Werthe von q liefert, dauert bei anderen die Aenderung von q während der ganzen Abkühlungsdauer fort. So konnte von den mit dem Elbaer Turmalin ausgeführten Beobachtungsreihen nur eine einzige durch einen konstanten Werth von q in befriedigender Weise dargestellt werden. Ein dritter brasilianischer Krystall aber zeigte Erscheinungen, welche sich von den bisher erwähnten wesentlich unterscheiden und auf welche die vorhergehende Formel nicht angewandt werden kann.

Diese besondere Natur des brasilianischen Crystalls machte sich in sehr auffallender Weise bei denjenigen Beobachtungen geltend, welche den Einfluß der Erwärmungstemperatur auf die elektrische Ladung zum Gegenstand hatten. Die Turmaline von Snarum und Elba zeigten ein ziemlich gleichmäßiges Anwachsen der elektrischen Ladung bis zu den höchsten angewandten Temperaturen.

Der brasilianische Krystall erreichte bei einer Erwärmung auf 70° bis 80° ein Maximum der Ladung, welches bei höherer Erwärmung schnell bis zu einem viel kleineren Betrage herabsank. Diese Erscheinung dürfte am besten durch die Annahme zu erklären sein, daß der Turmalin bei höherer Temperatur bis zu einem gewissen Grade leitend wird, so daß die Spannung der entwickelten Elektricität einen bestimmten Betrag nicht überschreiten kann. Dabei bleibt vorerst unentschieden, ob diese Veränderung einer direkten Wirkung der Wärme auf die ganze Masse des Turmalins, oder einer Wirkung der heißen Luft auf seine Oberfläche zuzuschreiben ist.

Jedenfalls aber ist diese bei höherer Temperatur sich einstellende Abnahme der Isolation wohl zu unterscheiden von der bei sinkender Temperatur wachsenden Leitungsfähigkeit q. Mit Bezug auf diese ist es kaum zweifelhaft, daß ihre Ursache in einer Condensation von Feuchtigkeit an der Oberfläche des Turmalins zu suchen ist. Die hiedurch gebildete leitende Oberflächenschichte ist der Grund, weßhalb jeder Turmalin im gewöhnlichen Zustand unelektrisch erscheint, weßhalb die durch eine Volumänderung bedingte Ladung nach kürzerer oder längerer Zeit wieder verschwindet. Würde es möglich sein, die Oberfläche des Turmalins in einen Zustand vollkommener Isolation zu versetzen, so würde die bei der Abkühlung auftretende elektrische Polarisation als eine permanente sich erweisen. Ersetzen wir diese Polarisation des Inneren durch eine mit derselben äquivalente elektrische Belegung der Endflächen, so berechnet sich die Dichtigkeit, welche von dieser bei vollkommener Isolation erreicht werden würde, bei dem Crystall von Snarum zu 152 elektrostatischen Einheiten für eine Abkühlung von 115°. Dagegen ergeben sich für die größten bei den drei untersuchten Turmalinen in Wirklichkeit auftretenden Dichtigkeiten die Werthe von 48, 72 und 68 elektrostatischen Einheiten. Dabei ist angenommen, daß die äquivalente Oberflächenbelegung sich auf die Säulenflächen des Turmalines inähnlicher Weise ausbreitet, wie die magnetische Belegung eines Stabmagnetes auf die Seitenflächen desselben. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß diese Dichtigkeiten ganz von derselben Ordnung sind, wie diejenigen, welche auf der Oberfläche geriebener Isolatoren oder den Scheiben der Influenzmaschine auftreten.

I. Die untersuchten Turmaline. Methode der Beobachtung.

Die im Folgenden mitzutheilenden Beobachtungen beziehen sich auf drei verschiedene Turmaline, einen von Elba, einen von Brasilien

und einen von Snarum. Dieselben mögen mit *E*, *B* und *S* bezeichnet werden.

Der Turmalin *E* ist von grüngelber Färbung, an den Kanten durchscheinend; der Länge der Säule nach ist ein Wechsel von helleren und dunkleren Schichten zu beobachten. Die Begrenzung des Crystalls ist im Wesentlichen gebildet durch die zweite sechsseitige Säule; von den Kanten derselben ist eine durch eine Fläche der ersten sechsseitigen Säule glatt abgestumpft, während die beiden entsprechenden Kanten cylinderförmig abgerundet und gestreift sind. Am oberen Ende des Crystalls sind zwei Flächen des Rhomboëders vorhanden, die dritte ist durch einen Bruch verloren gegangen. Das untere Ende ist ziemlich senkrecht gegen die Axe durch eine muschlige Bruchfläche begrenzt. Der größte Durchmesser der Säule beträgt 14^{mm}, der kleinste 12^{mm}; die Länge des Crystalls von der unteren Bruchfläche bis zu dem Ende der Rhomboëderkante 20^{mm}. Das Gewicht des Crystalls ist 6.633 gr, sein Volumen 2.137 cbcm, sein specifisches Gewicht 3.104.

Der Crystall *B* ist durchsichtig und von vollkommen gleichmäßiger grüner Färbung; seine Form ist die einer dreiseitigen Säule mit gestreiften und cylindrisch gewölbten Flächen. Die Enden sind durch muschlige Bruchflächen gebildet; die eine derselben ist ziemlich eben und unter einem Winkel von etwa 80° gegen die Axe geneigt, die andere ist cylindrisch gewölbt und verbindet eine Kante der dreiseitigen Säule mit der gegenüberliegenden Fläche. Die Durchmesser der Säule gemessen von einer Kante bis zu der Mitte der gegenüberliegenden Fläche betragen $7^1/_2{}^{mm}$, 8^{mm} und $8^1/_2{}^{mm}$. Die Länge der Kante, welche den Ausgangspunkt der gewölbten Endfläche bildet beträgt 38^{mm}, die Länge der gegenüberliegenden Fläche 45^{mm}. Das Gewicht des Crystalls ist 6.473 gr, sein Volumen 2.077 cbcm, sein specifisches Gewicht 3.116.

Der Crystall *S* ist sammtschwarz, und vollkommen undurchsichtig, er zeigt in sehr regelmäßiger Ausbildung die zweite sechsseitige Säule, deren abwechselnde Kanten durch die Flächen der ersten Säule abgestumpft sind; beide Enden zeigen sehr schön die Flächen des Rhomboëders. Die Durchmesser der dreiseitigen Säule betragen 23.5 — 24.5 — 24.5^{mm}; die Kantenlänge derselben ist im Mittel gleich 24^{mm}. Die Entfernung der Rhomboëderecken beträgt 35.5^{mm}. Das Gewicht des Crystalls beträgt 37.748 gr, sein Volumen ist 12.401 cbcm, sein specifisches Gewicht 3.044.

Die Methode der Beobachtung war folgende: Der Raum eines Trockenkastens wurde auf eine konstante Temperatur erhitzt; der Turmalin in demselben während einer bestimmten Zeit erwärmt, her-

ausgenommen und mit Hülfe einer denselben umfassenden Schlinge von Cokon mit vertikal stehender Axe über dem Knopfe eines Goldblattelektroskops in geeigneter Entfernung aufgehängt. Während der Turmalin der freien Abkühlung überlassen war, wurde die Divergenz der Goldblätter beobachtet. Zu diesem Zweck wurden dieselben mittelst einer Linse auf eine matte Glastafel projicirt, auf welche ein Glasmaaßstab aufgeklebt worden war. Die Beleuchtung der Goldblätter geschah durch eine in einiger Entfernung aufgestellte Lampe, deren Strahlen durch eine Linse in paralleler Richtung auf die Goldblätter geworfen wurden. Unmittelbar nach der Herausnahme der Turmaline aus dem Trockenkasten konnte nie eine Divergenz der Goldblätter beobachtet werden. Dieselbe wuchs mit fortschreitender Abkühlung, erreichte ein gewisses Maximum, um dann schneller oder langsamer wieder zu verschwinden.

II. Einfluss der Erwärmungdauer auf die elektrische Ladung.

In den folgenden Tabellen sind die Erwärmungsdauern z in Minuten zusammengestellt mit den Temperaturen T und t des Trockenkastens und der Luft, mit den entsprechenden Maximalausschlägen A des Elektroskopes und mit der relativen Feuchtigkeit der Luft ρ.

Turmalin E.

z	A	T	t	$T-t$	ρ
10	1.8	71.5	17.6	53.9	55.7
20	5.0	71.4	18.9	52.5	55.0
30	7.8	71.5	17.3	54.2	50.0
45	11.6	72.2	17.6	54.6	50.0
60	13.4	72.8	18.1	54.7	52.0
90	15.7	73.7	18.0	55.7	52.0
120	17.3	73.0	18.2	54.8	52.0
150	18.0	72.4	18.4	54.0	51.0
240	17.8	73.0	18.9	54.1	46.0

Turmalin B.

z	A	T	t	$T-t$	ρ
10	9.8	73.3	16.4	56.9	55.0
20	14.0	74.9	17.4	57.5	55.0
30	17.8	76.9	17.4	59.5	55.0
60	17.1	75.0	17.7	57.3	49.0
90	17.7	75.5	17.4	58.1	45.0
120	17.8	75.5	17.3	58.2	45.5
150	17.6	74.8	17.9	56.9	45.0

Zu dieser Tabelle mag noch bemerkt werden, daß die für 60m angegebenen Zahlwerthe nicht unmittelbar beobachtet worden sind, sondern als Mittel aus drei bei ziemlich abweichenden Temperaturen angestellten Beobachtungen erhalten wurden. Diese drei Beobachtungen sind:

s	A	T	t	$T-t$	p
60	16.1	75.7	18.2	57.5	50.0
60	18.8	77.4	17.6	59.8	50.0
60	16.3	72.0	17.3	54.7	46.0

Turmalin S.

s	A	T	t	$T-t$	p
10	0.1	80.3	20.1	60.2	55.5
20	0.7	82.5	19.8	62.7	58.0
50	0.8	72.8	19.1	53.7	57.5
80	1.2	78.0	20.2	57.8	55.5
120	2.1	76.3	18.5	57.8	59.0
300	4.5	77.5	18.7	58.8	57.5
360	7.0	80.7	17.0	63.7	55.0
480	7.9	79.6	17.7	61.9	59.0
600	7.6	82.0	19.3	62.7	60.0

Bei kürzeren Erwärmungsdauern bis zu 30m ergab sich ein Einfluß vorhergehender Erwärmungen auf den erreichten Maximalwerth der Divergenz A, so zwar, daß dieser durch vorhergegangene Erwärmungen erhöht wurde. Die Beobachtungen mit kurzen Erwärmungsdauern wurden daher wiederholt, bis keine weitere Steigerung der Divergenz a mehr eintrat. Es wurde dieß in allen Fällen durch eine zwei bis dreimalige Wiederholung der Erwärmung erreicht.

Die Resultate der vorhergehenden Beobachtungen sind in Fig. 1 graphisch dargestellt; dabei sind diejenigen Punkte, für welche die Temperaturdifferenz $T-t$ mehr als 0.5° über dem Mittelwerth liegt, mit +, diejenigen, bei welchen $T-t$ mehr als 0.5° unter dem Mittelwerth liegt, mit — bezeichnet.

III. Einfluss der Temperatur auf die elektrische Ladung.

Turmalin E.

Die Dauer der Erwärmung betrug bei allen Beobachtungen 150m. Die bei verschiedenen Erwärmungen beobachteten Maximalausschläge sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

T	t	$T-t$	A	ρ
48.0	19.0	29.0	1.8	50.0
61.3	19.3	42.0	7.8	50.5
73.5	19.8	53.7	17.7	55.0
73.1	18.4	54.7	17.8	50.0
84.0	18.6	65.4	26.8	55.0
84.5	19.6	64.9	27.0	51.0

Da die Beobachtung einer größeren Divergenz der Goldblätter nicht möglich war, so wurde der Abstand des Turmalins von der Kugel des Elektroskops vergrößert. Auf diese vergrößerte Distanz beziehen sich die folgenden Beobachtungen.

T	t	$T-t$	A	ρ
93.2	19.5	73.7	12.0	51.0
104.1	19.9	84.2	15.8	53.0
104.9	18.5	86.4	17.6	53.5
113.8	17.8	96.0	18.2	54.0
129.0	19.4	109.6	19.1	50.5
139.3	17.0	122.3	21.7	59.0

Turmalin B.

Die Dauer der Erwärmung betrug bei allen Beobachtungen 70^m.

T	t	$T-t$	A	ρ
43.0	18.0	25.0	0.7	50.0
56.1	18.1	38.0	2.6	50.5
66.2	17.7	48.5	4.1	53.0
77.0	18.0	59.0	6.9	55.0
81.3	18.4	62.9	7.5	52.0
91.4	18.4	73.0	9.4	50.0
103.0	19.5	83.5	7.8	50.5
110.3	19.6	90.7	6.0	50.0
122.3	19.5	102.8	5.6	50.0
130.1	18.5	111.6	6.1	53.0

Die hier auftretende Wiederabnahme von A war bedingt durch den Umstand, daß der Turmalin bei der höheren Temperatur leitend geworden war. Die Oberfläche desselben wurde mit absolutem Alkohol und Aether gewaschen und die Beobachtungen wiederholt. Es wurden jetzt die folgenden Maximalausschläge erhalten:

T	t	$T-t$	A	ρ
42.4	19.0	23.4	1.7	55.5
52.2	18.6	33.6	3.8	57.0
64.1	18.7	45.4	7.8	57.5
71.0	18.8	52.2	7.6	58.0
75.7	18.6	57.1	9.0	54.5
78.9	18.4	60.5	11.0	60.0
96.2	18.8	67.4	9.0	55.0
105.0	19.2	85.8	7.9	54.0
113.6	19.1	94.5	4.6	55.0
120.9	18.3	102.6	3.4	58.0
134.8	19.1	115.7	4.3	55.0

Turmalin S.

Die Erwärmungsdauer betrug 420^m.

T	t	$T-t$	A	ρ
45.4	18.7	26.7	0.6	57.0
49.9	17.5	32.4	0.1	56.5
66.5	17.3	49.2	5.0	55.0
78.0	18.1	59.9	8.2	60.0
99.0	19.3	79.7	34.0	57.0

Die Entfernung des Turmalines von der Kugel des Elektroskops wurde um 7.8^{mm} vergrößert.

T	t	$T-t$	A	ρ
90.4	20.2	70.2	9.3	56.0
104.2	20.5	83.7	32.3	59.0

Die Entfernung des Turmalins von der Kugel des Elektroskops wurde um weitere 17.3^{mm} vergrößert.

T	t	$T-t$	A	ρ
109.2	20.2	89.0	16.3	60.0
120.0	20.7	99.3	20.0	61.5
127.4	21.1	106.3	20.8	60.0
136.1	21.2	114.9	26.4	67.0

IV. Die elektrischen Ladungen der Turmaline in absolutem Maasse.

An Stelle der mehr oder weniger komplicirten Form, welche die untersuchten Turmaline darbieten, setzen wir einen Kreiscylinder mit Geradendflächen von dem Volumen und dem Querschnitt der gegebenen Crystalle. Denken wir uns die Endflächen eines solchen Cylinders gleichmäßig bedeckt mit gleichen Mengen positiven und negativen elektrischen Fluidums, so werden wir die Wirkung eines Turmalins auf das Elektroskop ersetzen durch die Wirkung eines solchen Kreiscylinders. Um diese letztere zu berechnen, denken wir uns das Elektroskop zunächst abgeleitet und bestimmen die unter dieser Voraussetzung inducirte elektrische Ladung. Bei isolirtem Elektroskop ist zu dieser noch hinzuzufügen die Ladung, welche durch die Vertheilung der frei werdenden gleichnamigen Influenzelektricität gebildet wird. Die Elektricitätsmenge, welche hierbei auf die Blätter des Elektroskops entfällt, bestimmt sich durch das Verhältniß der Capacitäten der Kugel und der Goldblätter. Umgekehrt wird man unter denselben Voraussetzungen auch die auf den Endflächen des genäherten Cylinders befindlichen Elektricitätsmengen bestimmen können, wenn die elektrische Ladung der Goldblätter gegeben ist. Diese Ladung bedingt aber andererseits die Divergenz der Goldblätter, deren größerer oder geringerer Betrag den Gegenstand der Beobachtung und Messung bildet. Die Aufgabe, die elektrischen Ladungen der Turmaline oder der an ihre Stelle gesetzten Cylinder zu finden, setzt also eine Graduirung des Elektroskopes voraus, vermöge deren es möglich ist, aus der Divergenz der Goldblätter ihre elektrische Ladung in absolutem Maaße zu bestimmen. Diese Graduirung wurde dadurch bewerkstelligt, daß die Standkugel einer elektrischen Drehwage geladen und abwechselnd der absolute Werth ihrer Ladung durch die Ablenkung der Drehwage, sowie die durch sie erzeugte Divergenz der Goldblätter beobachtet wurde. Die Resultate dieser Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Dabei bezeichnet A die Divergenz des Elektroskopes, e_1 die sie erzeugende Ladung der Standkugel. Die in der Tabelle enthaltenen Werthe sind durch eine graphische Reduktion der alternirend beobachteten Werthe von A und e_1 auf gleiche Zeitpunkte erhalten worden.

A	9.8	10.1	12.1	13.0	13.7	16.4	17.1	21.1
e_1	2220	2190	2710	2730	2800	3300	3510	4310
e_1/A	226	217	224	210	205	201	205	204

Bei größeren Ausschlägen kann hiernach gesetzt werden:

$$e_1/A = 205.$$

Die der Kugel des Elektroskops genäherte Standkugel möge das Potential V, das Elektroskop das Potential Ω besitzen, die Ladung seiner Kugel sei e_2, die Ladung der Goldblätter e_3. Ganz allgemein werden dann die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} e_1 &= q_{11}V + q_{12}\Omega + q_{13}\Omega \\ e_2 &= q_{21}V + q_{22}\Omega + q_{23}\Omega \\ e_3 &= q_{31}V + q_{32}\Omega + q_{33}\Omega \\ e_2 + e_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wenn die Blätter des Elektroskopes so weit von der Kugel entfernt sind, daß die wechselseitige Einwirkung beider Conduktoren vernachlässigt werden kann, so wird:

$$\begin{aligned} e_1 &= q_{11}V + q_{12}\Omega \\ e_2 &= q_{21}V + q_{22}\Omega \\ e_3 &= q_{33}\Omega \\ q_{21}V + (q_{22} + q_{23})\Omega &= 0. \end{aligned}$$

Es sei nun q_{33} sehr groß gegen q_{22} und q_{21}, dann muß Ω sehr klein sein gegen V. Vernachlässigen wir Ω gegen V, so ergeben sich die Gleichungen:

$$e_1 = q_{11}V, \qquad e_2 = q_{21}V$$
$$e_3 = -e_2$$

Wenn also die Coëfficienten q_{11}, q_{12} und q_{22} sehr klein sind gegen q_{33}, so kann die Vertheilung der Elektricitäten auf der Standkugel und auf der Kugel des Elektroskopes so berechnet werden, als ob die letztere zur Erde abgeleitet wäre. Die Ladung der Goldblätter ist entgegengesetzt gleich der in der Kugel inducirten.

Zur Berechnung der Coëfficienten q_{11} und q_{12} benutzen wir die von Kirchhoff gegebenen Formeln:

$$q_{11} = a\left(\frac{a}{\xi} - \frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{4\log q}\left\{\log(-\log q) + \Psi\left(-\frac{\zeta}{\log q}\right) - \Omega\right\}$$

$$-q_{12} = a\left(\frac{a}{\xi} - \frac{\xi}{a}\right)\frac{1}{4\log q}\left\{\log(-\log q) + \Psi(0) - \Omega_0\right\}$$

Hier bezeichnet a den Halbmesser der Standkugel. Es sei ferner b der Halbmesser der Kugel des Elektroskops, c die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kugeln und

$$k^2 = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2}$$

dann ist

$$q^2 = \frac{2ab}{c^2 - a^2 - b^2 + k^2} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 - k^2}{2ab}$$

$$\xi = \frac{c^2 + a^2 - b^2 - k^2}{2c}$$

$$a\left(\frac{a}{\xi} - \frac{\xi}{a}\right) = \frac{k^2}{c}$$

$$\zeta = -\frac{1}{2}\log\frac{c^2 - a^2 + b^2 + k^2}{2bc}$$

Ferner

$$\Omega_0 = 0.05556\,(\log q)^2 + 0.002592\,(\log q)^4 + 0.000521\,(\log q)^6$$
$$+ \ . \ . \ .$$

$$\Omega_1 = U - \frac{1}{2}\log q\,\frac{dU}{d\zeta} + \frac{B_1}{1\cdot 2}(\log q)^2\,\frac{d^2U}{d\zeta^2}$$
$$- \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log q)^4\,\frac{d^4U}{d\zeta^4} + \frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\log q)^6\,\frac{d^6U}{d\zeta^6}$$
$$- + \ . \ . \ .$$

und

$$U = \log\frac{\zeta(1 + e^{-2\zeta})}{1 - e^{-2\zeta}}$$

und

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}, \qquad B_3 = \frac{1}{42}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von ζ ergiebt sich für U die Reihe

$$U = \frac{1}{3}\zeta^2 - \frac{7}{6\cdot 15}\zeta^4 + \frac{62}{45\cdot 63}\zeta^6 - + \text{ etc.}$$

Die vorhergehenden Formeln vereinfachen sich, wenn die beiden Kugeln einander sehr nahe kommen; setzen wir in diesem Fall

$$c = a + b + \delta$$

so wird:

$$a\left(\frac{a}{\xi} - \frac{\xi}{a}\right) = \sqrt{\frac{8ab}{a+b}\cdot\delta}$$

$$\log q = -\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\,\delta$$

$$\zeta = -\sqrt{\frac{a}{2b(a+b)}}\,\delta$$

$$q_{11} = -\frac{ab}{a+b}\left\{\log(-\log q) + \Psi\left(-\frac{a}{a+b}\right) - \Omega\right\}$$

$$q_{12} = \frac{ab}{a+b}\left\{\log(-\log q) + \Psi(0) - \Omega_0\right\}.$$

Ueberall bezeichnet Ψ die Funktion, welche Gauss in der Abhandlung »Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\text{etc.}«$$

eingeführt hat (Gauss Werke. Bd. 3. S. 154).

Nun ist der Halbmesser der Standkugel $a = 6.05^{mm}$ der Halbmesser der Kugel des Elektroskopes $b = 6.97^{mm}$, $\delta = 2.5^{mm}$ und $c = 15.52^{mm}$. Hiernach ergeben sich die folgenden Werthe der zur Berechnung von q_{11} und q_{12} nothwendigen Größen.

	Nach den genauen Formeln.	Nach den Näherungformeln.
$a\left(\frac{a}{\xi}-\frac{\xi}{a}\right)$	8.425	8.058
$\log q$	— 0.6111	— 0.621
$a\left(\frac{a}{\xi}-\frac{\xi}{a}\right)\cdot\frac{1}{4\log q}$	— 3.447	— 3.240
ζ	— 0.2862	— 0.289
$-\frac{\zeta}{\log q}$	— 0.4683	— 0.465
$\log(-\log q)$	— 0.4925	
$\Psi\left(-\frac{\zeta}{\log q}\right)$	— 1.814	
Ω	— 0.0007	
$\Psi(0)$	— 0.5772	
Ω_0	0.0211	

Somit: $q_{11} = 3.447\ \{0.4925 + 1.814 - 0.0007\}$
$= 7.95$
$q_{12} = -3.447\ \{0.4925 + 0.577 + 0.0211\}$
$= -3.76.$

Zur Bestimmung der in dem Elektroskope inducirten Elektricitätsmengen ergeben sich somit die Gleichungen

$$e_2 = -\frac{3.76}{7.95}e_1, \qquad e_3 = \frac{3.76}{7.95}\cdot e_1$$

Es war aber $e_1 = 205\ A$, wo A die Divergenz des Elektroskopes. Für die in den Blättern des Elektroskopes vertheilte Elektricitätsmenge ergiebt sich somit:

$$e_3 = 97.1\ A.$$

Die Anwendbarkeit dieser Formel ist an die Bedingung gebunden, daß die Capacitäten der Kugeln zu vernachlässigen sind gegenüber der Capacität der Goldblätter. Um diese Voraussetzung zu prüfen, wurde die Standkugel der Drehwage geladen und zur Berührung mit der Kugel des Elektroskopes gebracht. Die in der Kugel nach der Berührung zurückbleibende Elektricitätsmenge konnte mit der Drehwage nicht mehr gemessen werden, bildete somit nur einen verschwindend kleinen Bruchtheil der ursprünglich der Kugel mitgetheilten Elektricitätsmenge.

In dem Falle der sich berührenden Kugeln gelten die Gleichungen

$$e_1 = (q_{11} + q_{12})V, \qquad e_2 = (q_{21} + q_{22})V, \qquad e_3 = q_{33}V.$$

Da e_3 im Vergleich zu e_1 außerordentlich groß ist, so muß auch q_{33} sehr groß sein im Vergleich zu $q_{11} + q_{12}$. Es ist aber für die sich berührenden Kugeln

$$\begin{aligned} q_{11} + q_{12} &= 3.240\ \{\Psi(0) - \Psi(-0.465)\} \\ &= 3.96. \end{aligned}$$

Somit ist q_{33} jedenfalls sehr groß gegen 3.96. Dasselbe gilt dann auch mit Bezug auf die Zahlen 7.95 und -3.76; diese repräsentiren aber die Capacitäten q_{11} und q_{12} der beiden Kugeln bei den Versuchen, welche zu der Graduirung des Elektroskopes dienten. Endlich ist noch ersichtlich, daß der Werth von q_{22} von derselben Ordnung sein muß wie q_{11}, so daß also q_{33} auch gegenüber von q_{22} als sehr groß zu betrachten ist. Die Zulässigkeit der unserer Rechnung zu Grunde liegenden Annahmen ist hiermit erwiesen.

Es sind nun schließlich noch die elektrischen Dichtigkeiten zu berechnen, welche auf den Endflächen der die Turmaline ersetzenden Cylinder anzunehmen sind.

Eine mit Elektricität von der Dicktigkeit E geladene Kreisfläche stehe senkrecht gegen den nach ihrem Mittelpunkt hingehenden Radius der Kugel vom Halbmesser b; der Abstand der Fläche von dem Mittelpunkt der Kugel sei d, der Halbmesser des Kreises r; ein beliebiger Punkt der Fläche sei bestimmt durch die in derselben genommenen Polarkoordinaten ρ und φ. Unter diesen Umständen ist die in einem beliebigen Element der Fläche enthaltene Elektricitätsmenge gleich $\varepsilon\, \rho\, d\rho\, d\varphi$; die von derselben erzeugte Ladung der Kugel

$-\frac{b}{r}\varepsilon\rho\,d\rho\,d\varphi$ und somit die durch die ganze elektrische Kreisfläche erzeugte Ladung

$$-b\varepsilon\int\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{r} = -2\pi\varepsilon b\left\{\sqrt{d^2+r^2}-d\right\}.$$

Bezeichnet man durch d_1 und d_2 die Abstände, in welchen sich die beiden Endflächen eines Kreiscylinders von dem Mittelpunkt der Kugel befinden und denkt man sich diese beiden Flächen belegt mit elektrischen Schichten von derselben Dichte ε aber entgegengesetztem Zeichen, so ergiebt sich für die in der Kugel des Elektroskops inducirte Elektricitätsmenge der Werth

$$2\pi\varepsilon b\left\{\sqrt{d_1^2+r^2}-\sqrt{d_2^2+r^2}-d_1+d_2\right\},$$

ebenso groß aber von entgegengesetztem Zeichen ist dann auch die in den Blättern des Elektroskops enthaltene, also abgesehen vom Zeichen

$$e_2 = 2\pi\varepsilon b\left\{\sqrt{d_1^2+r^2}-\sqrt{d_2^2+r^2}-d_1+d_2\right\}.$$

Da aber $e_2 = 97{,}1\,A$, so ergiebt sich zur Berechnung der Dichtigkeit ε die Gleichung

$$97{,}1\,A = 2\pi\varepsilon b\left\{\sqrt{d_1^2+r^2}-\sqrt{d_2^2+r^2}-d_2+d_2\right\}$$

oder für kleinere Werthe von r

$$97{,}1\,A = \pi^2 r^2\varepsilon\frac{b}{d_1}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{r^2}{d_1^2}+\frac{1}{8}\frac{r^4}{d_1^4}-\frac{5}{64}\frac{r^6}{d_1^6}\right\}$$
$$-\pi r^2\varepsilon\frac{b}{d_2}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{r^2}{d_2^2}+\frac{1}{8}\frac{r^4}{d_2^4}-\frac{5}{64}\frac{r^6}{d_2^6}\right\}.$$

Die Querschnitte der Turmaline, die Halbmesser und Längen der sie ersetzenden Kreiscylinder sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Turmalin	$\pi r^2\,\square^{mm}$	r^{mm}	$d_2-d_1^{mm}$
E	136.10	6.58	15.70
B	48.78	3.94	42.59
S	444.92	11.90	27.87

Bei den Beobachtungen selbst kamen verschiedene Entfernungen der Turmaline von der Kugel des Elektroskopes zur Anwendung; mit Bezug hierauf muß noch bemerkt werden, daß für den Turmalin *E* noch eine vereinzelte früher nicht mitgetheilte Beobachtung angestellt war; die derselben entsprechende Distanz lag in der Mitte

zwischen denjenigen, auf welche sich die früheren Tabellen beziehen. Diese Beobachtung wird im Folgenden gleichfalls mit berücksichtigt werden, so daß bei sämmtlichen Turmalinen 3 verschiedene Werthpaare der Entfernungen d_1 und d_2 zu unterscheiden sind. Diese sind mit den ihnen entsprechenden Formeln zur Berechnung von E in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Turmalin *E.*			Turmalin *B.*			Turmalin *S.*		
Stellung	d_1	d_2	$\varepsilon =$	d_1	d_2	$\varepsilon =$	d_1	d_2	$\varepsilon =$
I.	11.72	27.42	$2.34 \cdot A$	32.38	74.96	$16.4 \cdot A$	14.64	42.50	$0.85 \cdot A$
II.	16.22	31.92	$3.61 \cdot A$	47.18	89.76	$28.5 \cdot A$	22.44	50.30	$1.41 \cdot A$
III.	21.82	37.52	$5.57 \cdot A$	47.98	90.56	$29.2 \cdot A$	39.74	67.60	$3.15 \cdot A$

Für die Abhängigkeit der Dichtigkeit ε von der Abkühlung ergeben sich hiernach die folgenden Reihen zusammengehöriger Werthe von ε und $T-t$. Die jeweilige Stellung des Turmalins ist durch die beigefügten Ziffern gegeben.

Turmalin E.

$T-t$	A	ε		$T-t$	A	ε	
29.0	1.8	4.2	I.	73.7	12.0	66.8	III.
42.0	7.8	18.2		79.4	20.3	73.3	II.
53.7	17.7	41.4		84.2	15.8	88.0	III.
54.0	18.0	42.1		86.4	17.6	98.0	
54.7	17.8	41.6		96.0	18.2	101.4	
64.9	27.0	63.2		109.6	19.1	106.4	
65.4	26.8	62.7	I.	122.3	21.7	120.9	III.

Turmalin B.

$T-t$	A	ε		$T-t$	A	ε	
58.2	17.8	294	I.	23.4	1.7	50	III.
25.0	0.7	20	II.	33.6	3.8	111	
38.0	2.6	74		45.4	7.8	228	
48.5	4.1	114		52.2	7.6	222	
59.0	6.9	194		57.1	9.0	263	
62.9	7.5	214		60.5	11.0	321	
73.0	9.4	268		67.4	9.0	263	
83.5	7.8	222		85.8	7.9	231	
90.7	6.0	171		94.5	4.6	134	
102.8	5.6	160		102.6	3.4	99	
111.6	6.1	174	II.	115.7	4.3	126	III.

Turmalin S.

$T-t$	A	ε		$T-t$	A	ε	
26.7	0.6	0.5	I.	79.7	34.0	29.7	I.
32.4	1.0	0.8		83.7	32.3	45.5	II.
49.2	5.0	4.2		89.0	16.3	51.3	III.
59.9	8.2	7.0		99.3	20.0	63.0	
61.9	7.9	6.7	I.	106.3	20.8	65.5	
70.2	9.3	13.1	II.	114.9	26.4	83.1	III.

Die in diesen Tabellen enthaltenen Resultate sind in Fig. 2 graphisch dargestellt; dabei sind aber die den Turmalinen E und S entsprechenden Dichtigkeiten durch 3, die Dichtigkeiten des Turmalins B durch 6 dividirt.

Die Rechnung ergiebt für den Turmalin B eine besonders große Dichtigkeit der elektrischen Oberflächenschichte. Der Grund liegt darin, daß wir diese Schichte auf die Endflächen der Cylinder koncentrirt haben, während dieselbe in Wirklichkeit auch auf die Säulenflächen der Turmaline sich ausbreitet und dementsprechend auch auf die Mantelfläche der Cylinder auszudehnen ist. Nehmen wir an, daß die elektrische Dichtigkeit in der Mitte des Cylindermantels gleich Null sei und von hier aus gleichmäßig bis zu dem konstanten Betrage ε der Endflächen ansteige, so ergeben sich für die größten beobachteten Dichtigkeiten die Werthe:

	$T-t$	ε
E	122.3	71.8
B	60.5	67.8
S	114.9	48.3

Das Verhältniß der Dichtigkeiten von E und S ist nahezu ungeändert geblieben, die Maximaldichtigkeit von B aber ist in der That auf einen Betrag reducirt, welcher von ganz derselben Art ist, wie bei den beiden anderen Turmalinen.

V. Beziehungen der elektrischen Ladung zu den bei verschiedenen Erwärmungsdauern erreichten Temperaturen.

Die im ersten Abschnitt mitgetheilten Beobachtungen zeigen, daß zu der Erreichung des Maximums der elektrischen Ladung eine um so längere Erwärmung nothwendig ist, je größer das Volumen des Turmalins ist. Es liegt also die Vermuthung nahe, daß das

Maximum der elektrischen Ladung dann erreicht wird, wenn der Turmalin in seinem ganzen Innern die konstante Temperatur der Umgebung angenommen hat.

Wenn der Turmalin eine gegebene Temperatur t_1 besitzt, und er wird in einen Luftraum von der Temperatur t_0 gebracht, so wird er in Folge von Strahlung und Leitung allmälig die Temperatur der Umgebung annehmen. Die Zeit werde von dem Augenblick an gerechnet, in welchem die Aenderung der Temperatur beginnt. Die mittlere Temperatur des Turmalins zu irgend einer Zeit z sei $\bar{t}$; dann ist unter der Voraussetzung, daß das innere Leitungsvermögen sehr groß ist gegen das äußere

$$\bar{t} - t_0 = (t_1 - t_0) e^{-\frac{hS}{CDV} \cdot z}$$

Hier ist h die äußere Wärmeleitungsfähigkeit, S die Oberfläche, V das Volumen des Turmalins, C die specifische Wärme und D die Dichtigkeit. Nun sind die Oberflächen der Turmaline E, B und S beziehungsweise gleich 7,90 □cm, 12,09 □cm und 28,62 □cm; die specifische Wärme kann nach Beobachtungen von H. Meyer gleich 0,245 gesetzt werden; mit Benutzung der früheren Werthe von DV ergeben sich somit die Formeln:

$$\text{Turmalin } E\text{:} \quad \frac{\bar{t} - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-4{,}86\,hz}$$

$$\text{Turmalin } B\text{:} \quad \frac{\bar{t} - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-7{,}63\,hz}$$

$$\text{Turmalin } S\text{:} \quad \frac{\bar{t} - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-3{,}09\,hz}$$

Hat h für alle drei Turmaline denselben Werth, so verhalten sich die Zeiten, in welchen die Temperaturdifferenz $\bar{t} - t_0$ auf denselben Bruchtheil der anfänglichen Differenz $t_1 - t_0$ sinkt, bei den drei Turmalinen wie die Brüche

$$\frac{1}{4{,}86} : \frac{1}{7{,}63} : \frac{1}{3{,}09}$$
$$= 1{,}57 : 1 : 2{,}47$$

Wenn die zu Anfang ausgesprochene Vermuthung richtig ist, so werden sich ebenso die Zeiten verhalten müssen, während welcher man die Turmaline erwärmen muß, um das Maximum der elektrischen Ladung zu erreichen; setzen wir diese Zeit für den Turmalin B gleich 90 min, so müßten die entsprechenden Zeiten für die Turmaline E und S 141 min und 222 min betragen. Der für E sich ergebende Werth ist mit den Beobachtungen wohl in Uebereinstimmung zu bringen. Bei dem Turmalin S dagegen scheint das Maximum der

elektrischen Ladung erheblich später einzutreten, als das Maximum der Temperatur. Nun sind die Beobachtungen für den Turmalin S bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt, und man kann vermuthen, daß hierin der Grund für die mangelnde Uebereinstimmung zu suchen sei. Mit Hülfe der in dem vorhergehenden Abschnitt mitgetheilten Tabellen können die auf verschiedene Temperaturen bezüglichen Beobachtungen auf gleiche Temperatur reducirt werden und man erhält dann für den Turmalin S bei einer Temperatur von 59,6° die folgenden Werthe der elektrischen Ladung

$z^{(\min)}$	10	20	50	80	120	300	360	480	600
ε	0,1	0,5	0,9	1,1	1,9	3,9	5,1	6,1	5,8

Das Maximum der Ladung tritt also in der That erst bei einer Erwärmungsdauer von etwa 480 $^{\min}$ ein.

Wenn der Turmalin in den auf eine konstante Temperatur T erhitzten Trockenkasten eingesetzt wurde, so wird die mittlere Temperatur $\bar{t}$, welche bei einer bestimmten Erwärmungsdauer erreicht wird, gegeben durch die Formel

$$\frac{T-\bar{t}}{T-t} = e^{-\frac{hS}{CVD}\cdot z}$$

Dabei ist die Anfangstemperatur t als gleich zu betrachten mit der Temperatur der äußeren Luft. Wenn der Turmalin herausgenommen wird, so entwickelt sich bei der Abkühlung eine gewisse elektrische Ladung, deren Dichtigkeit aus der Divergenz A des Elektroskops berechnet werden kann. Es liegt die Vermuthung nahe, daß eine elektrische Ladung von demselben Betrage auftritt, wenn der Turmalin auf eine konstante und jener Mitteltemperatur gleiche Temperatur erwärmt worden ist Diese Vermuthung kann in folgender Weise geprüft werden. Mit Hülfe der in dem dritten Abschnitt mitgetheilten Tabellen ist es möglich, die Temperaturdifferenz zu bestimmen, welche zu einer durch gleichmäßige Erwärmung erzeugten elektrischen Ladung gehört. Unter der gemachten Voraussetzung entspricht der gefundene Werth der Mitteltemperatur des Turmalins, ist also gleich der Differenz $\bar{t}-t$. Hat man auf diese Weise $\bar{t}-t$ bestimmt, so kann die Gleichung

$$\frac{T-\bar{t}}{T-t} = e^{-\frac{hS}{CVD}\cdot z}$$

benutzt werden zu der Berechnung der äußeren Wärmeleitungsfähigkeit h.

Für die Turmaline E und B sind die Resultate der Rechnung im Folgenden zusammengestellt, die Werthe von z sind mit Hülfe der im dritten Abschnitt gegebenen Tabellen auf gleiche Tempe-

raturen reducirt. Das Mittel aus den für h gefundenen Werthen ist benutzt zu der Berechnung der den einzelnen Erwärmungsdauern entsprechenden Werthe von $\bar{t}-t$.

Turmalin E.

z	ε	$\bar{t}-t$	h	$\bar{t}-t$ ber.
10	4.2	29.0	0.0158	24.2
20	12.6	36.7	0.0117	36.4
30	18.0	41.9	0.0103	44.0
45	26.3	46.1	0.0098	49.6
60	30.4	48.1		52.1
90	34.2	49.0		53.7
120	39.3	52.6		54.0
150	42.1	54.0		54.0

Der Mittelwerth von h ist 0.012.

Turmalin B.

z	ε	$\bar{t}-t$	h	$\bar{t}-t$ ber.
10	159	41.6	0.0165	41.4
20	232	53.2	0.0163	53.4
30	271	57.5		56.8
60	286	58.1		58.1
90	287	58.1		58.1

Bei B findet eine vollkommen befriedigende Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den aus den Ladungen ε bestimmten Temperaturdifferenzen statt; bei E bleiben die auf dem letzteren Wege gefundenen Temperaturdifferenzen zurück gegen die berechneten. Wenn also der Turmalin E das einemal kürzere Zeit in einem Raume von höherer Temperatur erwärmt wird, so daß seine mittlere Temperatur einen bestimmten Betrag erreicht, das anderemal in einem Raume, dessen Temperatur gleich jener Mitteltemperatur ist so lange, bis er in seinem ganzen Inneren jene Temperatur besitzt, so ist die elektrische Ladung im letzteren Falle größer als im ersteren, doch sind die Differenzen bei dem Turmaline E nicht sehr groß. Bei dem Turmaline S dagegen sind dieselben von einem solchen Betrage, daß die zu Anfang aufgestellte Vermuthung bei ihm auch nicht annähernd als zutreffend betrachtet werden kann. Aus diesem Grunde möge von einer Mittheilung der den Crystall S betreffenden Rechnungen abgesehen werden.

VI. Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit des Turmalins.

Die in den vorhergehenden Abschnitten untersuchten Erscheinungen sind nicht allein abhängig von den Temperaturverhältnissen, welche im Innern des Turmalines herrschen, sondern auch von der Beschaffenheit seiner Oberfläche. Im Folgenden sollen andere Beobachtungen mitgetheilt werden, bei welchen ein solcher Einfluß in unzweideutiger Weise hervortritt.

Diese Beobachtungen beziehen sich zunächst auf die Art und Weise, in welcher das Ansteigen der elektrischen Ladung sich vollzieht, wenn der Turmalin nach einer Erwärmung von bestimmter Dauer aus dem Trockenkasten herausgenommen wird. Die Vertikalreihen der folgenden Tabellen enthalten die in den aufeinanderfolgenden Beobachtungszeiten auftretenden elektrischen Ladungen, wobei die jedesmal erreichte maximale Ladung = 100 gesetzt ist. Die Zahlen einer und derselben Horizontalreihe beziehen sich auf eine und dieselbe in der ersten Vertikalreihe angegebene Beobachtungszeit. Außerdem ist in den Tabellen angegeben die relative Feuchtigkeit, die Erwärmungsdauer, der derselben entsprechende Werth des Quotienten $\frac{\overline{t}-t}{T-t}$; in diesem ist $\overline{t}$ die mittlere Temperatur, welche der Turmalin bei der Erwärmung erreichte, T die Temperatur des Trockenkastens, t die Temperatur der Luft.

Turmalin E.

ρ	55.7	55.0	50.0	50.0	52.0	52.0	52.0	51.0	46.0
ε^{min}	10	20	30	45	60	90	120	150	240
$\frac{\overline{t}-t}{T-t}$	0.43	0.67	0.82	0.92	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00
2	28	28	16	32	31	34	37	39	33
4	83	68	70	64	64	64	66	68	64
6	100	92	89	84	85	87	87	87	87
8		100	99	97	94	98	99	98	98
10			100	100	100	100	100	100	100

Turmalin B.

ρ	55.0	55.0	55.0	49.0	45.0	45.5	45.0
ε^{min}	10	20	30	60	90	120	150
$\frac{\overline{t}-t}{T-t}$	0.71	0.92	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00
2	35	36	40	42	40	40	39
4	78	78	75	74	74	72	69
6	100	98	96	93	89	88	88
8		100	100	100	99	99	99
10					100	100	100

Turmalin S.

p	58.0	57.5	55.5	59.0	57.5	55.0	59.0	60.0
z^{min}	20	50	80	120	300	360	480	600
$\frac{t-t}{T-t}$	0.46	0.79	0.92	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0	12	8	14	7	7	8	8
4	28	12	25	24	16	11	15	18
6	43	25	33	33	24	24	27	37
8	57	50	50	43	38	39	39	47
10	71	62	58	57	53	54	54	63
12	86	62	67	67	64	67	67	74
14	86	75	83	77	76	77	79	86
16	100	75	92	82	82	90	87	92
18		100	100	95	91	96	92	99
20				95	93	97	100	100
22				100	98	100	100	100
24					100	100	100	100

Man sieht, daß die Entwicklung der Elektricität für die verschiedenen Erwärmungsdauern keineswegs in derselben Weise erfolgt. Im Allgemeinen tritt das Maximum der Ladung bei kürzerer Erwärmung früher ein, als bei längerer. Der Grund hierfür könnte in der verschiedenen Vertheilung der Temperatur im Inneren der Turmaline gesucht werden, oder in einer mit der Erwärmung wechselnden Beschaffenheit ihrer Oberfläche. Daß dem letzteren Umstand jedenfalls eine wesentliche Rolle zuzuschreiben ist, ergiebt sich daraus, daß der Verlauf der Ladung auch dann noch ein verschiedener ist, wenn die Erwärmungen eine hinreichende Dauer besitzen, um dem Inneren der Turmaline eine konstante Temperatur zu ertheilen. Dieß ist der Fall bei dem Turmalin *B* für die Erwärmungsdauern von 30^{min} an, bei *S* von 80^{min} an. Hier kann der Unterschied im Verlauf der Ladung nur durch eine verschiedene Beschaffenheit der Oberfläche bedingt sein. Diese ihrerseits erscheint als abhängig von der Dauer der Erwärmung und von der Feuchtigkeit der Luft.

In sehr viel stärkerem Maaße tritt der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf den Verlauf der elektrischen Ladung hervor bei denjenigen Beobachtungen, welche bei verschiedenen Erwärmungstemperaturen angestellt wurden. Die Resultate dieser Beobachtungen sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Der Maximalausschlag des Elektroskops ist wieder gleich 100 gesetzt und auf diesen Werth sind die von 2 zu 2 Minuten beobachteten Ausschläge reducirt. *T* bezeichnet wie früher die Temperatur des Trockenkastens; p die relative Feuchtigkeit.

Turmalin E.

ρ	50.0	50.5	55.0	50.0	55.0	51.0	51.0	54.0	53.0	53.5	54.0	50.5	59.0
T	48.0	61.3	73.5	73.1	84.0	84.5	93.2	98.4	104.1	104.9	113.8	129	139.3
2	50	46	41	36	28	34	27	31	25	23	26	17	16
4	89	76	68	66	58	64	60	54	56	53	55	48	44
6	100	96	88	88	81	83	82	80	77	75	79	72	69
8	89	100	100	99	97	97	97	95	89	89	93	90	86
10	50	96	98	100	100	100	100	100	100	95	99	93	100
12	22	67	75	90	99	93	98	98	100	100	100	100	93
14		32	29	69	83	69	80	85	89	90	98	95	100
16		12	8	40	45	32	37	42	64	77	89	92	93
18				18	4	6	2	6	20	42	84	83	89
20				6	1	1				9	63	73	74
22											29	50	53
24											4	27	30
	I	II				III						IV	V

Turmalin B.

I. Beobachtungsreihe.

ρ	50	50.5	53.0	55.0	52.0	50.0	50.5	50.0	50.0	53.0
T	43.0	56.1	66.2	77.0	81.3	91.4	103.0	110.3	122.3	130.1
2	43	23	32	35	39	37	55	60	87	77
4	100	65	76	68	72	75	100	100	84	75
6	86	100	100	93	100	93	100	98	91	80
8	29	89	76	100	100	100	88	95	95	87
10	14	31	22	77	84	90	83	92	96	92
12				14	35	34	65	97	100	93
14				6	21	5	33	55	87	100
16								5	21	80
18										20
	I		II			III	IV		V	VI

II. Beobachtungsreihe.

ρ	55.5	57.0	57.5	58.0	60.0	54.5	55.0	54.0	55.0	58.0	55.0
T	42.4	52.2	64.1	71.0	78.9	75.7	96.2	105.0	113.6	120.9	134.8
2	6	13	24	51	37	36	37	33	43	50	37
4	47	42	58	63	52	66	73	71	100	73	100
6	76	66	74	80	69	88	90	93	57	82	60
8	88	76	86	95	85	100	100	100	59	100	79
10	100	92	89	95	92	99	67	66	67	100	56
12	100	97	92	99	100	84	43	44	59	76	63
14	100	100	97	100	100	70	43	44	54	82	44
16	100	100	100	99	98	66	43	44	54	82	44
18	100	95	89	76	80	59	43	41	50	82	42
20	88	79	77	61	61	53	42	37	39	82	39
22	76	66	62	45	42	43				79	
24			47	27	26					73	
	I				II	III	IV			V	VI

Turmalin S,

p	56.5	55.0	60.0	56.0	57.0	59.0	60.0	61.5	60.0	67.0
T	49.9	66.5	78.0	90.4	99.0	104.2	109.2	120.0	127.4	136.1
2	0	12	7	4	3	3	6	1	1	3
4	17	24	16	9	10	9	10	7	7	9
6	50	34	30	16	19	14	19	16	16	20
8	83	50	41	29	30	28	31	27	29	33
10	83	62	55	41	38	39	45	43	45	45
12	83	72	66	55	52	52	59	56	56	59
14	100	82	78	69	64	63	62	67	67	68
16	100	92	83	77	74	70	82	76	76	77
18	100	98	91	87	84	79	87	86	86	85
20	100	100	95	94	90	85	94	92	94	92
22	83	100	100	99	95	93	96	96	97	97
24	67	100	100	100	99	98	100	100	100	100
26		98	100	100	100	100	97	98	98	99
28		96	95	100	100	96	93	96	96	99
30		94	90	92	98	91	88	89	91	92
32		94	88	89	94	90	81	82		88
34		90	80	83	89	83	71	71		80
36		84	78	74	83	77	61	59		67
38		72	74	68	78	70	53	50		56
40		68	63	63	74	63	44	40		42
42			57		69	57	37	30		33
44			53		63	51	30	23		23
46			50		57	45	24	18		16
48			43		52	39	18	12		11
50			39		48	33	14	9		
52			33		43	30				
54			28		39	26				
56			26		35	23				
58			26		30	21				
60			22		28	17				
		I	II		III	IV				V

Ein Theil dieser Beobachtungen ist in den Fig. 3—6 graphisch dargestellt und zwar bezieht sich Fig. 3 auf den Turmalin *E*, die Figg. 4 und 5 auf *B*, Fig. 6 auf *S*; die gewählten Reihen sind mit denselben lateinischen Ziffern bezeichnet, wie die ihnen entsprechenden Curven.

Die vorhergehenden Beobachtungen werden ergänzt durch einige weitere Reihen, in welchen der Einfluß der Feuchtigkeit auf den Verlauf der Ladung sehr deutlich hervortritt. Dieselben beziehen sich auf den Turmalin *E*. Sie sind bisher nicht benutzt worden, da bei denselben die Distanz des Turmalines von der Kugel des Elek-

troskopes nicht gemessen worden war; die gleichfalls nicht genau bestimmte Erwärmungsdauer betrug etwa $35^{min.}$—$40^{min.}$.

p	34	39	52	52
T	78.9	75.2	78.2	79.1
t	17.6	17.9	20.0	18.7
2	32	34	31	28
4	61	63	64	60
6	78	81	87	82
8	90	93	96	94
10	98	99	100	100
12	100	100	96	95
18	91	80	28	22
23	77	57	7	2
27	64	37	1	
32	52	17		
38	31	5		
43	16	1		
47	10			
52	5			
57	2			
62	1			

Endlich sei noch erwähnt, daß am Schlusse der zweiten Reihe der mit E angestellten Beobachtungen noch eine Beobachtung ausgeführt wurde mit einer Erwärmungstemperatur von 72° und einer Abkühlung $T-t = 52.8$. Der Maximalausschlag betrug jetzt 5.6 gegenüber dem zu Anfang für $T-t = 52.2$ beobachteten Werth von 7.6. Der Verlauf der beiden Beobachtungen wird durch die folgenden Zahlen gegeben

p	T	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
58	71.0	51	63	80	95	95	99	100	99	76	61	45	27
55	72.0	35	75	98	100	85	71	60	52	39	33		

VII. Zur Theorie der Pyroëlektricität.

Wir nehmen an die Moleküle des Turmalins seien elektrisch polarisirt in der Richtung der Säulenaxe; diese machen wir zu der X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Bei einer beliebigen Temperatur t sei das elektrische Moment eines Volumelementes gegeben durch $\varepsilon_0\, dx\, dy\, dz$, es sei also ε_0 das elektrische Moment der Volumeinheit. Dieses wird von der Temperatur in doppelter Weise abhängig sein können; einmal in sofern mit der Temperatur die

Dichtigkeit der ponderabelen Masse, welche wir als Träger der elektrischen Polarisation betrachten, sich ändert; dann aber, weil diese Polarisation selbst von der Temperatur abhängig sein kann. Wird der Ausdehnungskoëfficient des Turmalins in der Richtung seiner Hauptaxe durch α, in der Richtung senkrecht dazu durch β bezeichnet, so wird das elektrische Moment des Volumelementes bei einer Temperatur $t + \vartheta$ gegeben sein durch

$$\varepsilon \{1 - (\alpha + 2\beta)\vartheta\} \, dx\, dy\, dz.$$

Hier ist für ε derjenige neue Werth zu setzen, welcher der Temperatur $t + \vartheta$ entspricht, also

$$\varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon_0}{dt}\vartheta = \varepsilon_0(1 + \alpha'\vartheta).$$

Somit ergiebt sich für das elektrische Moment des Volumelementes der Ausdruck

$$\varepsilon_0 \{1 - (\alpha + 2\beta - \alpha')\vartheta\} \, dx\, dy\, dz.$$

Wir nehmen an, der Turmalin habe in seinem ganzen Inneren dieselbe Temperatur $t + \vartheta$; das elektrische Moment jedes einzelnen Volumelementes kann man dadurch erhalten, daß die zu der x-Axe senkrechten Endflächen desselben mit entgegengesetzten elektrischen Schichten von der Dichte

$$\varepsilon_0 \{1 - (\alpha + 2\beta - \alpha')\vartheta\}$$

belegt werden; denkt man sich diese Belegung bei allen Volumelementen hergestellt, so werden sich die entgegengesetzten elektrischen Schichten im ganzen Inneren des Turmalins zerstören und es wird nur eine Belegung seiner Oberfläche übrig bleiben. Ist die Säule des Turmalins durch zwei Geradendflächen abgeschnitten, so ist die elektrische Dichtigkeit auf diesen gleich

$$\varepsilon_0 \{1 - (\alpha + 2\beta - \alpha')\vartheta\}$$

während die Säulenflächen selbst unelektrisch bleiben.

Bleibt die Temperatur des Raumes, in welchem sich der Turmalin befindet, längere Zeit hindurch konstant gleich $t + \Theta$, so wird in Folge der Leitungsfähigkeit seiner Oberfläche eine entgegengesetzte elektrische Schichte jener fingirten Oberflächenbelegung sich auflagern und ihre Wirkung zerstören. Der Turmalin erscheint vollkommen unelektrisch. Wenn aber die Temperatur plötzlich auf $t + \vartheta$ sinkt, so nimmt die Dichtigkeit der fingirten Oberflächenbelegung zu um

$$\varepsilon_0(\alpha + 2\beta - \alpha')(\Theta - \vartheta),$$

die Dichtigkeit der aufgelagerten elektrischen Schichte zu um

$$\varepsilon_0 2\beta(\Theta - \vartheta).$$

Es überwiegt also jetzt die Wirkung der molekularen Elektricität und die Dichtigkeit der auf den Endflächen des Turmalins frei werdenden elektrischen Ladung ist

$$\varepsilon_0(\alpha - \alpha')(\Theta - \vartheta).$$

Kühlt sich der Turmalin in freier Luft ab, so hat man zur Bestimmung von ϑ die Gleichung

$$\vartheta = \Theta e^{-at}$$

wo die Zeit von dem Moment an gerechnet wird, in welchem die Abkühlung beginnt. Für die Dichtigkeit der freien Elektricität ergiebt sich somit der Werth

I. $$\varepsilon_0(\alpha - \alpha')\Theta(1 - e^{-at}).$$

Hiebei ist vorausgesetzt, daß die aufgelagerte elektrische Schichte während der Abkühlung eine Veränderung nicht erleide. Wenn aber die Oberfläche des Turmalins leitend ist, so muß jedes Auftreten von freier Elektricität Veranlassung zu einer elektrischen Scheidung geben, welche diese freie Elektricität allmählig wieder zum Verschwinden bringt. Wir nehmen an, daß die Verminderung der freien Elektricität in jedem Augenblick der vorhandenen freien Elektricität proportional sei.

Der Turmalin werde aus einem Raum von der konstanten Temperatur $t + \Theta$ in einen Raum von der gleichfalls konstanten Temperatur t versetzt. Zu irgend einer Zeit sei seine Temperatur gleich $t + \vartheta$, die Dichtigkeit der freien Elektricität η, die Dichtigkeit der fingirten Oberflächenschichte, welche an Stelle der inneren molekularen Vertheilung gesetzt werden kann gleich ε, die Dichtigkeit der aufgelagerten Schichte gleich σ, dann ist:

$$\eta = \varepsilon - \sigma.$$

Während der Zeit dz nehme die Temperatur des Turmalins ab um $d\vartheta$; die gleichzeitige Zunahme der Dichtigkeit der freien Elektricität ist gegeben durch

$$d\eta = d\varepsilon - d\sigma.$$

Es ist aber

$$d\varepsilon = \varepsilon_0(\alpha + 2\beta - \alpha')\,d\vartheta$$
$$d\sigma = \sigma 2\beta\,d\vartheta + q\eta\,dz.$$

Somit

$$d\eta = \varepsilon_0(\alpha - \alpha')\,d\vartheta - q\eta\,dz - 2\beta\eta\,d\vartheta.$$

Andererseits ist die Temperaturabnahme während der Zeit dz

$$d\vartheta = a\vartheta e^{-at}dz.$$

Somit ergiebt sich für die elektrische Dichtigkeit η die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta_1}{dz} + (q - 2\beta a \Theta e^{-az})\,\eta_1 = (\alpha - \alpha')\,a\,\Theta\varepsilon_0 e^{-az}.$$

Da für $z = 0$ auch η_1 gleich Null sein muß, so ergiebt sich das Integral derselben in der Form:

$$\eta_1 = (\alpha - \alpha')\,a\,\Theta\varepsilon_0 \frac{e^{-az}X - e^{-qz}X_0 e^{x_0 - x}}{q - a}.$$

Hier ist

$$X = 1 - \frac{x}{2 - \frac{q}{a}} + \frac{x^2}{2 - \frac{q}{a}\cdot 3 - \frac{q}{a}} - + \ldots$$

$$X_0 = 1 - \frac{x_0}{2 - \frac{q}{a}} + \frac{x_0^2}{2 - \frac{q}{a}\cdot 3 - \frac{q}{a}} - + \ldots$$

$$x = 2\beta\Theta e^{-az}, \qquad x_0 = 2\beta\Theta.$$

Mit Rücksicht darauf, daß $2\beta\Theta$ ein kleiner Bruch ist, kann man näherungsweise setzen:

$$\eta_1 = (\alpha - \alpha')\,a\,\Theta\varepsilon_0 \frac{e^{-az} - e^{-qz}}{q - a}.$$

Der Maximalwerth von η_1 tritt dann ein zur Zeit

II. $$z_1 = \frac{\log q - \log a}{q - a}$$

und ist gegeben durch

III. $$H = (\alpha - \alpha')\,a\,\Theta\varepsilon_0 \left\{\frac{a^a}{q^q}\right\}^{\frac{1}{q-a}}$$

Rechnen wir die Zeit von dem Augenblicke an, in welchem die Dichtigkeit der freien Elektricität diesen Maximalwerth erreicht, so erhalten wir die Gleichung

IV. $$\eta_1 = H\frac{qe^{-az} - ae^{-qz}}{q - a}.$$

Die wesentlichen Resultate dieser theoretischen Betrachtungen sind in den Formeln I, II, III und IV enthalten. Es fragt sich, in wie weit dieselben mit den experimentellen Thatsachen in Uebereinstimmung sich befinden, in wie weit also die ihnen zu Grunde liegenden Annahmen durch die Erfahrung bestätigt werden.

Wir werden zunächst die Formel IV, welche den Verlauf der elektrischen Ladung während der Abkühlung darstellt in Anwendung bringen auf die mit dem Turmalin *S* angestellten Beobachtungen.

Die Ausführung der Rechnung beruht auf der Anwendung derjenigen Methoden und Tabellen, welche ich in einer in den Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1883 enthaltenen Arbeit: »Zur Lehre von der aperiodischen Dämpfung und zur Galvanometrie« mitgetheilt habe.

Die folgenden Tabellen beziehen sich auf die Beobachtungsreihen, welche früher mit II, III und IV bezeichnet worden sind. Bei jeder derselben ist das den Beobachtungen entsprechende Verhältniß der als konstant vorausgesetzten Größen q und a angegeben. Die Tabellen selbst enthalten die Beobachtungszeiten z, die ihnen entsprechenden Werthe der Quotienten η/H, die hieraus sich ergebenden Werthe von q. Am Fuße jeder Tabelle sind die Mittelwerthe der Größen q und a angegeben. Die letzte Columne enthält die mit ihrer Hülfe berechneten Werthe von η/H.

Beobachtungsreihe II. $a = 0.577 \cdot q$				Beobachtungsreihe III. $a = 0.577 \cdot q$			
z	η/H beob.	q	η/H ber.	z	η/H beob.	q	η/H ber.
— 10	0.78		0.30	— 11	0.74	0.0666	0.42
— 8	0.83	0.0734	0.76	— 9	0.84		0.55
— 6	0.91		0.81	— 7	0.90	0.0690	0.74
— 4	0.95	0.0795	0.93	— 5	0.95		0.87
— 2	1.00		0.96	— 3	0.99	0.0212	0.95
0	1.00		1.00	— 1	1.00		0.98
2	1.00		0.98	0	1.00		1.00
4	0.95	0.1143	0.96	1	1.00		0.99
6	0.90		0.91	3	0.98	0.0654	0.97
8	0.88	0.0968	0.86	5	0.94		0.94
10	0.80		0.81	7	0.89	0.1038	0.89
12	0.78	0.0968	0.75	9	0.83		0.84
14	0.74		0.69	11	0.78	0.1058	0.79
16	0.63	0.1074	0.64	13	0.74		0.73
18	0.57		0.58	15	0.69	0.1001	0.67
20	0.53	0.1074	0.54	17	0.63		0.62
22	0.50		0.48	19	0.57	0.1043	0.57
24	0.43	0.1074	0.44	21	0.52		0.52
26	0.39		0.40	23	0.48	0.1029	0.47
28	0.33	0.1030	0.36	25	0.43		0.43
30	0.28		0.33	27	0.39	0.1041	0.39
32	0.26	0.1134	0.29	29	0.35		0.35
34	0.26		0.26	31	0.30	0.1070	0.32
36	0.22	0.1100	0.24	33	0.28		0.29
$q = 0.1052$		$a = 0.0607$		$q = 0.1040$		$a = 0.0601$	

Beobachtungsreihe IV.

$a = 0.577 \cdot q$

z	η/H beob.	q	η/H ber.	z	η/H beob.	q	η/H ber.
— 10	0.63		0.31	14	0.70		0.68
— 8	0.70	0.0993	0.64	16	0.63	0.1077	0.62
— 6	0.79		0.79	18	0.57		0.57
— 4	0.85	0.1400	0.93	20	0.51	0.1119	0.52
— 2	0.93		0.97	22	0.45		0.47
0	0.98		1.00	24	0.39	0.1174	0.42
2	1.00		0.98	26	0.33		0.38
4	0.96	0.0985	0.96	28	0.30	0.1197	0.34
6	0.91		0.91	30	0.26		0.31
8	0.90	0.0861	0.86	32	0.23	0.1215	0.28
10	0.83		0.80	34	0.21		0.25
12	0.77	0.1004	0.74	36	0.17	0.1224	0.22

$q = 0.1095$ $a = 0.0632.$

Man sieht, daß die den Reihen II und III entsprechenden Curven in ihren absteigenden Theilen sehr gut durch die Gleichung

$$\frac{\eta}{H} = \frac{qe^{-at} - ae^{-qt}}{q - a}$$

dargestellt werden. Den aufsteigenden Theilen dagegen, welche den negativen Werthen von z entsprechen, würde dieselbe Funktion nur mit anderen Werthen von q und a genügen können; die Betrachtung der für negative z berechneten q läßt vermuthen, daß dieser der Oberflächenleitung entsprechende Coëfficient während der Abkühlung sich ändert, so daß der höheren Temperatur ein kleinerer Werth von q entspricht. Mit anderen Worten, die Oberfläche des Turmalins besitzt innerhalb der Versuchsgrenzen bei höherer Temperatur ein größeres Isolationsvermögen als bei geringerer. Weniger gut entspricht die Beobachtungsreihe IV den Voraussetzungen der Theorie. Bei ihr erreicht die Leitungsfähigkeit überhaupt keinen konstanten Betrag, sondern nimmt während der ganzen Dauer der Beobachtung zu. Die Abweichung der in der letzten Columne enthaltenen Werthe des Quotienten η/H, deren Berechnung der konstante Mittelwerth der q zu Grunde liegt, von den beobachteten Werthen findet hierdurch ihre Erklärung.

In noch stärkerem Maaße tritt diese Abhängigkeit des Coëfficienten q von der Temperatur hervor bei der Beobachtungsreihe V; von einer Mittheilung der dieselbe betreffenden Rechnung ist daher abgesehen worden.

Die Reihe I enthält für den absteigenden Theil der Curve nur wenige Beobachtungen; über dieß liegt für die Zeiten von 32^{min} an ohne Zweifel eine Störung der Beobachtung vor, durch welche eine Vergrößerung der Divergenz der Goldblätter und eine verhältnißmäßig zu langsame Abnahme der Ladung herbeigeführt wurde. Die in der folgenden Tabelle mitgetheilten Resultate bestätigen aber die Vermuthung, daß der Coëfficient q zu Anfang der Abkühlung, d. h. für den ansteigenden Theil der Curven kleinere Werthe besitze.

Beobachtungsreihe I.

$a = 1.091 \cdot q.$

ε	η/H beob.	q	η/H ber.	z	η/H beob.	q	η/H ber.
— 16	0.34	0.0499	0.17	2	1.00		0.99
— 14	0.50		0.39	4	0.98		0.97
— 12	0.62	0.0548	0.62	6	0.96		0.95
— 10	0.72		0.72	8	0.94	0.0469	0.92
— 8	0.82	0.0557	0.83	10	0.94		0.88
— 6	0.92		0.92	12	0.90	0.0419	0.85
— 4	0.98		0.95	14	0.84		0.82
— 2	1.00		0.98	16	0.72	0.0643	0.77
0	1.00		1.00	18	0.68		0.73

Der Berechnung der Quotienten η/H wurde hiebei der Werth

$$q = 0.0552$$

zu Grunde gelegt, welcher sich als Mittel aus den für $\varepsilon = -8$ und $\varepsilon = -12$ gefundenen Zahlen ergiebt. Der entsprechende Werth von a ist

$$a = 0.0603.$$

Die übrigen Beobachtungen sind einer Prüfung hinsichtlich der Gültigkeit der Formel IV überhaupt nicht unterworfen worden. Die Aehnlichkeit ihres Verlaufes mit dem der Reihen IV und V läßt ein diesen entsprechendes Verhalten erwarten.

Mit Bezug auf die ansteigenden Theile der Curven der Fig. 6 ist zu bemerken, daß eine Uebereinstimmung derselben mit den durch Formel IV dargestellten Curven für die ersten Minuten der Beobachtung im Allgemeinen nicht zu erwarten ist, weil in diesen die Abkühlung nach einem anderen Gesetz als dem von uns angenommenen erfolgt.

Was die Constante a anbelangt, so hängt sie mit der äußeren Wärmeleitungsfähigkeit des Turmalins zusammen durch die Gleichung

$$a = 3.09\, h.$$

Somit ergeben sich aus den im Vorhergehenden gefundenen Werthen von a die folgenden vier Werthe der äußeren Wärmeleitungsfähigkeit.

0.0196; 0.0194; 0,0204; 0,0195.

Von den mit dem Turmalin E angestellten Beobachtungen eignet sich zur Berechnung nur eine einzige, und zwar die erste von den auf Seite 41 mitgetheilten mit einer Beobachtungsdauer von 62^{min}. Bei allen anderen Reihen ergiebt sich eine starke Aenderung des Coëfficienten q mit der Temperatur; bei den meisten ist überdieß die Anzahl der beobachteten Werthe eine kleine wegen der Schnelligkeit, mit welcher die Ladung nach der Erreichung des Maximums wieder verschwand.

Die für die angeführte Beobachtungsreihe sich ergebenden Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

$a = 1.091\,q$

z	η/H beob.	q	η/H ber.	z	η/H beob.	q	η/H ber.
—10	0.32		0.15	11	0.77		0.73
—8	0.61	0.0836	0.53	15	0.64	0.0819	0.60
—6	0.78		0.74	21	0.52		0.43
—4	0.90	0.0901	0.90	26	0.31	0.0906	0.32
—2	0.98		0.96	31	0.16		0.22
0	1.00		1.00	35	0.10	0.1099	0.17
6	0.91	0.0785	0.89	$q = 0.0891$		$a = 0.0972$	

Da nach dem Früheren $\alpha = 4.86\,h$ ist, so ergiebt sich für die äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Werth

$$h = 0.0200.$$

Eine Anwendung der Gleichung IV auf die Erscheinungen, welche der Turmalin B darbietet, dürfte von vornherein als unzulässig zu betrachten sein. Der Verlauf der dieselben darstellenden Curven ist ein wesentlich anderer als bei den Turmalinen S und E. Während bei diesen die Leitungsfähigkeit q der Oberfläche innerhalb gewisser Grenzen sich als ziemlich konstant erweist, ergiebt sich aus sämmtlichen den Turmalin B betreffenden Beobachtungen, daß die Leitungsfähigkeit seiner Oberfläche außerordentlichen Veränderungen unterworfen ist.

Die Gleichung IV besitzt die bemerkenswerthe Eigenschaft, die Constanten q und a in vollkommen symmetrischer Form zu enthalten. Es ist daher zunächst willkürlich, welche der gefundenen Zahlen als der Werth von q, welche als der Werth von a betrachtet werden soll. Die Entscheidung ist bei den Reihen II, III, IV dadurch getroffen, daß eine entgegengesetzte Annahme auf zu große Werthe der Wär-

meleitungsfähigkeit h geführt haben würde. Bei der Beobachtungsreihe I und der für den Turmalin E berechneten Reihe ist für a diejenige Zahl genommen, welche auf einen mit den übrigen übereinstimmenden Werth der äußeren Wärmeleitungsfähigkeit führte.

Wir gehen nun über zu der Prüfung der Gleichung I; zu diesem Zweck läßt sich eine Beobachtungsreihe von Gaugain verwenden; dieselbe bezieht sich auf eine prismatische Säule, deren Kanten die Längen $15.7^{mm} - 16.5^{mm} - 29.5^{mm}$ besaßen. Die Enden derselben waren mit Kupferdrähten umschlungen, von welchen der eine mit der Erde leitend verbunden war. Der andere führte zum Knopfe eines Goldblattelektroskops, welches zur Selbstentladung eingerichtet war dadurch, daß bei einer bestimmten Divergenz das eine der Blätter an eine mit der Erde leitend verbundene Metallkugel schlug. Die in einer bestimmten Zeit entwickelte Elektricitätsmenge wurde durch die Anzahl der Selbstentladungen des Elektroskops gemessen. Der Einfluß der Oberflächenleitung des Turmalins ist bei dieser Methode der Beobachtung wesentlich verringert, aber keineswegs ganz eliminirt; die Verluste, welche durch diese Leitungsfähigkeit hervorgerufen werden, sind in dem Maaße größer, in welchem die Zwischenzeit zwischen zwei Selbstentladungen wächst.

Die folgende Tabelle enthält die Beobachtungsresultate Gaugains und die Resultate ihrer Berechnung bei Zugrundelegung der Gleichung I.

z	η_1/H beob.	$\frac{a}{2.3026}$	η_1/H ber.	z	η_1/H beob.	$\frac{a}{2.3026}$	η/H ber.
0.9	0.09	0.0444	0.10	9.9	0.69	0.0515	0.68
2	0.19	0.0460	0.21	11.1	0.74	0.0519	0.72
2.8	0.27	0.0477	0.28	13	0.79	0.0528	0.78
4	0.35	0.0473	0.37	15	0.84	0.0527	0.82
5	0.43	0.0482	0.44	19.8	0.91	0.0533	0.90
5.9	0.48	0.0486	0.49	23	0.94	0.0535	0.93
6.9	0.54	0.0494	0.55	28.5	0.97	0.0534	0.96
7.9	0.60	0.0508	0.60	32.7	0.99	0.0558	0.98
8.9	0.65	0.0508	0.64	41.7	1.00		0.99

Im Mittel $a = 0.1161$.

Man sieht, daß der Werth von a während der Dauer der Abkühlung stetig und keineswegs unerheblich wächst. Der Grund hiefür dürfte in dem erwähnten Einfluß der elektrischen Leitung der Oberfläche zu suchen sein. Unter der Voraussetzung, daß der von Gaugain untersuchte Crystall eine regelmäßige prismatische Form besessen habe und daß die Werthe des specifischen Gewichtes und der

specifischen Wärme dieselben seien wie bei den von uns untersuchten Turmalinen ergiebt sich:

$$a = 4.30 \cdot h$$

und somit die äußere Wärmeleitungsfähigkeit

$$h = 0.0269$$

ein Werth, welcher erheblich größer ist, als die im Vorhergehenden gefundenen. Ein größeres Gewicht kann demselben nicht zugeschrieben werden, denn die Angaben, welche Gaugain über die Beschaffenheit des Turmalines macht, gewähren kein Urtheil über den größeren oder geringeren Grad von Richtigkeit, welcher der zur Berechnung von h benutzten Gleichung zuzuschreiben ist. Will man übrigens den gefundenen Unterschied eine reelle Bedeutung beilegen, so würde die größere Wärmeabgabe der Oberfläche bei den Versuchen Gaugains dadurch zu erklären sein, daß sein Turmalin in dem freien Raume des Zimmers, die unsrigen in einer geschlossenen Metallhülle sich abkühlten.

Eine genauere Diskussion der Gleichungen II und III würde mit Erfolg nur unternommen werden können, wenn die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit q von der Temperatur und der Feuchtigkeit der Luft bekannt wäre. Mit Bezug auf die Gleichung II genüge die Bemerkung, daß die Zeit z_1 bis zum Eintritt des Maximalwerthes H mit wachsendem q abnimmt, vorausgesetzt daß $q > a$. Dieses Verhalten der Function z_1 steht in Uebereinstimmung mit der bei den Beobachtungen hervortretenden zeitlichen Verschiebung des Maximums der elektrischen Ladung.

Die Gleichung III kann benutzt werden zu der Berechnung derjenigen elektrischen Dichtigkeit, welche bei vollkommener Isolation der Oberflächen auf diesen sich herstellen würde. Bezeichnen wir dieselbe durch H_0, so ist

$$H_0 = (\alpha - \alpha')\Theta z_0 = H \cdot \left(\frac{q}{a}\right)^{\frac{q}{q-a}}$$

Es ist nicht ohne Interesse, eine Vorstellung von den größten Dichtigkeiten zu gewinnen, welche unter der obigen Voraussetzung bei unseren Versuchen erreicht worden wären. Es möge daher die Rechnung für die letzte der für den Turmalin S ausgeführten Versuchsreihen, die Reihe V mit der Erwärmungstemperatur von 136° ausgeführt werden. Aus den für die Zeiten von 30^{min} und 34^{min} gegebenen Procentzahlen ergiebt sich

$$q = 0.103 \qquad a = 0.060.$$

Somit

$$\left(\frac{q}{a}\right)^{\frac{q}{q-a}} = 3.17.$$

Es ist ferner für die betrachtete Versuchsreihe

$$H = 83$$

Somit $$H_0 = 263.$$

Würde also die Oberfläche des Turmalins vollkommen isolirt haben, so würde bei einer Abkühlung von 136° auf 21° jedes Quadratmillimeter der Endflächen sich mit einer Ladung von 263 elektrostatischen Einheiten bedeckt haben.

S. 334, Z. 6 v. u. zu schreiben: *Παρνήθιος*.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1885.

(Fortsetzung.)

Langue internationale neo-latine ou langage auxiliaire simplifié par E. Courtonne.
Lessons introductory to the modern higher Algebra, by George Salmon D. D. from the author.
Archiv des Vereins für Siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. 20. Band. 1. Heft.
Monthly notices of the Royal Astronomical Society. Vol. XLV. N. 8. June 1885.
John Hopkins University Circulars. Vol. IV. No. 40. July 1885.
Boletin del Ministerio de Fomento de la Repùblica Mexicana. Tomo X. No. 43. Mayo 7. de 1885.
Atti della Regia Accademia dei Fisiocritici di Siena. Serie Terza. Vol. II. Fasc. 1. 2. 3. 4. 5.
Atti della Regia Accademia dei Fisiocritici di Siena. Serie Terza. Vol. III. Fasc. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.
R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Rapporti e Processi Verbali. Tom. I. Fasc. 1. 2.
Das Pontische Heraklea (Schluss. Von Prof. Dr. Herm. Schneiderwirth).
Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-Arts de Belgique. 54. annee. 3. serie. Tome 9. N. 5.
Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger. 1873—76. Botany. Vol. I.
Professional papers of the signal service. No. XV. Researches on solar heat and its absorption by the earth's Atmosphere. A report of the mount Whitney expedition. No. XIII. Temperature of the atmosphere and Earth's surface. Washington.
Bulletin of the Essex Institute. Vol. 15. Nrs. 1. 2. 3, 4. 5. 6, 7. 8. 9, 10. 12. Vol. 16. Nrs. 1. 2. 3, 4. 5. 6, 7—12.
Priced catalogue of the publications of the Essex Institute. Salem, Mass. U. S. 1884.
Proceedings of the Colorado scientific society. Vol. I. 1883 and 1884.

The geological and natural history survey of Minnesota first annual report 1872.
fourth — — 1875.
seventh — — 1878.
ninth — — 1880.
tenth — — 1881.
eleventh — — 1882.
twelfth — — 1883.
(Doppelt vorhanden 1. 7. 10. 11. 12., hingegen fehlen 2. 3. 5. 6. 8.)
Bulletin of the United States Geological survey. N. 2. 3. 4. 5. 6.
United States Geological survey: The copper-bearing rocks of lake superior. Tom V by Roland Duer Irving.
— — — — Comstock mining and miners. Tom IV by Eliot Lord.
Tagebuch üb. Dr. Martin Luther geführt von Dr. Conrad Cordatus 1537. Zum erstenmal herausgegeben von Dr. H. Wrampelmeyer. Halle, 1883. 1884. Heft 1—4. Geschenk des K. Kultusministeriums.

August und September 1885.

Atlas von China von F. Frh. von Richthofen. Erste Abtheilung. Nördliches China.
Verhandlungen des Naturhistorisch-Medicinischen Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. III. Band. 4. Heft.
Abhandlungen der historischen Klasse der Kön. Bairischen Akademie der Wissenschaften. 17. Bandes. 2. Abth.
Sage und Forschung. Festrede zur F. ihres 126. Stiftungstages von Ohlenschlager. 1885.
Astronomische Bestimmung der Polhöhen auf den Punkten Irschenberg, Höhensteig und Kampenwand v. K. Oertel. 1885.
Monumenta Tridentina v. Aug. v. Druffel. Heft II. Juni bis Dezember 1545.
Agroikos. Etholog. Studie v. Otto Ribbeck. N. 1 des X. Bandes der h.-ph. Cl. der Sächsischen Ges. d. W.
Zweiundsechzigster Jahresbericht der Schles. Gesellsch. für vaterländische Cultur. Breslau 1885.
Magnetische und Meteorologische Beobachtungen a. d. K. K. Sternwarte zu Prag im J. 1884.
Zeitschr. der deutschen Morgenländischen Gesellsch. B. 39. H. II.
Zeitschr. für Naturwissenschaften für Sachsen und Thüringen. Der ganzen Reihe LVIII. Band. 4. Folge. 4. Band. 3. Heft.
Verhandl. d. K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1885. XXXV. Band. 1. Halbjahr.
Mineralogische Mittheilungen v. G. vom Rath. Colemanit aus Californien v. C. Bodewig und G. vom Rath. — Ueber Vanadate und Jodsilber von Lake Valley, Donna Anna County, New-Mexiko v. F. A. Genth und G. vom Rath.
Irmischia. No. 3. 4. 5 und 6. V. Jahrgang. März, April, Mai, Juni 1885.
Zeitschr. d. Oesterreich. Gesellsch. für Meteorologie. XX. Band. Augustheft 1885.
Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellsch. in Nürnberg. 1884.
Sitzungsberichte der Naturforchenden Gesellsch. zu Leipzig. 11. Jahrg. 1884.
Sitzungsberichte der mathem.-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissensch. zu München 1885. Heft 2.
Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellsch. in Zürich. 26. Jahrg. 1. 2. 3. 4. 27. Jahrg. 1. 2. 3 und 4. 28. Jahrg. 1. 2 und 3. 4. 29. Jagrg. 1. 2. 3. 4.
Vierter Jahresbericht des Oberhessischen Vereins für Lokalgesch. Vereinsjahr 1884—85.
Sitzungsberichte der philos.-philol. und hist. Klasse der K. B. Akademie der Wissensch. zu München. 1885. Heft II.
Irmischia. No. 7. 8. 9. Jahrg. V. Juli, Aug., Sept.
Zeitschrift der Oesterr. Gesellsch. für Moteorologie. XV. Band. Septemberheft 1885.
Flora Batava 269. Aflevering.
— — 270. Aflevering.

Bijdragen tot de Dierkunde te Amsterdam. 12. Aflevering. 3. Gedeelte.
Archives Neerlandaises des sciennes exactes et naturelles a Harlem. Tome XX. 1. Livraison.
— — — — Tome XX. 2. Livraison.
Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. Door Van der Chijs. 1. Deel 1602—1642.
Notulen van de Algemeene en Bestuurs-vergaderingen van het Bat. Genootsch. v. Kunsten en Weetensch. Deel XXII. 1884. Afl. 4.
Het Kongsi wezen van Borneo. Door Dr. J. J. M. de Groot. Mitg. d. h. K. Inst. v. d. Taal-, Land- en Volkenk. v. Nederl. Indie.
Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 54 annee. 3. serie, tome 9 et tome 10. No. 6 et No. 7.
Bulletin de la société mathematique de France. Tome XIII. N. 6 et dernier
Catalogue de la bibliotheque de la société nationale des sciences naturelles de Cherbourg. 2. partie. 3. livraison. Avril 1883.
Memoires de la société des sc. natur. et mathem. de Cherbourg. Tome XXIV. Troisieme serie, tome IV.
Annales du musée Guimet. Revue de l'histoire des Religions. 5. année. 6. année. Nouvelle série Tome XI. No. 1. 2. Janvier, Fevrier, Mars, Avril.
Oeuvres complêtes d'Augustin Cauchy. Publiées p. l'Académie des sciences à Paris. 1. serie Tome V.
Revue Internationale de l'electricité. Paris 1. année. No. 2. Juillet 1885.
Bulletin de la société mathématique de France. Tome XIII. No. 5.
Annales de la faculté des lettres de Bordeaux. 2. serie. No. 1. 1885.
Mémoires de l'Academie des sciences etc. de Lyon. Classe des sciences vol. 27. 2. 3. Classe des lettres vol 21 et 22.
Académie des sciences etc. de Montpellier. Mémoires de la section des sciences. Tome X. III. fascicule 1883—1884. Mémoires de la section des lettres Tome VII. II. fascicule 1883—1884.
Mémoires de la société Royale des sciences de Liege. Deuxième serie Tome XII.
Lexicon Lapponicum vou J. A. Friis. Probebogen.
Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania 1884.
Bulletin mensuel de l'observatoire meteorologique de l'univ. d'Upsal. Vol. XVI. Année 1884.
Nova acta Regiae Societatis scientiarum Upsalensis. Series III. Vol. XII. fasc. II.
La rotation et le mouvement curviligne par Rodrigo de Bonaventura Martins Pereira. Lisbonne.
Mémoires de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique. Tome XLV. 1884.
Mémoires conronnés et mém. des savants étrangers publ. par l'Academ. roy. de Belgique. Tome XLV. 1883 et Tome XLVI. 1884.
Collection de chroniques belges inédites: Cartulaire des comtes de Hainaut. Tome II. 1883. — Correspondance du Cardinal de Granville. Tome IV. — Relations politiques des Pays-Bas et de l'Angleterre sous le regne de Philippe II. Tome IV.
Jours de solitude par Octave Pirmez. Edit. poothume.
Mémoires couronnés et autres mem. publ. p. l'Acad. de Brux. collection in 8°. Tome XXXVI.
Journal of the Royal Microscopical Society. Serie II. Vol. V. Part. 4. August 1885.
The Journal of the Linnean Society: Zoology. Vol. XVII. No. 103, 104, 105, 106, 107, 108. Botany. Vol. XXI. N. 134, 135, 136, 137.
List of the Linnean Society of London 1884—1885.
Index perfectus ad Caroli Linnaei species plantarum by F. de Mueller.
The transactions of the Linnean society of London. Botany. 2. serie. Vol. II. Part. 8.
— — — — Zoology. 2. serie. Vol. II. Part. 11. Part. 13. Part. 14. Vol. III. Part. 2. Part. 3.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XXXVIII. N. 238.
Nature 1885. Vol. 32. N. 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830.
Proceedings of the London mathem. Soc. No. 243, 244.
Records of the Geological Survey of India. Vol. XVIII. Part. 3. 1885.

China and the Roman Orient by F. Hirth. Shanghai.
Proceedings of the scientifical meetings of the Zoological Society of London. 1885. Part. II. March and April.
Transactions of the Zoological Soc. of London. Vol. XI. Part. 10.
Philosophical transactions of the Royal society of London 1884. Vol. 175. Part. I and Part II.
The Royal society, 1. Dez. 1884. London.
Proceedings of the Royal society of London. Vol. XXXVII. No. 232, 233, 234, 235, 236, 237.
Descriptive Notes on Papuan plants by Bar. Ferd. von Müller.
Publication der Norwegischen Commission für Europäische Gradmessung. Geodätische Arbeiten. Heft 1. 2. 3. 4. Utgivet af den norske Gradmaalingskomission. Heft 1. 2. 3.
Den norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XIV. Zoologi Crustacea 1ª. 1ᵇ. ved G. O. Sars.
Oeversigt af Finska vetenskaps-societetens Förhandlingar. XXVI. 1883—1884.
Bidrag till Kännedom of Finlands Natur och Folk. Heft 39. 40. 41. 42.
Acta Societatis scientiarum fennicae. Tomo XIV.
Vom Meteorologischen Observatorium in Upsala.
Atti della Reale Accademia dei Lincei di Roma. Jahrg. 182. 1884—85. Vol. 1. Fasc. 16°. 17°. 18°. 19°.
Memorie della Accademia delle scienze di Bologna. Serie IV. Tomo V.
Early Proceedings of the American philosophical society. Vol. XXII. Part. I. 117. Vol. XXII. Part. II. 118. (1744 to 1838.) Vol. XXII. Part. III. 119.
Annals of the New-York Academy of sciences. Vol. III zweimal 3 u. 4, zweimal 5. u. 6.
Johns Hopkins University circulars. Vol. IV. N. 41.
Johns Hopkins University studies. Third series VIII: The Influence of Proprietors in Jersey. By Aust. Scott.
— — — — Third series IX—X: American Constitutions by Davis.
Twenty-first ann. report of the Alumni association. Year 1884—85.
Bulletin of the museum of comp. Zoology at Harvard College. Vol. XI. N. 11. Vol. XII. N. 1.
The Canadian ricord of science. Vol. 1. N. 3.
Proceedings of the canadian Institute. Toronto. Vol. XXI. N. 143.
Annales de la sociedad cientifica Argentina. Tomo XIX. Entrega 4. 5. 6.
Diario oficial de la repùblica de Chile. Año IX. N. 2, 452—2, 463.
Bulletino di bibliografia e di storia della scienze mathem. e fisiche. Tomo XVII. Octobre 1883. Roma. (Für die Gauss Bibliothek).
Royal society of Queensland proceedings 1884. Vol. 1. Part. II. III. IV.
Boletin del Ministerio de Fomento de la Rep. mexicana. Tom. X. N. 55—60, N. 61—72.
Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums. Im Jahre 1881. 1883. 1884.
Appendix to the memoir No. 5. of Tôkiô University.
Transactions of the Connectient Academy. Vol. VI. Part. 2.
Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze mathematique e fisiche. Tomo XVII. Novembre 1884. Roma. Für die Gauss Bibliothek.
Mitteilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. 5. Jahresschrift.
Ackererde und Untergrund des Gutes Nikolajewsk.
— — — — Frubetschino. Von Prof. Dr. C. Schmidt.
Sitzungsberichte der K. preussischen Akademie der Wissensch. zu Berlin vom 8. Jan. 1885—30. Juli 1885. I—XXXIX.

Oktober 1885.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Aug. 1885. 33. Heft. Band IV. Seite 111—162.
Tagebuch über Dr. Martin Luther gef. von Dr. Conrad Cordatus, zum 1. Male herausgeg. v. Wrampelmeyer. Schluss-Heft.

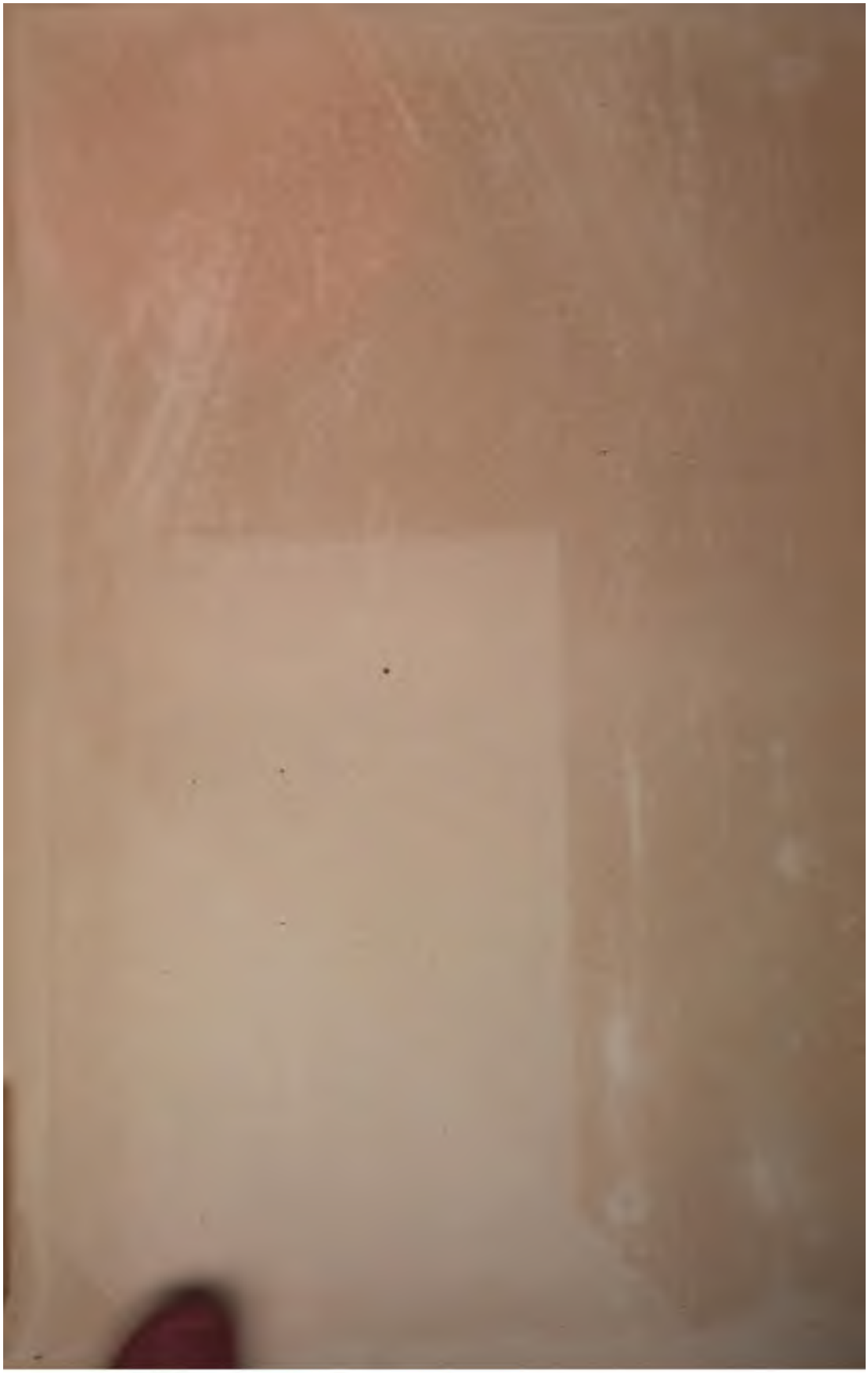
Vorträge und Mittheilungen v. G. vom Rath.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 20. Jahrg. 3. Heft.
Sitzungsbericht der mathem.-physik. Classe der Kön. B. Akademie der Wissenschaften zu München. 1885. Heft III.
Leopoldina, Heft XXI. N. 17—18.
Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. IV. Band. 1. Theil.
Internationale Zeitschrift für allgemeine Sprachwissenschaft. II. Band. 1. Hälfte.
Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Sadt Meissen. 1. Bandes. 4. Heft.
Archiv des historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. 28. Band.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel VII. Theil. 3. Heft.
Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark. XXXIII. Heft.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. 1885. Heft III.
Untersuchungen über die Quantität und Betonung in den slavischen Sprachen. Des X. Bandes N. 2. Leipzig. Von Aug. Leskien.
Acta Mathematica 7:1. 7:2.
Memoire di Matematica e di Fisica della società italiana delle scienze. Napoli. Serie 3. Tomo V.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXII. Roma. Vol. I. Fasc. 20. 21. 22. 23.
Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XVII. Dicembre 1884. Für die Gauss Bibliothek.
Atti della società toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. IV.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Coimbra. Vol. VI. N. 3.

Von der historisch-litterarischen Akademie in Krakau:

Scriptores rerum polonicarum. Tom. VIII.
Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. Tomus VIII continet: tomi I volumen 1. 1507—1586.
Sprawozdanie Komisyi fizyjocrafiezny.
Slownik synonimów Polskich. Tom. II.
Rocznik zazzadu Akademie Umiejetnosci Krakowie. Rok. 1884.
Rozpranoyi sprawozdania z posiedzen. Tom. XVIII.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tifliser physikalischen Observatorium im Jahre 1882. 1883.
Bulletin de l'Academie imperiale des sciences de St. Petersbourg. Tom. XXX. Feuilles 11—20.
Tabulae quantitatum besselianarum pro annis 1885 ad 1889. Edidit Otto Struve. Petropoli.
Die Beschlüsse der Washingtoner Meridianconferenz v. Otto Struve. Petersburg.
Jahresbericht am 25. Mai 1885 der Nikolai-Hauptsternwarte Petersburg.
— 27. Mai für die Jahre 1882—83 und 1883—84.
Proceedings of the London mathematical society. N. 245—249.
Nature. Vol. 32. N. 831, 832, 833, 834, 835.
Memoirs of the Royal Astonomical society London. Vol. XLVIII. Part. II. 1884.
Journal of the Royal microscopical society. Ser. II. Vol. V. Part. 5.
Revue internationale de l'electricité Année I. N. 4. Sept. 1885.
Monographs of the United States Geological Survey. Vol. VI and Vol. VII.
Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XXIV, Vol. XXV.
Report of the commissioner of agriculture for the year 1884.
American journal of Mathematics. Vol. VIII. N. 1.

(Fortsetzung folgt).

Für die Redaction verantwortlich: *H. Suppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Stanford University Libraries
3 6105 005 657 036

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-1493

All books may be recalled after 7 days

DATE DUE